

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	2
Глава 1. Задачи по теории фильтрации.....	3
§1. Основные понятия теории фильтрации.....	3
§2. Линейный закон фильтрации Дарси. Коэффициенты проницаемости и фильтрации	6
§3. Пределы применимости закона Дарси. Критерий Рейнольдса.....	12
§4. Нелинейные законы фильтрации.....	14
§5. Прямолинейно-параллельное движение несжимаемой жидкости. Приток к дренажной галерее	18
§6. Плоско-радиальное напорное движение несжимаемой жидкости. Приток к совершенной скважине. Формула Дюпюи.....	19
§7. Связь плоской задачи и теории функций комплексного переменного ...	24
§8. Установившееся безнапорное движение жидкости в пористой среде. ...	29
Безнапорное движение жидкости к прямолинейной галерее	29
§ 9. Установившееся безнапорное движение жидкости к скважине	31
Глава 2. Задачи по теории гидродинамической устойчивости.....	37
§1. Уравнения и краевые условия. Волновые решения	37
§2. Бифуркации и неустойчивость стационарных течений	43

Предисловие

В учебном пособии представлены задачи по теории фильтрации и гидродинамической устойчивости. Типовые задачи сопровождаются пояснениями. Решение задач будет способствовать лучшему усвоению теории, приобретению практических навыков, умению делать математические выкладки и формулировать постановки прикладных задач.

Учебное пособие разделено на две главы и параграфы. Нумерация параграфов, задач, формул и рисунков самостоятельная в каждой главе. Порядковый номер формул в задачах самостоятельный и дается римской цифрой. В начале каждого параграфа дается краткая теория. Типовые и наиболее сложные задачи даны с решениями. Рассматриваемые типовые примеры иллюстрируют методику решения данного класса задач.

Рекомендации:

- Ознакомиться со вступительной теоретической частью изучаемого раздела.
- Внимательно проследить за последовательностью действий при решении примеров. Логика последовательности должна быть понятна и усвоена.

Глава 1. Задачи по теории фильтрации

§1. Основные понятия теории фильтрации

Фильтрация жидкости по сравнению с движением жидкости в трубах и каналах имеет свои специфические особенности. Фильтрация характеризуется чрезвычайно малыми поперечными размерами поровых каналов, очень малыми скоростями движения жидкостей; силы трения при движении жидкости в пористой среде очень велики, так как площади соприкосновения жидкости с твердыми частицами огромны.

Пористая среда характеризуется коэффициентами пористости и просветности. Коэффициент пористости m есть отношение объема пор $\tau_{пор}$ ко всему объему пористой среды (τ)

$$m = \frac{\tau_{пор}}{\tau}. \quad (1)$$

Коэффициентом просветности n называется отношение площади просветов ($\omega_{просв}$) в данном сечении пористой среды ко всей площади этого сечения (ω):

$$n = \frac{\omega_{просв}}{\omega}. \quad (2)$$

Упрощенной моделью пористой среды является модель фиктивного грунта, рассмотренная в конце прошлого века Ч. Сликтером. Фиктивный грунт состоит из шариков одного диаметра, определенным образом уложенных. Основным элементом (основной ячейкой) фиктивного грунта является ромбоэдр, который получится, если принять центры восьми соприкасающихся частиц за вершины углов ромбоэдра (рис. 1). В зависимости от острого угла θ боковой грани ромбоэдра укладка шаров является более или менее плотной.

Угол θ заключен в пределах $60^\circ < \theta < 90^\circ$. Угол $\theta = 60^\circ$ соответствует наиболее плотной укладке шаров, угол $\theta = 90^\circ$ - наиболее свободной. Пористость фиктивного грунта определяется по формуле Ч. Сликтера

$$m = 1 - \frac{\pi}{6(1 - \cos\theta)\sqrt{1 + \cos\theta}}, \quad (3)$$

из которой следует, что пористость не зависит от диаметра частиц, а лишь от их взаимного расположения, которое определяется углом θ .

