

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
аграрный университет имени И. Т. Трубилина»

Архитектурно-строительный факультет

Кафедра строительных материалов и конструкций

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по дисциплине

«Теория расчета пластин и оболочек»

для студентов специальности

08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений

**Краснодар
КубГАУ
2019**

Методические указания по дисциплине «Теория расчета пластин и оболочек» / С.Е. Пересыпкин. – Краснодар : КубГАУ, 2019-34 с.

В методических указаниях изложена краткая теория расчета и приведены способы расчета плит и оболочек вращения для выполнения расчетно-графических работ с использованием ЭВМ и расчетных комплексов STARK с целью закрепления компетенций, полученных при изучении дисциплины «Теория расчета пластин и оболочек».

Предназначены для студентов специальности 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений.

Рассмотрено и одобрено методической комиссией архитектурно-строительного факультета Кубанского государственного аграрного университета, протокол № 2 от 22.10.2019.

Председатель
методической комиссии



А. М. Блягоз

- © Пересыпкин С.Е., 2019
- © ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина», 2019

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В современном строительстве многие элементы конструкций могут рассматриваться как тела, у которых один размер, называемый толщиной, мал по сравнению с двумя другими.

Если срединная поверхность таких тел, под которой

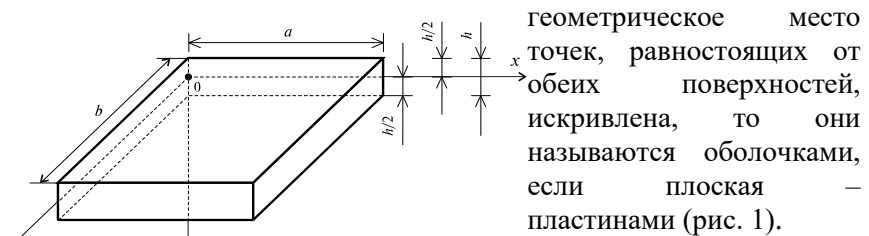


Рис. 1

В современном строительстве пластинчатые конструкции имеют большое распространение. Это объясняется тем, что присущие им, как тонкостенным конструкциям, легкость и рациональность формы сочетаются с высокой несущей способностью, экономичностью и хорошей технологичностью. Элементами этих конструкций являются пластинки, которые могут работать как в своей плоскости, так и из плоскости. К пластинчатым конструкциям относятся перекрытия, стены, а также коробчатые системы, образующие основную несущую конструкцию здания, в которой стены и перекрытия работают как единая пространственная система. К пластинчатым конструкциям примыкают также системы, где элементами являются и стержни и пластинки, как, например, несущая конструкция каркасно-панельных зданий.

Пластинка подчиняется в своей работе гипотезе прямых нормалей. Эта гипотеза формулируется следующим образом: нормаль к первоначально плоской срединной поверхности пластинки после деформации последней переходит в нормаль к искривленной поверхности.

Тем самым постулируется отсутствие сдвигов по плоскостям, параллельным срединной поверхности. Гипотеза прямых нормалей сводит задачу расчета пластинки из трехмерной в двухмерную, так как, согласно этой гипотезе, все слои пластинки деформируются подобно срединной поверхности.

Ввиду симметрии относительно срединной поверхности работу пластинки можно разделить на две независимые части:

1) работу в своей плоскости, при которой происходят перемещения u и v , параллельные срединной плоскости, вдоль координатных осей x и y при отсутствии перемещений w вдоль оси z , нормальной к осям x и y , и

2) работу пластинки из плоскости, когда точки срединной поверхности испытывают только перемещения w .

Если срединная поверхность оболочки образует поверхность вращения, то она относится к оболочкам вращения. Задача о расчете тонкостенных оболочек вращения наиболее просто решается в случае, когда напряжения постоянны по толщине, а изгиб отсутствует. Теория оболочек, построенная на этом допущении, называется безмоментной теорией оболочек.

2. ИЗГИБ ПЛАСТИН

Предполагаем, что на поверхности пластины действует распределенная нагрузка интенсивностью $q=q(x,y)$. Для вывода дифференциального уравнения изогнутой поверхности пластинки выделим из ее состава бесконечно малый элемент с размерами dx , dy , h , где h – толщина пластины. Выделенный элемент с указанными внутренними усилиями изображен на рис. 2. Определим внутренние усилия в пластине следующим образом.

Для этого отметим характерную для пластин особенность обозначения изгибающих моментов отличную от тех, что приняты в балках, а именно: M_x – изгибающий момент на площадке с нормалью параллельной оси x ; аналогично, M_y – изгибающий момент на площадке с нормалью параллельной оси y ; M_{xy} – крутящий момент относительно оси x , действующий в плоскости параллельной оси y ; M_{yx} – крутящий момент относительно оси y , действующий в плоскости параллельной оси x (см. рис. 2). Различие между Q_x и Q_y состоит в том, что интегрирование ведется по площадке с нормалью параллельной оси x , в первом случае, и по площадке с нормалью параллельной оси y во втором. С учетом изложенного выражения погонных усилий записываются в следующем виде:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz ;$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz ;$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz ;$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz ;$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz .$$

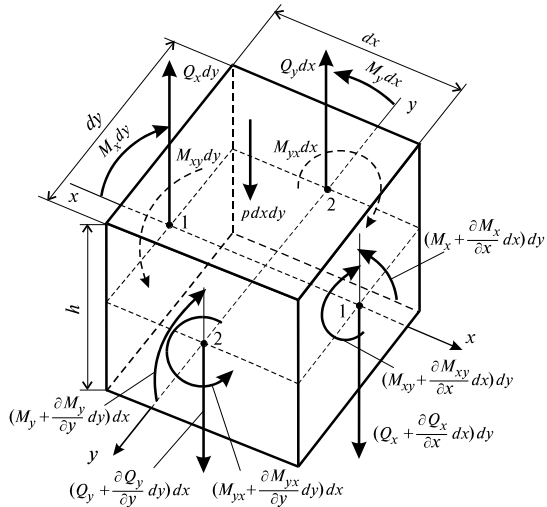


Рисунок 2

Проецируя все силы, приложенные к элементу пластинки на вертикальную ось z , из условия равновесия получим:

$$q dx dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy = 0,$$

$$\text{откуда } \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \quad (1)$$

Далее, составляя условия равновесия в форме суммы моментов относительно координатных осей x и y , и пренебрегая малыми величинами второго порядка, получим:

$$\begin{aligned} Q_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}; \\ Q_x &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя выражения Q_x и Q_y из (2) в (1), получим:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \quad (3)$$

Очевидно, что для определения трех величин M_x , M_y и M_{xy} одного уравнения (3) недостаточно. Для решения задачи необходимо выразить моменты через прогибы пластинки.

С этой целью для тонких пластинок вводятся следующие допущения:

1. Отрезок нормали к срединной поверхности при изгибе остается прямым и перпендикулярным к срединной поверхности. Это допущение носит название гипотезы прямых нормалей.

2. Величины σ_z и ε_z пренебрежимо малы и в расчете не учитываются.

Поскольку, мы предположили, что $\varepsilon_z = 0$, то

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

следовательно, прогиб пластины w не зависит от координаты z , то есть $w = w(x, y)$.

Пользуясь сделанными предположениями, выразим перемещение точек пластины вдоль осей x и y , соответственно, u и v через их прогиб w .