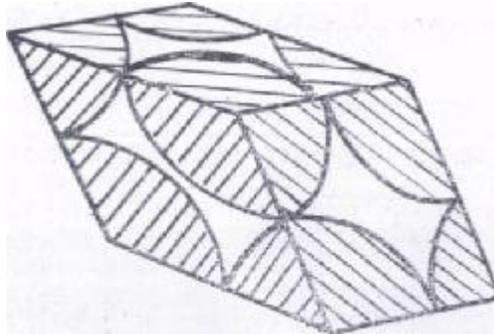


Рис. 1.

Чтобы формулы, полученные для фиктивного грунта, применить для естественного грунта, нужно заменить реальный грунт эквивалентным ему фиктивным, причем этот эквивалентный фиктивный грунт должен иметь такое же гидравлическое сопротивление, как и гидравлическое сопротивление естественного грунта. Диаметр частиц такого фиктивного грунта называется эффективным диаметром ($d_э$).

Эффективный диаметр определяется в результате механического анализа грунта. Его просеивают через набор сит с различной площадью отверстий и таким образом разделяют на фракции. Пусть диаметры частиц первой фракции находятся в интервале от 0 до d_1 , второй фракции - от d_1 до d_2 , третьей - от d_2 до d_3 и т. д., вес фракций (в % от общего веса) составляет, соответственно Δg_1 , Δg_2 , Δg_3 и т. д.

За средний диаметр каждой фракции принимают среднее арифметическое от крайних диаметров, т. е.

$$d_1' = \frac{0 + d_1}{2}, \quad d_2' = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

и т. д. Строят кривую механического (фракционного) состава грунта, откладывая по оси абсцисс средние диаметры фракций d_i' , а по оси ординат — сумму весов фракций $\Delta g_1 + \Delta g_2 + \dots + \Delta g_i$.

Последняя точка кривой имеет абсциссу, равную d_n' и ординату $\Delta g_1 + \Delta g_2 + \dots + \Delta g_n = 100\%$ (рис. 2).

Существует много способов определения эффективного диаметра. По способу А. Газена $d_э$ определяется по кривой механического состава. За эффективный диаметр принимается такой диаметр шарообразной частицы, который соответствует сумме весов всех фракций, начиная от нуля и

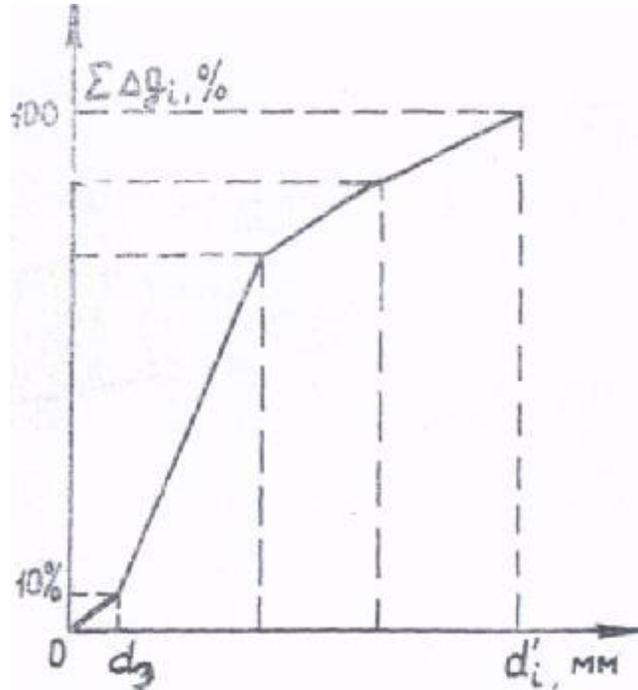


Рис. 2.

кончая этим диаметром, равной 10%. Надо найти, кроме того, диаметр d_3 , который соответствует сумме весов, равной 60%. Коэффициент однородности $\frac{d_0}{d_3}$ должен быть не более 5 ($\frac{d_0}{d_3} \leq 5$) и d_3 должен лежать в пределах $0.1 \text{ мм} \leq d_3 \leq 3 \text{ мм}$.

В способе Крюгера-Цункера d_3 находится по формуле

$$\frac{100}{d_3} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta g_i}{d_i}. \quad (4)$$

Скоростью фильтрации W называется отношение объемного расхода жидкости к площади поперечного сечения пласта, нормального к направлению движения жидкости (W)

$$W = \frac{Q}{\omega}. \quad (5)$$

Скорость фильтрации представляет собой фиктивную скорость, с которой двигалась бы жидкость, если бы пористая среда отсутствовала ($m=1$).

Введение скорости фильтрации позволяет рассматривать пласт как непрерывное поле скоростей фильтрации и давлений, величина которых в каж-

дой точке пласта является функцией координат точки и времени. Это дает возможность использовать математический аппарат непрерывных функций при решении задач фильтрации.

Средняя скорость движения жидкости V равна отношению объемного расхода к площади просветов $\omega_{\text{просв}}$ (живому сечению потока)

$$V = \frac{Q}{\omega_{\text{просв}}}. \quad (6)$$

Связь между скоростью фильтрации и средней скоростью движения имеет вид

$$V = \frac{W}{m}. \quad (7)$$

§2. Линейный закон фильтрации Дарси. Коэффициенты проницаемости и фильтрации

Закон фильтрации Дарси устанавливает линейную зависимость между объемным расходом несжимаемой жидкости и потерей напора и имеет вид

$$Q = c \frac{H_1 - H_2}{l} \omega, \quad (8)$$

где $H_1 = z_1 + \frac{P_1}{\gamma}$ и $H_2 = z_2 + \frac{P_2}{\gamma}$ - полные напоры в начальном и конечном сечениях образца пористой среды (или пласта), l - длина образца, ω - площадь поперечного сечения (рис. 3), c - коэффициент фильтрации, зависящий как от свойств пористой среды, так и от свойств фильтрующейся жидкости.

Учитывая, что $\frac{H_1 - H_2}{l} = i$ - гидравлический уклон, формулу (8) можно записать так:

$$Q = ci\omega, \quad (9)$$

деля обе части последнего равенства на ω , получим

$$W = ci. \quad (10)$$

Фильтрующие свойства пористой среды, т. е. ее способность пропускать сквозь себя жидкости и газы, называется проницаемостью. Это свойство характеризуется коэффициентом проницаемости k . В отличие от коэффициента фильтрации c коэффициент проницаемости k зависит только от свойств пористой среды.

При решении задач нефтяной подземной гидравлики более удобно записывать закон Дарси через коэффициент проницаемости

$$Q = \frac{k}{\mu} \frac{p_1^* - p_2^*}{l} w = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p^*}{l} w, \quad (11)$$

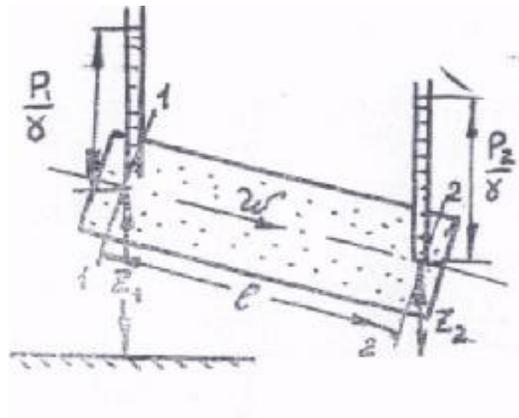


Рис. 3.

или

$$W = \frac{k}{\mu} \frac{p_1^* - p_2^*}{l} = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p^*}{l} \quad (12)$$

где $p_1^* = \gamma z_1 + p_1$, $p_2^* = \gamma z_2 + p_2$ давления, приведенные к плоскости отсчета геометрических высот.

Коэффициенты проницаемости и фильтрации связаны соотношением

$$\frac{k}{\mu} = \frac{c}{\gamma}. \quad (13)$$

Коэффициент проницаемости имеет размерность площади, а коэффициент фильтрации - размерность скорости.