Согласно рис. 3. можно записать:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4)$$

Нормаль к срединной поверхности пластинки (С – С) согласно гипотезе прямых нормалей и в деформируемом состоянии пластинки (С' – С') остается перпендикулярной к искривленной поверхности. Аналогичным образом получим:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5)$$

Закон Гука в данном случае преобразуется к виду:

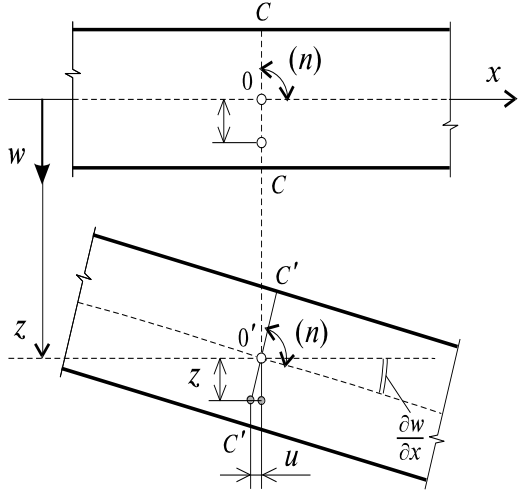


Рисунок 3

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{E z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{E z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{E z}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражения для моментов с учетом (6) принимают вид:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -(1-\mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины.

Пользуясь соотношениями (2) и (7), выражения для поперечных сил можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Согласно (7) величины моментов определяются через один искомый параметр – прогиб пластины $w(x, y)$. Следовательно, подставляя выражение (7) в (3), окончательно получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (9)$$

Выражение (9) – известное дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины, полученное Софи Жермен и опубликованное Лагранжом в 1811 году.

Пример 1

Рассмотрим эллиптическую пластинку, жестко заделанную по контуру и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 4). При $a = 1,3$ м, $b = 1,0$ м, $h = 0,18$ м, $q = 300$ кН/м², $\gamma = 1/6$, $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м², требуется:

1. Определить прогиб пластины в ее середине;
2. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил в пластине по направлениям главных диаметров контура;
3. В точке C с координатами $(a/2, b/2)$ определить изгибающие моменты M_x , M_y и крутящий момент M_{xy} .

Решение

Выберем начало координат в центре пластинки и запишем уравнение контура (в нашем случае – уравнение эллипса):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (10)$$

При жесткой заделке во всех контурных точках (10) должны

выполняться следующие граничные условия:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0,$$

где n и s – нормаль и касательная к контуру пластины, соответственно. Нетрудно убедиться, что этим условиям удовлетворяет функция

$$w = c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \quad (11)$$

где c – прогиб в центре пластинки.

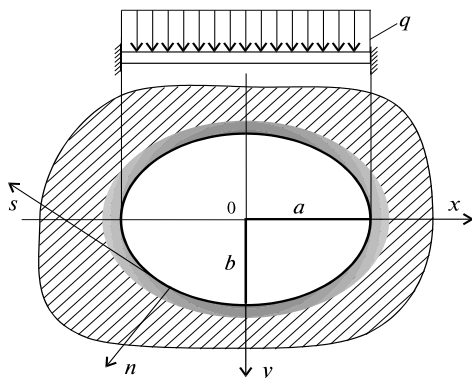


Рисунок 4

Действительно в результате дифференцирования функции w по n получим:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 2c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (12)$$

Но поскольку, на основании (10) в контурных точках

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

то выражения (11) и (12) на контуре обращаются в нуль. Можно доказать, что условие $\frac{\partial w}{\partial s} = 0$ также выполняется на контуре.

Проверим, удовлетворяет ли выбранная функция w основному дифференциальному уравнению (9). Вычислим частные производные

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{24c}{a^4}; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{24c}{b^4}; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{8c}{a^2 b^2}.$$

и подставим их в (9). Результатом будет выражение

$$c \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right) = \frac{q}{D}.$$

Очевидно, что оно справедливо в случае, если $q = \text{const}$, а прогиб в центре будет равен

$$c = \frac{q}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)}. \quad (13)$$

Выражения изгибающих моментов M_x и M_y и крутящего момента M_{xy} в произвольной точке пластинки в соответствии с (7) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} M_x &= -4cD \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{\mu}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1 \right) \right]; \\ M_y &= -4cD \left[\frac{1}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{\mu}{a^2} \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right]; \\ M_{xy} &= -\frac{8cD}{a^2 b^2} (1 - \mu)xy. \end{aligned} \quad (14)$$

Моменты на концах малой полуоси ($x = 0$, $y = \pm b$) согласно (14) будут равны:

$$M_x = -\frac{8\mu cD}{b^2}; \quad M_y = -\frac{8cD}{b^2}; \quad M_{xy} = 0. \quad (15)$$

В точках, расположенных на концах большой полуоси ($x = \pm a$, $y = 0$) моменты равны:

$$M_x = -\frac{8cD}{a^2}; \quad M_y = -\frac{8\mu cD}{a^2}; \quad M_{xy} = 0. \quad (16)$$

И, наконец, в центре пластины ($x = y = 0$) моменты равны:

$$M_x = 4cD \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right); \quad M_y = 4cD \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\mu}{a^2} \right); \quad M_{xy} = 0. \quad (17)$$

В данном случае имеем:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{2 \cdot 10^8 \cdot 0,18^3}{12\left(1 - \frac{1}{36}\right)} \approx 10^5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$c = \frac{q}{D\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4}\right)} = \frac{300}{10^5 \left[\frac{24}{1,3^4} + \frac{16}{1,3^2 \cdot 1^2} + \frac{24}{1^4}\right]} = 7,16 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Для точки C(0,5a; 0,5b) выражения $\left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$ и $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1\right)$

равны нулю, следовательно: $M_x^c = 0; M_y^c = 0;$

$$M_{xy}^c = -\frac{8cD}{a^2 b^2} (1-\mu) \frac{a b}{2 \cdot 2} = -\frac{8 \cdot 7,16 \cdot 10^{-5} \cdot 10^5}{1,3 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 1,3 \cdot 1}{6 \cdot 2 \cdot 2} = -11,93 \frac{\text{кНм}}{\text{м}}$$

Для построения эпюр M_x и M_y достаточно найти их значения в трех точках по осям эллипса, так как вдоль них эти функции имеют параболический характер изменения, для этого воспользуемся формулами (15) ÷ (17):

$$M_y^{(E,D)} = -\frac{8 \cdot 7,16 \cdot 10^{-5} \cdot 10^5}{1^2} = -57,28 \text{ кН м/м};$$

$$M_x^{(A,B)} = -\frac{8 \cdot 7,16 \cdot 10^{-5} \cdot 10^5}{1,3^2} = -33,89 \text{ кН м/м};$$

$$M_y^0 = 4 \cdot 7,16 \cdot 10^{-5} \cdot 10^5 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{6 \cdot 1,3^2} \right) = 31,46 \text{ кН м/м};$$

$$M_x^0 = 4 \cdot 7,16 \cdot 10^{-5} \cdot 10^5 \left(\frac{1}{1,3^2} + \frac{1}{6 \cdot 1^2} \right) = 21,72 \text{ кН м/м}.$$

При построении эпюр следует помнить, что $M_x^c = M_y^c = 0$.