В подземной гидравлике при решении задач часто пользуются смешанной системой единиц измерения, в которой объемный расход Q выражается в $\frac{см^3}{сек}$, разность приведенных давлений Δp^* - в $\frac{кг}{см^2}$, динамический коэффициент вязкости μ - в сантипуазах ($сн$), длина образца или пласта l - в $см$, площадь ω - в $см^2$, удельный вес γ - в $\frac{кг}{см^3}$, а коэффициент проницаемости k в дарси (∂), $1\partial = 1.02 * 10^{-8} см^2 = 1.02 * 10^{-12} м^2$.

Задача 1

Определить пористость ячейки фиктивного грунта по Слихтеру в случае, когда угол грани ромбоэдра $\theta = 90^\circ$ (рис. 4).

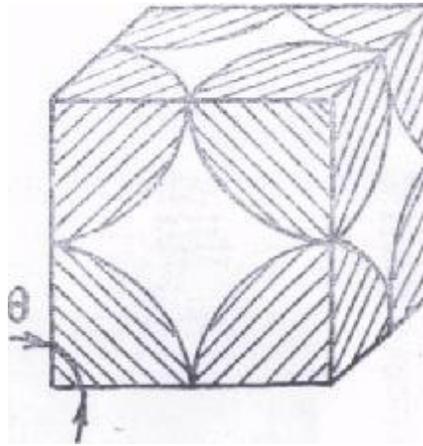


Рис. 4.

Решение:

При заданной укладке частиц фиктивного грунта, объем скелета пористой среды в пределах выделенного элемента равен объему одной частицы

$$\tau_v = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6}, \text{ а объём ячейки } \tau_{обр} = d^3.$$

Поэтому пористость фиктивного грунта по Слихтеру при $\theta = 90^\circ$ будет

$$m = \frac{\tau_{пор}}{\tau_{обр}} = 1 - \frac{\pi d^3}{6d^3} = 1 - \frac{\pi}{6} = 0.476 = 47.6\%.$$

Задача 2

Показать, что пористость m и просветность n фиктивного грунта не зависят от диаметра частиц, слагающих грунт. Рассмотреть случай, когда угол грани ромбоэдра $\theta = 90^\circ$.

Решение:

Рассмотрим основную ячейку фиктивного грунта по Сликтеру. Пористость этого элемента

$$m = \frac{\tau_{пор}}{\tau_{обр}} = \frac{d^3 - \frac{\pi d^3}{6}}{d^3} = 1 - \frac{\pi}{6},$$

откуда следует, что пористость m не зависит от диаметра. Аналогично для просветности

$$n = \frac{\omega_{просв}}{\omega} = \frac{d^2 - \frac{\pi d^2}{4}}{d^2} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Задача 3

Определить величину удельной поверхности песка (поверхности песчинок, заключенных в 1 м^3 песчаного пласта), пористость которого $m = 25\%$ и эффективный диаметр песчинок $d_{\text{э}} = 0.2 \text{ мм}$. Найти также число частиц в единице объема пласта, принимая их форму сферической.

Ответ:

$$S_{\text{уд}} = \frac{6(1-m)}{d} = 2.25 \cdot 10^4 \frac{\text{м}^2}{\text{м}^3},$$

$$N = \frac{6(1-m)}{\pi d^3} = 1.79 \cdot 10^{11}.$$

Задача 4

Определить эффективный диаметр песчинок $d_{\text{э}}$ по способу Крюгера-Цункера для песка следующего механического состава:

Диаметр частиц, мм	0-0,05	0,05-0,1	0,1-0,2	0,2— 0,3	0,3-0,5	0.5-1,0
% веса, Δg_i	6,9	38,6	44,2	6,3	3,3	0.7

Решение:

По способу Крюгера-Цункера эффективный диаметр определяется из формулы

$$\frac{100}{d_{\text{э}}} = \sum \frac{\Delta g_i}{d_i},$$

где d_i — средний диаметр частиц i -той фракции, равный полусумме крайних диаметров этой фракции

$$d_i = \frac{d_i' + d_i''}{2}.$$

Найдем d_i

$$d_1 = \frac{0 + 0.05}{2} = 0.025 \text{ мм},$$

$$d_2 = \frac{0.05 + 0.1}{2} = 0.075 \text{ мм},$$

$$d_3 = \frac{0.1 + 0.2}{2} = 0.15 \text{ мм},$$

$$d_4 = \frac{0.2 + 0.3}{2} = 0.25 \text{ мм},$$

$$\frac{100}{d_{\text{э}}} = \frac{6.9}{0.025} + \frac{38.6}{0.075} + \frac{44.2}{0.15} + \frac{6.3}{0.25} + \frac{3.3}{0.4} + \frac{0.7}{0.75} = 1120,$$

$$d_{\text{э}} = \frac{100}{1120} = 0.09 \text{ мм}.$$

Задача 5

Построить кривую механического состава грунта и определить эффективный диаметр грунта по способу Газена, используя следующие данные

Диаметр частиц, мм	0-0,05	0,05-0,1	0,1-0,2	0,2- 0,3	0,3-0,5	0,5-1,0
% веса Δg_i	1,5	5,3	7,2	40,1	35,7	10,2

Ответ: $d_3 = 0.11 \text{ мм}$.

Задача 6

Определить величину коэффициента проницаемости пористой среды (в дарси), если известно, что коэффициент фильтрации $c = 0.3 \cdot 10^{-4} \text{ см/сек}$, а кинематический коэффициент вязкости фильтрующейся жидкости $\nu = 1 \text{ см}^2/\text{сек}$. Фильтрация жидкости происходит по закону Дарси.

Ответ: $k = 0.03 \text{ д}$.

Задача 7

Определить коэффициент фильтрации, если известно, что площадь поперечного сечения образца песчаника $F = 30 \text{ см}^2$, длина образца $l = 15 \text{ см}$, разность давлений на входе жидкости в образец и на выходе $\Delta p = 0.2 \text{ ат}$, удельный вес жидкости $\gamma = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, и расход равен $5 \frac{\text{л}}{\text{час}}$.

Ответ: $c = 3.47 \cdot 10^{-3} \frac{\text{см}}{\text{сек}}$.

Задача 8

Определить скорость фильтрации у входа жидкости в гидродинамически несовершенную по степени вскрытия скважину, если мощность пласта $h = 25 \text{ м}$, относительное вскрытие пласта $\bar{h} = 0.6$, радиус скважины $r_c = 0.1 \text{ м}$, дебит жидкости $Q = 250 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$.

Ответ: $W = 0.0308 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$.

Задача 9

Определить коэффициенты проницаемости и фильтрации для цилиндрического образца пористой среды диаметром $d = 5 \text{ см}$, длиной $l = 20 \text{ см}$, если разность давлений на концах образца составляет 300 мм рт.ст. , расход жид-

кости $Q = 1.70 \frac{\text{л}}{\text{час}}$, вязкость жидкости $\mu = 5 \text{ сП}$, плотность ее $\rho = 0.85 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Найдите также скорость фильтрации.

Ответ: $k = 5.9 \text{ д}$, $c = 10^{-3} \frac{\text{см}}{\text{сек}}$, $W = 0.024 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$.

§3. Пределы применимости закона Дарси. Критерий Рейнольдса

Подобно тому, как в трубной гидравлике критерием режима движения служит число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{V d \rho}{\mu}, \quad (14)$$

в теории фильтрации в качестве критерия существования линейного закона фильтрации Дарси вводится безразмерный параметр

$$\text{Re} = \frac{u a \rho}{\mu}, \quad (15)$$

где

u - некоторая характерная скорость;

a - линейный параметр, который характеризует средний размер сечения поровых каналов;

ρ - плотность жидкости;

μ - динамический коэффициент вязкости.