Величины поперечных сил вдоль координатных осей могут быть вычислены по формуле (8)

$$Q_x = -\frac{8cD}{a^4 b^2} (3b^2 + a^2) x; \quad Q_y = -\frac{8cD}{a^2 b^4} (3a^2 + b^2) y.$$

В данном случае $Q_y^E = 205,74 \text{ кН/м}$; $Q_y^D = -205,74 \text{ кН/м}$.

Аналогично $Q_x^A = 122,28 \text{ кН/м}$; $Q_x^B = -122,28 \text{ кН/м}$.

По данным вычислений построены эпюры M_x , M_y , Q_x и Q_y (рис. 5). Поскольку из условий равновесия пластинки следует, что

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{dQ_y}{dy} = -q,$$

то в данном случае легко сделать проверку графически. Действительно,

$$\frac{dQ_x}{dx} = \frac{Q_x^B}{a}; \quad \frac{dQ_y}{dy} = \frac{Q_y^D}{b}; \quad \frac{Q_x^B}{a} + \frac{Q_y^D}{b} = -q,$$

где $Q_x^B = -122,28 \text{ кН/м}$ (с эпюры Q_x), $Q_y^D = -205,74 \text{ кН/м}$ (с эпюры Q_y), $q = 300,0 \text{ кН/м}$ (по условию), тогда:

$$-\frac{122,28}{1,3} - \frac{205,74}{1} = -300,0.$$

Таким образом, задача решена правильно.

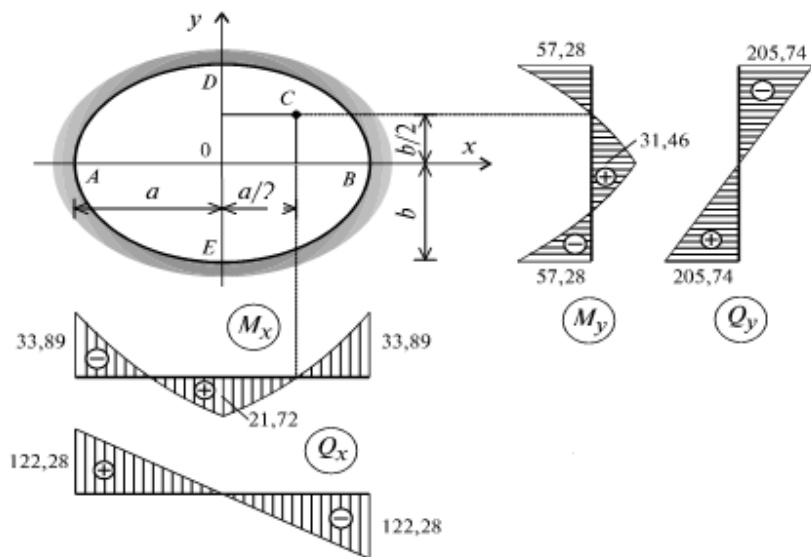


Рисунок 5

3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПЛАСТИН

Цилиндрическим изгибом называется такой изгиб пластин, когда срединная поверхность при изгибе принимает цилиндрическую форму. Такая форма поверхности получается, например, при изгибе длинной прямоугольной пластинки поперечной нагрузкой, не зависящей от координаты, в направлении длинной стороны пластинки.

Пусть мы имеем прямоугольную пластинку со сторонами a и b , причем $b \gg a$ (рис. 1). В этом случае на некотором удалении от коротких кромок под действием поперечной нагрузки срединная поверхность пластинки принимает форму, близкую к цилиндрической. Строго говоря, цилиндрическая форма срединной поверхности соответствует отношению $b/a = \infty$. Однако сравнительные расчеты, выполненные для пластинки с конечным отношением сторон b/a и для бесконечно длинной пластинки, показывают, что уже при отношении $b/a = 5$ величины максимальных изгибающих моментов и максимальных прогибов сравниваемых пластинок отличаются менее чем на 1/2%.

В случае цилиндрического изгиба пластинки напряжения, деформации и прогибы w зависят только от одной координаты x . Для исследования из длинной пластинки (см. рис. 1) можно выделить полосу шириной, равной 1, в средней зоне, перпендикулярно длинным кромкам и рассматривать изгиб этой балки-полоски с теми граничными условиями, которые имеют место на длинных сторонах пластины.

Если края пластины не закреплены и могут свободно смещаться при изгибе поперечной нагрузкой q , то уравнение изгиба балки-полоски можно получить из уравнения С. Жермен - Лагранжа

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q \quad (18)$$

Из курса сопротивления материалов известно уравнение

$$\text{изгиба балки в виде } EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M, \text{ или}$$

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q.$$

Сравнивая это выражение с (18), отмечаем, что для балки-полоски с шириной, равной 1, роль изгибной жесткости EI играет цилиндрическая жесткость $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$.

Здесь момент инерции сечения $I = 1 \cdot h^3/12$, а вместо модуля E стоит отношение $E/(1-\mu^2)$, так как полоска, выделенная из пластины, подвергающейся цилиндрическому изгибу, не может свободно деформироваться в боковом направлении ($\varepsilon_y = 0$) и, следовательно, $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E/(1-\mu^2)}$

Рассмотрим наиболее простой случай цилиндрического изгиба жесткой пластины, свободно опертой на длинных краях и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q .

Выполним последовательное интегрирование дифференциального уравнения (18) при условии $q = const$:

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{q}{D}(x + C_1),$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{q}{D} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right), \quad (19)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{q}{D} \left(\frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \right),$$

$$w = \frac{q}{D} \left(\frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \right). \quad (20)$$

Принимая во внимание заданные граничные условия при $x = 0$, $w(0) = 0$, $\frac{d^2 w(0)}{dx^2} = 0$ из уравнения (20) получаем $C_4 = 0$, а из уравнения (19) $C_2 = 0$.

Принимая во внимание заданные граничные условия при $x =$

$$a, w(a) = 0, \frac{d^2 w(a)}{dx^2} = 0$$

из уравнения (19) получаем:

$$0 = \frac{a^2}{2} + C_1 a, \quad C_1 = -\frac{a}{2},$$

а из уравнения (20):

$$0 = \frac{a^4}{24} - \frac{a}{2} \frac{a^3}{6} + C_3 a, \quad C_3 = \frac{a^3}{24}.$$

Окончательно уравнение для прогиба срединной поверхности будет иметь следующий вид:

$$w(x) = \frac{q}{D} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{a^3 x}{24} \right)$$

Зная уравнение прогиба, найдем величину максимальных значений прогиба $w_{\max}$ изгибающего момента $M_{\max}$, и напряжения $\sigma_{\max}$. Максимальные значения $w_{\max}$, $M_{\max}$, $\sigma_{\max}$ будут соответствовать среднему сечению балки-полоски, т.е. $x = a/2$:

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D}$$

$$M_{\max} = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=a/2} = \frac{qa^2}{8}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{6M_{\max}}{h^2} = \frac{3}{4} q \frac{a^2}{h^2}$$

В случае защемленных подвижных кромок граничные условия имеют вид

$$W = 0, \frac{dw}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, a$$

При этом произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 оказываются равными $C_1 = -a/2, C_2 = a^2/12, C_3 = C_4 = 0$.