В трубной гидравлике значение $\text{Re}_{кр}$, при котором происходит смена режимов, равно $\text{Re}_{кр} = 2320$, в теории фильтрации закон Дарси имеет место при значении безразмерного параметра Re , меньшего критического ($\text{Re}_{кр}$), которое устанавливается из опыта.

Впервые число Рейнольдса для фильтрации жидкости было введено Н. Н. Павловским в виде

$$\text{Re} = \frac{W d_0 \rho}{(0.75m + 0.23)\mu}, \quad (16)$$

т. е. за характерную скорость была взята скорость фильтрации W , а линейный параметр представлен выражением

$$a = \frac{d_{\text{э}}}{0.75m + 0.23}. \quad (17)$$

Критические значения числа Re по Павловскому заключены в интервале $Re_{кр} = 7.5 \div 9$. а критические значения лежат в интервале

В. Н. Щелкачев предложил взять за линейный параметр выражение, пропорциональное корню квадратному из коэффициента проницаемости

$$a = 10\sqrt{k}m^{-2.3}. \quad (18)$$

Число Рейнольдса по Щелкачеву имеет вид

$$Re = \frac{10W\sqrt{k}\rho}{m^{2.3}\mu}, \quad (19)$$

а критические значения лежат в интервале $1 \leq Re_{кр} \leq 12$.

По М. Д. Миллионщикову за характерную скорость взята средняя скорость движения жидкости

$$V = \frac{W}{m},$$

а за линейный параметр - выражение $\sqrt{\frac{k}{m}}$, т. е.

$$Re = \frac{v\sqrt{\frac{k}{m}}\rho}{\mu} = \frac{W\sqrt{k}\rho}{m^{1.5}\mu}, \quad (20)$$

$$0.022 \leq Re_{кр} \leq 0.29.$$

Если вычисленное по одной из формул (16), (19), (20) значение числа Re оказывается меньше нижнего критического значения $Re_{кр}$, то закон Дарси справедлив, если Re больше верхнего значения $Re_{кр}$, то закон Дарси заведомо нарушен.

Скорость фильтрации, при которой нарушается закон Дарси, называется критической скоростью фильтрации ($W_{кр}$). Однако, нарушение линейного закона фильтрации еще не означает перехода от ламинарного движения к

турбулентному. Закон Дарси нарушается вследствие того, что силы инерции, возникающие в жидкости за счет извилистости каналов и изменения площади их поперечных сечений, становятся при $W > W_{кр}$ соизмеримыми с силами трения.

Определение режима фильтрации жидкостей и газов имеет большое практическое значение, ибо без знания закона фильтрации в пласте нельзя рассчитать дебиты скважин, распределение давления в пласте, а также невозможно определение параметров пласта (k , h , m и др.) по данным исследования нефтяных и газовых скважин.

§4. Нелинейные законы фильтрации

При нарушении закона Дарси зависимость между скоростью фильтрации W и градиентом давления $\frac{dp}{ds}$ лучше всего описывается двучленной формулой

$$-\frac{dp}{ds} = aW + bW^2, \quad (21)$$

которая выражает плавный переход от линейного закона фильтрации к нелинейному. При малых значениях скорости $aW \gg bW^2$, вторым членом можно пренебречь и получим закон Дарси; при значениях $W \geq W_{кр}$ слагаемые aW и bW^2 имеют один и тот же порядок; при больших скоростях фильтрации $aW \ll bW^2$ и можно принять

$$-\frac{dp}{ds} = bW^2, \quad (22)$$

что соответствует квадратичному закону сопротивления и имеет место в крупнозернистых и трещиноватых породах. Формула (22) называется формулой А.А. Краснопольского.