Уравнение прогиба балки-полоски с защемленными кромками будет иметь вид:

$$w(x) = \frac{q}{D} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{a^2x^2}{24} \right)$$

Найдем величины изгибающих моментов и напряжений в заделке и середине балки-полоски:

$$M_{x=0} = -D \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)_{x=0} = -\frac{qa^2}{12}, \quad (\sigma_{\max})_{x=0} = \frac{qa^2}{2h^2},$$

$$M_{x=a/2} = -D \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)_{x=a/2} = \frac{qa^2}{24}, \quad (\sigma_{\max})_{x=a/2} = \frac{qa^2}{4h^2}.$$

В случае заделанных кромок максимальные изгибающие моменты и максимальные изгибные напряжения будут возникать в конечных сечениях балки-полоски. В среднем сечении напряжения и изгибающие моменты в два раза меньше, чем в заделке.

Максимальный прогиб пластины в середине пролета при $x = a/2$ равен

$$w_{\max} = \frac{1}{384} \frac{qa^4}{D}.$$

Пример 2

Построить эпюры моментов и прогибов для прямоугольной пластины, свободно опертой по двум сторонам. Длина, пролет и

Решение задачи в среде Mathcad

Исходные данные: модуль упругости и коэффициент

$$E := 2.7 \cdot 10^7 \quad \mu := 0.2$$

Пуассона.

Значение цилиндрической жесткости плиты:

$$D := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \rightarrow \frac{2.7e7 \cdot 0.12^3}{12 \cdot (0.2^2 - 1)} \quad D = 4050$$

Вычисление перемещений и прогибов:

$$x := 0, \frac{a}{4} \dots a \quad w(x) := \frac{q}{D} \cdot \left(\frac{x^4}{24} - \frac{a \cdot x^3}{12} + \frac{a^3 \cdot x}{24} \right) \rightarrow \frac{(-30) \cdot \left(\frac{x \cdot 4.4^3}{24} - \frac{x^3 \cdot 4.4}{12} + \frac{x^4}{24} \right)}{\left[\frac{2.7e7 \cdot 0.12^3}{12 \cdot (0.2^2 - 1)} \right]}$$

$$M(x) := \frac{q \cdot x}{2} \cdot (x - a) \rightarrow \frac{(-30) \cdot x \cdot (x - 4.4)}{2}$$

$$w(x) \cdot 10^3 =$$

0.000
-25.757
-36.151
-25.757
1.316·10 ⁻¹⁴

$$M(x) =$$

0.000
54.450
72.600
54.450
0.000

$$w\left(\frac{a}{2}\right) \cdot 10^3 \rightarrow \frac{1000 \cdot (-30) \cdot \left(\frac{2.2 \cdot 4.4^3}{24} - \frac{2.2^3 \cdot 4.4}{12} + \frac{2.2^4}{24} \right)}{\left[\frac{2.7e7 \cdot 0.12^3}{12 \cdot (0.2^2 - 1)} \right]} = -36.151$$

$$w\left(\frac{a}{4}\right) \cdot 10^3 \rightarrow \frac{1000 \cdot (-30) \cdot \left(\frac{1.1 \cdot 4.4^3}{24} - \frac{1.1^3 \cdot 4.4}{12} + \frac{1.1^4}{24} \right)}{\left[\frac{2.7e7 \cdot 0.12^3}{12 \cdot (0.2^2 - 1)} \right]} = -25.757$$

$$M\left(\frac{a}{2}\right) \rightarrow \frac{(-30) \cdot (2.2 - 4.4) \cdot 2.2}{2} = 72.6$$

$$M\left(\frac{a}{4}\right) \rightarrow \frac{(-30) \cdot (1.1 - 4.4) \cdot 1.1}{2} = 54.450$$

Построение эпюр:

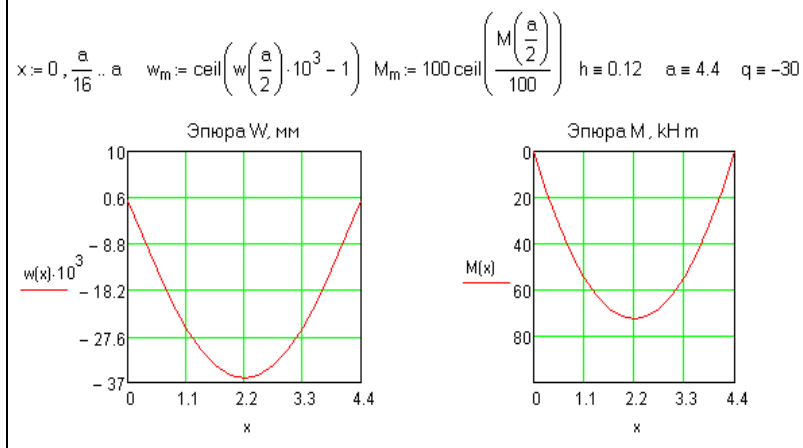


Рисунок 6

Решение задачи в среде Stark

Создаем новый документ. В меню выбираем **Проекты_создать**. В окне “Создать новую FE-модель” указываем тип проекта **“Рос-проект (Плита)”**, а в строке “имя файла” набрать на клавиатуре имя файла (не более 8 символов): **плита** (Рис.6)

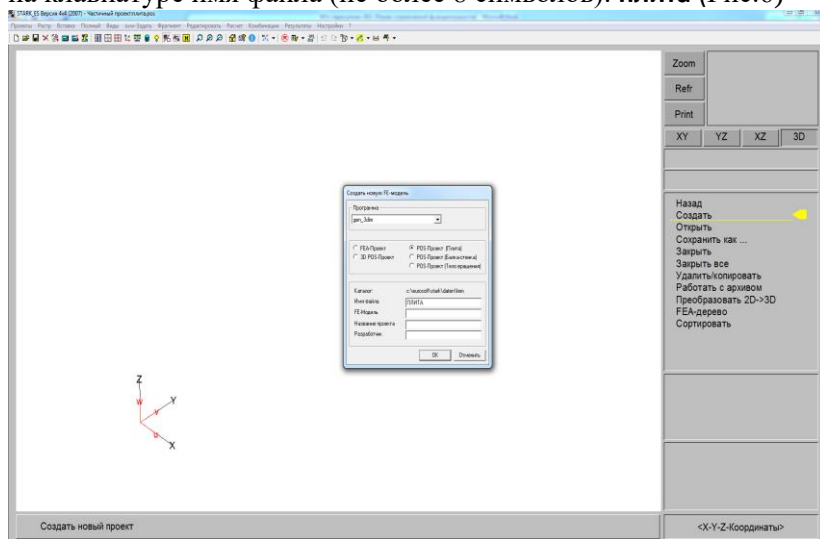


Рисунок 7

Создаем растровую сетку: Растр_создать.

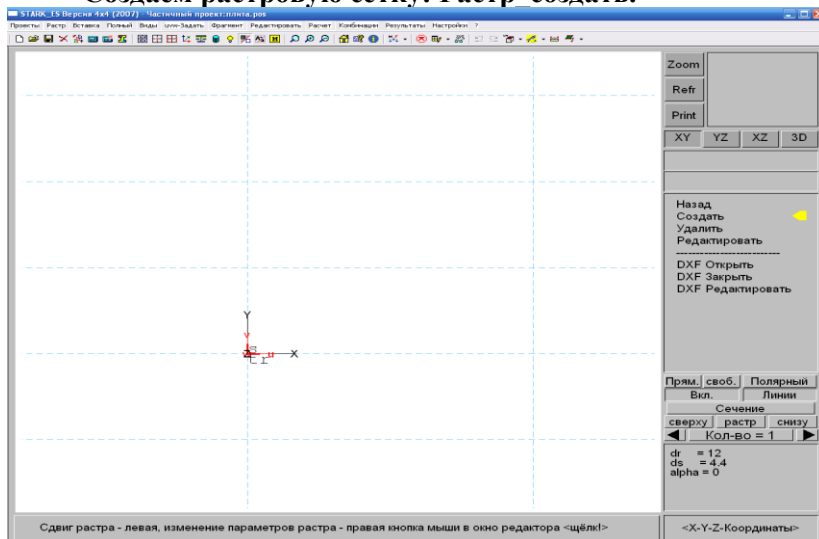


Рисунок 8

В окне выбора указываем **Прям.** (прямоугольный). Далее, щелкнув в окне выбора левой кнопкой мыши, последовательно задаем координаты трех точек, определяющих плоскость растра:

$x=0, y=0, z=0;$

$x=1, y=0, z=0;$

$x=0, y=1, z=0.$

А ячейку растра назначаем равной размерам плиты:

dr=12, ds=4.4. alpha=0 (линии растра параллельны осям).

Затем, в области графических функций нажимаем на кнопку “XY” (рис.7).

Вводим позицию плита:

Редактировать_позиции_плита_установить.

Далее в окне выбора указываем на кнопку: характеристики, а в окне свойства плиты вводим исходные данные:

h=0.12, E=27000000, Rho=0 Коэффициент Пуассона=0.2.

В закладке нагрузки обнуляем величины g и p.

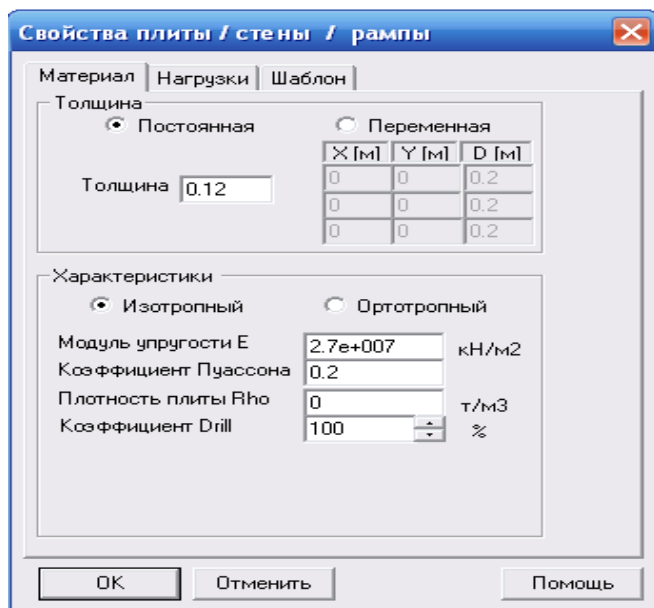


Рисунок 9

Затем обводим курсором ячейку раstra по контуру и замыкаем в начальной точке, после чего сохраняем задачу: **Проекты_сохранить как** (плита.pos).

Геометрию плиты всегда можно подкорректировать:

Редактировать_позиция_свойства и в окне “позиции” перейдем на вкладку “Геометрия”:

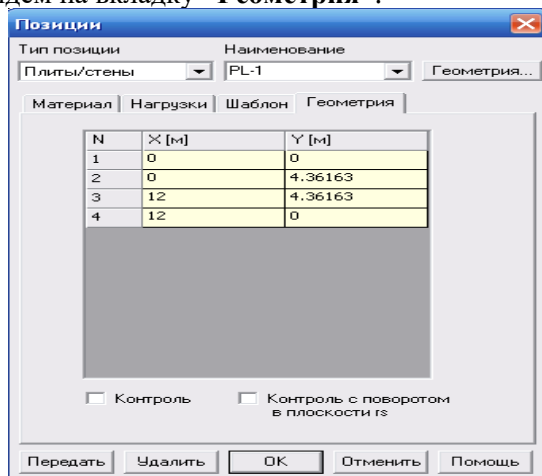


Рисунок 10

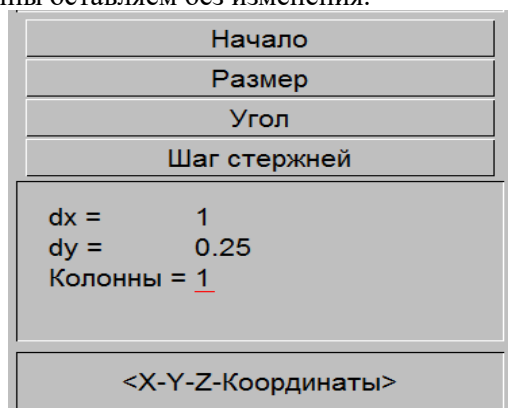
в столбце “Y” откорректируем координаты точек “3” и “4” (Y_4.4) и сохраним задачу: **Проекты_сохранить как**

Автоматическая генерация сетки

В верхнем меню последовательно выбираем: **Полный_вставка** (если в графическом окне нет каталога проектов, показываем его кнопкой F5).

Далее в верхнем меню указываем **Слияние_По шаблону_Отметить все ЧП**, после чего в меню справа выбираем **Параметры КЭ-сетки**, а в окне выбора - **размер**.

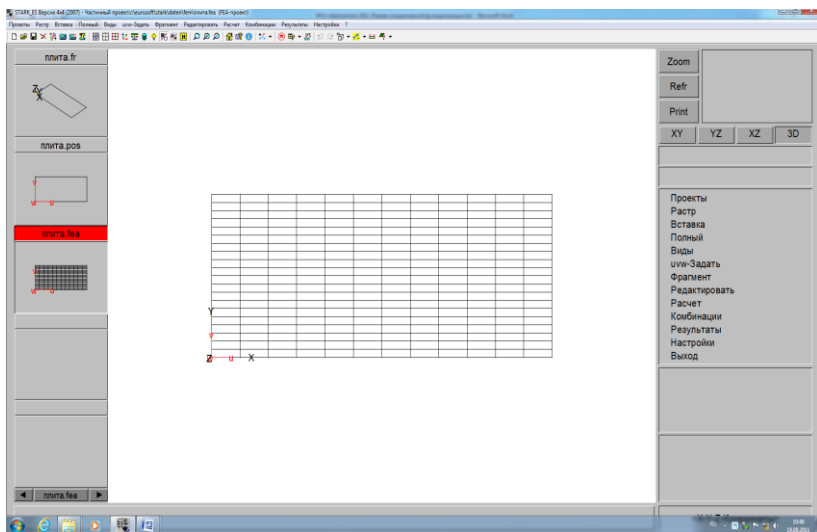
Затем в окне редактирования меняем: **dx=1, dy=0.25** (признак колонны оставляем без изменения).



Начало
Размер
Угол
Шаг стержней
dx = 1 dy = 0.25 Колонны = <u>1</u>
<X-Y-Z-Координаты>

Рисунок 11

В меню справа нажимаем **Генерация КЭ-сетки** и сохраняем задачу под именем “плита” в виде конечно-элементного файла “плита.feа” (удобно, когда имена для всех файлов одной задачи совпадают)

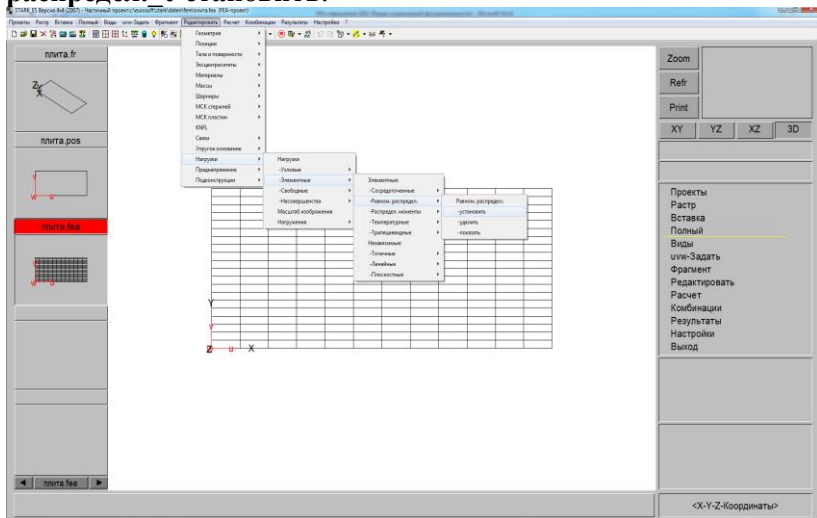


Ввод нагрузок

Для конечно-элементной задачи вводим равномерно-распределенную нагрузку интенсивностью 30 кН/м².

Редактировать нагрузки Элементные Равном.

распредел. Установить:



В окне выбора укажем вид и направление нагрузки: **Qz/t**;
тип системы координат: **ГСК** (глобальная система координат);
Стрелкой установим: **Нагружение 1**. А в окне редактирования
установим: **Qz=-30** (Знак – указывает на направление действия
нагрузки-против оси “z”).

Затем меняем форму указателя на “**Box**” и окружаем плиту
зеленым прямоугольником

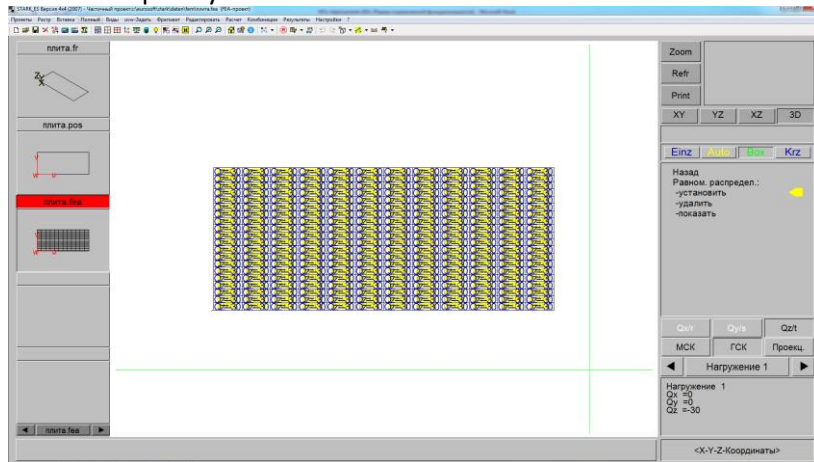


Рисунок 14

Установка связей

Поскольку плита свободно опирается по длинным сторонам,
выполним: **Редактировать_связи_опорные**
закрепления_установить

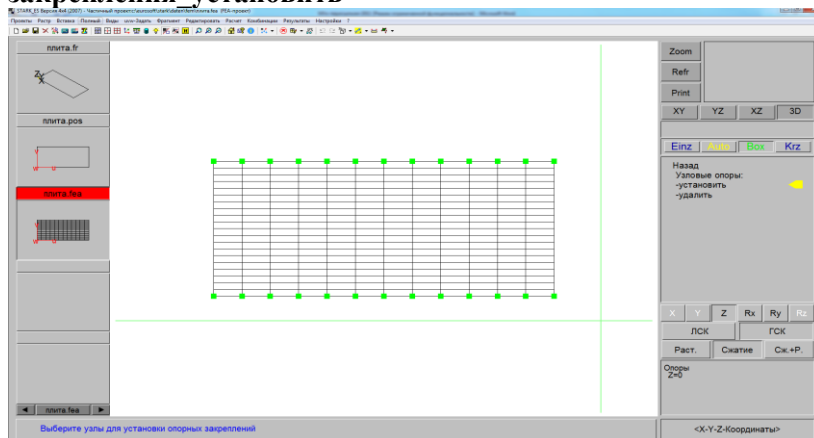


Рисунок 15

В окне выбора должны быть активными: кнопки “Z”, “ГСК”, а в окне редактирования $Z=0$. Затем при активном указателе типа “Box” окружаем зелеными прямоугольниками крайние узлы по длинным сторонам плиты (Рис.15).

Расчет

Сохраняем задачу и отправляем ее на счет: **Расчет_Общий**.

Если расчетная схема верна, в строке задач появляется значек редактора **V**, после щелчка по которому появляется окно протокола расчета:

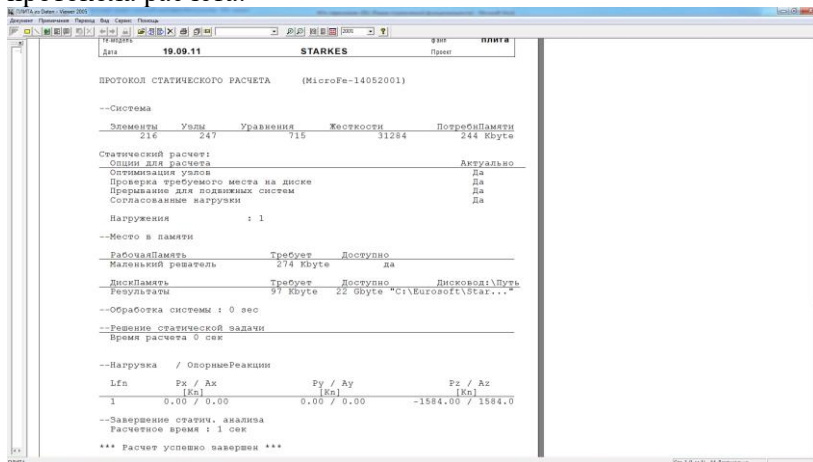


Рисунок 16

Достаточно загрузить только **FEA** проект:

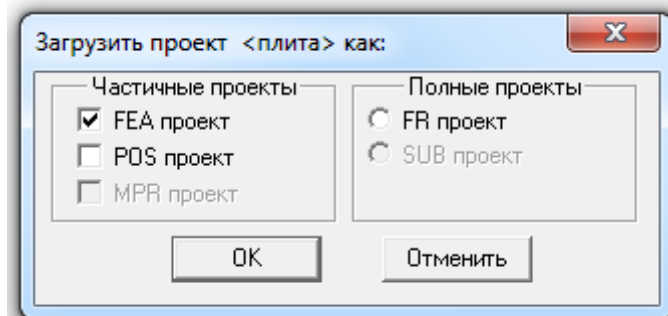


Рисунок 17

Анализ результатов расчета

Для просмотра результатов в графическом виде нажимаем:

Результаты_Графика и выбираем сначала строку **в пластинах**:

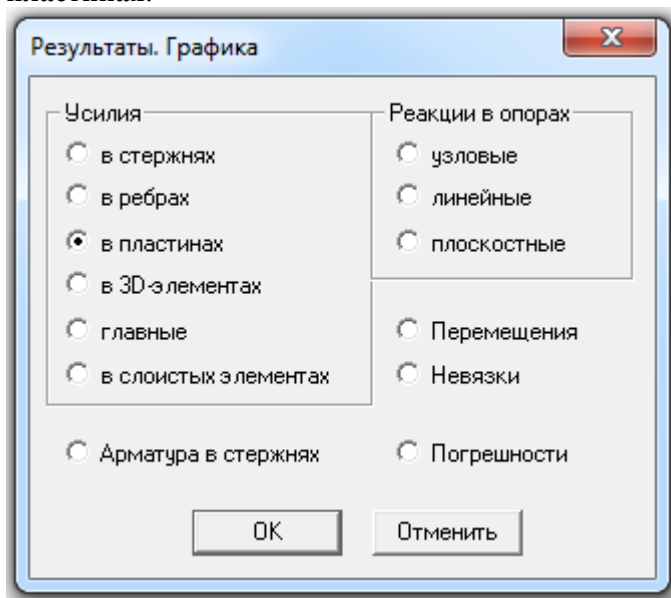


Рисунок 18

В окне выбора указываем вид силового фактора **My** и активизируем кнопку **S**. Далее на плане плиты мышью проводим сечение по оси симметрии плиты вдоль короткой стороны:

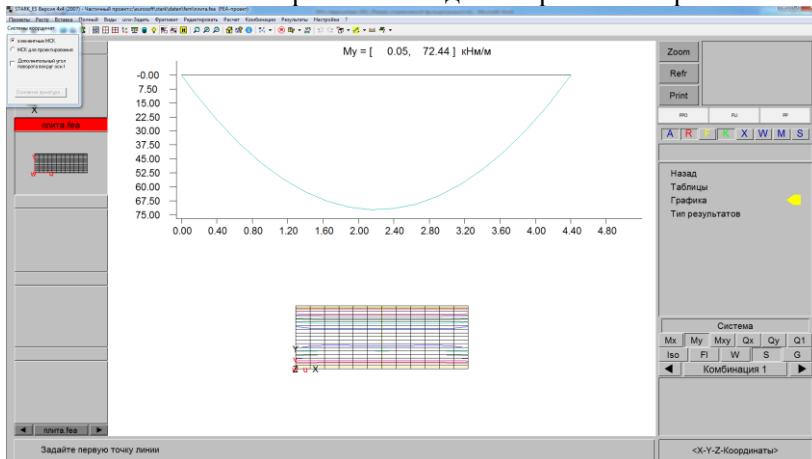


Рисунок 19

Для получения эпюры прогибов в окне **Результаты_Графика** выбираем строку **Перемещения**, а в окне выбора кнопку **S**

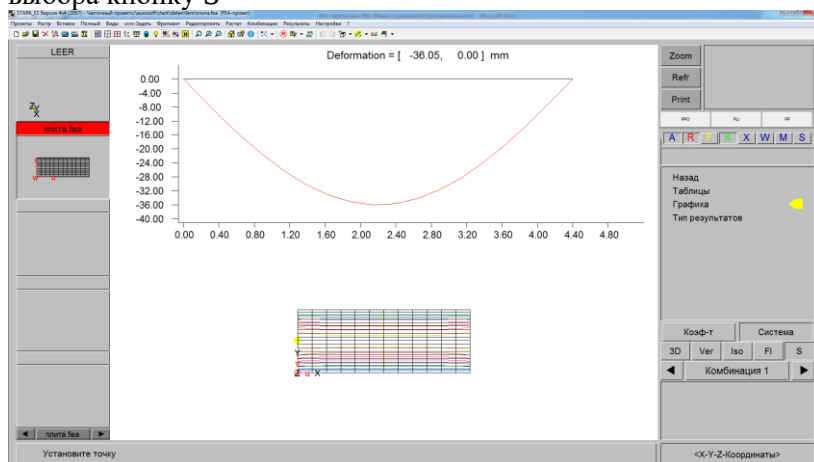


Рисунок 20

Теперь сравниваем полученные результаты с теми, которые были получены нами в рамках аналитического расчета в среде Mathcad. Убеждаемся в том, что расхождения в результатах значительно меньше 5 процентов.

4. Расчет сферической оболочки вращения

Для расчета применим безмоментную мембранную теорию тонких оболочек. При этом будем предполагать, что оболочка имеет плавно изменяющуюся непрерывную поверхность. Постоянная нагрузка интенсивностью q приложена на наружную поверхность оболочки.

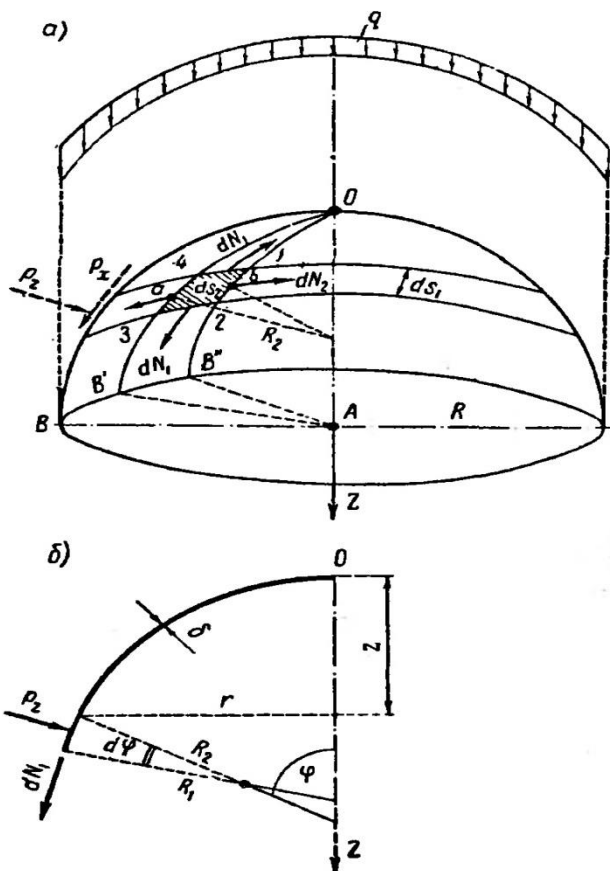


Рисунок 21

Геометрия оболочки вращения (рис. 21) характеризуется следующими величинами: R - радиус основной оболочки; $r(t)$ - радиус горизонтального сечения оболочки на расстоянии z от ее вершины; R_1 - радиус кривизны оболочки по меридианному направлению; R_2 - радиус кривизны дуги ab длиной ds_2 .

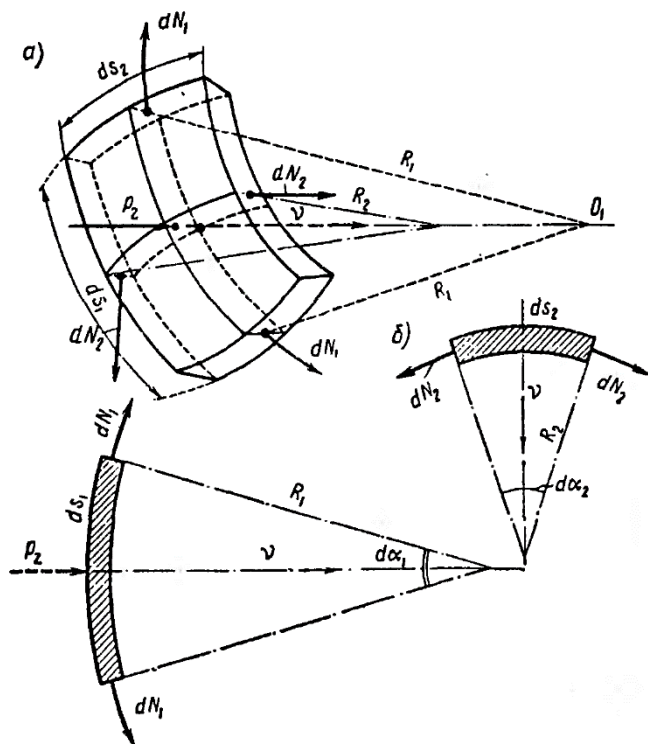


Рисунок 22

Как это следует из рис. 21, *a*, имеем

$$R_2 = \frac{r}{\sin \varphi}, \quad (21)$$

где φ - угол между радиусом R_2 и осью z

Обозначая меридианное и окружное погонное усилия соответственно dN_i ($i = 1, 2$), действующих на отрезок ds_2 и ds_1 , можем записать

$$dN_1 = N_1 ds_2; \quad dN_2 = N_2 ds_1, \quad (22)$$

где N_1 и N_2 - соответственно погонные меридианное и окружное нормальные усилия.

Составляя сумму проекций всех усилий, действующих на

выделенный малый элемент (рис. 22, *a*) по направлению ее нормали v получим

$$q_z ds_1 ds_2 + dN_1 \frac{ds_1}{R_1} + dN_2 \frac{ds_2}{R_2} = 0. \quad (23)$$

С учетом соотношения (7.53) и (7.54) из (7.55), получим

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = -q_z = q \cos \varphi. \quad (24)$$

Для определения второго необходимого уравнения проведем горизонтальное сечение оболочки вращения радиусом r (рис. 22, *б*) и спроектируем все силы, действующие на верхнюю отсеченную часть, на вертикальную ось Z :

$$N_1 = -\frac{qF}{2\pi r \sin \varphi}. \quad (25)$$

Здесь F - площадь поверхности выделенной части оболочки.

Подставляя (25) в (24), определим:

$$N_2 = (F - \pi R_1 r \sin 2\varphi) \frac{R_2 q}{2\pi R_1 r \sin \varphi}. \quad (26)$$

Пример 3

Расчет симметричной оболочки вращения

Определить эпюры усилия N_1 и N_2 для сферического купола (рис. 23,а) при действии вертикальной равномерно распределенной нагрузки по ее поверхности интенсивностью q , принимая радиус сферы, равный R (рис. 23, б).

Решение

Учитывая, что для сферы $R_1 = R_2 = R$ определим площадь поверхности отсеченной горизонтальной плоскости $n-n$ части купола

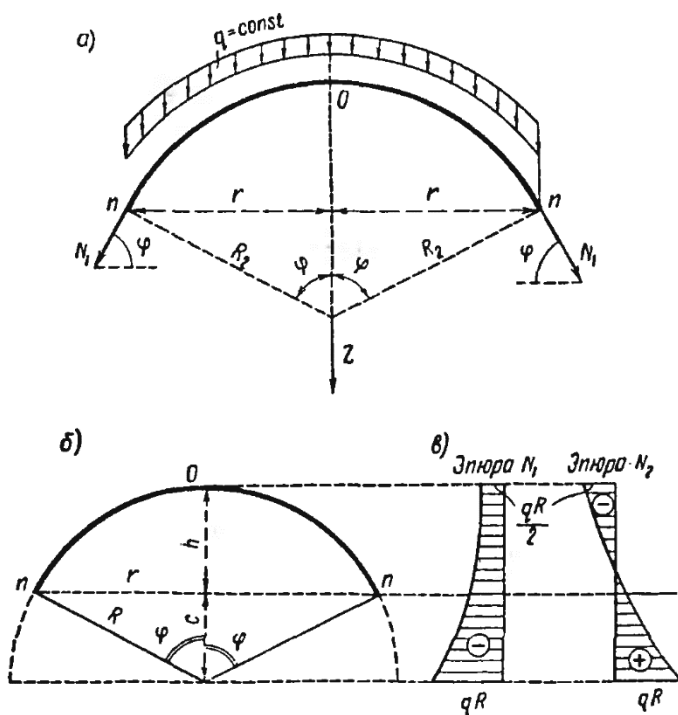


Рисунок 23

$$F = 2\pi R h = 2\pi R^2 (1 - \cos \varphi).$$

Меридианное усилие определяется по выражению (7.57)

$$N_1 = -\frac{2\pi R^2 (1 - \cos \varphi)}{2\pi r \sin \varphi} q = -\frac{qR}{1 + \cos \varphi}.$$

Усилия по окружному направлению определяются по формуле (26)

$$N_2 = -qR \left(\cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right).$$

В вершине купола, где $\varphi = 0$ имеем $N_1 = N_2 = -qR/2$.

На рис. 23, в изображены эпюры N_1 и N_2 по высоте купола

5. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саргсян А.Е., Демченко А.Т., Дворянчиков Н.В., Джинчвелашвили Г.А. Строительная механика, Основы теории с примерами расчетов/Под. ред. А.Е. Саргсяна. – М.:Высш. шк., 2000.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности: Учебное пособие для студентов вузов.- М.:Высш. шк., 1982.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ

Задание на расчетно-графическую работу

Вывести дифференциальное уравнение изгиба плиты.

Выполнить расчет прямоугольной плиты, опертой по длинным кромкам аналитически и с использованием программы STARK.

Длину плиты принять $l = 12$ м., модуль деформаций $E = 2.7 \cdot 10^7$ кН/м², коэффициент Пуассона $\mu = 0.2$, равномерно-распределенная нагрузка $q=30$ кН/м².

По результатам аналитического расчета построить эпюры моментов и прогибов для пяти сечений в средней зоне плиты при $x = 0, 0.25a, 0.5a, 0.75a, a$.

На тех же эпюрах показать результаты, полученные численным способом по программе STARK.

Ширину и толщину поперечного сечения плиты выбрать по варианту из таблицы.

Первая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7
h (м)	0.2	0.24	0.28	0.3	0.32	0.34	0.36
a (м)	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
Вторая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7

Оглавление

1. Основные понятия.....	3
2. Изгиб пластин.....	5
3. Цилиндрический изгиб пластин.....	13
4. Расчет сферической оболочки вращения.....	27
5. Список использованной литературы.....	31
6. Приложение.....	32

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по дисциплине
«Теория расчета пластин и оболочек»

Составители:
Пересыпкин Сергей Евгеньевич

Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$

Типография Кубанского государственного аграрного университета.
350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13