Коэффициенты a и b определяются либо экспериментально, либо a по формуле $a = \frac{k}{\mu}$, а b приближенно по формуле Е. М. Минского

$$b = \frac{12 \cdot 10^{-5} \rho d_3^2}{mk^{3/2}} \frac{\kappa \zeta}{M^4}, \quad (23)$$

Можно записывать закон фильтрации, отличный от закона Дарси в виде одночленной степенной зависимости между скоростью фильтрации и градиентом давления

$$W = C \left(-\frac{dp}{ds} \right)^{1/n}, \quad (24)$$

где C и n - некоторые постоянные, определяемые опытным путем, причем $1 < n \leq 2$. $n = 2$ соответствует закону Краснопольского.

Используя принцип однородности размерностей, можно найти выражение для коэффициента C в виде

$$C = \left[\frac{\text{Re}_{кр}}{f(m)} \right]^{\frac{n-1}{n}} k^{\frac{3-n}{2n}} \mu^{\frac{n-2}{n}} \rho^{\frac{1-n}{n}}, \quad (25)$$

где $f(m) = 10m^{-2.3}$.

Задача 10

Определить значение числа Рейнольдса у стенки гидродинамически несовершенной по характеру вскрытия нефтяной скважины, если известно, что эксплуатационная колонна перфорирована, на каждом погонном метре колонны прострелено 10 отверстий диаметром $d_0 = 10 \text{ мм}$, мощность пласта $h = 15 \text{ м}$, проницаемость пласта $k = 1 \text{ д}$, пористость его $m = 18\%$, коэффициент вязкости нефти $\mu = 4 \text{ сП}$, плотность нефти $\rho = 870 \text{ кг/м}^3$ и дебит скважины составляет $140 \text{ м}^3 / \text{сут}$.

Ответ: $\text{Re} = 15.6$ (по формуле Щелкачева),

$\text{Re} = 0.396$ (по формуле Миллионщикова).

Задача 11

Определить радиус призабойной зоны $r_{кр}$, в которой нарушен закон Дарси, при установившейся плоско-радиальной фильтрации идеального газа, если известно, что приведенный к атмосферному давлению дебит скважины $Q_{ам} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$, мощность пласта $h = 10 \text{ м}$, проницаемость $k = 0.6 \text{ д}$, пористость пласта $m = 19\%$, динамический коэффициент вязкости газа в пластовых условиях $\mu = 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м} \cdot \text{сек}$, плотность газа при атмосферном давлении и пластовой температуре $\rho_{ам} = 0.7 \text{ кг/м}^3$.

Указание. В решении использовать число Рейнольдса по формуле М. Д. Миллионщикова и за $\text{Re}_{кр}$, взять нижнее значение $\text{Re}_{кр} = 0.022$.

Решение:

По М. Д. Миллионщнкову

$$\text{Re}_{кр} = \frac{W_{кр} \sqrt{k} \rho}{m^{1.5} \mu},$$

откуда

$$W_{кр} = \frac{\text{Re}_{кр} m^{1.5} \mu}{\sqrt{k} \rho}, \quad (\text{I})$$

где

$$\rho = \frac{\rho_{ам} p}{p_{ам}}, \quad (\text{II})$$

С другой стороны

$$W_{кр} = \frac{Q_{ам} p_{ам}}{p 2\pi r_{кр} h}. \quad (\text{III})$$

Подставляя (II) в (I) и приравнявая выражения (I) и (III), получим

$$\frac{Q_{ам} p_{ам}}{p 2\pi r_{кр} h} = \frac{\text{Re}_{кр} m^{1.5} \mu p_{ам}}{\sqrt{k} \rho_{ам} p},$$

откуда

$$r_{кр} = \frac{Q_{ам} \sqrt{k} \rho_{ам}}{2\pi h \text{Re}_{кр} m^{1.5} \mu} = \frac{2 \cdot 10^6 \sqrt{0.6 \cdot 1.02 \cdot 10^{-12}} \cdot 0.7}{0.864 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 3.14 \cdot 10 \cdot 0.022 \cdot 0.19^{1.5} \cdot 1.4 \cdot 10^{-5}} = 7.9 \text{ м.}$$

Задача 12

Определить, происходит ли фильтрация в пласте по закону Дарси, если известно, что дебит нефтяной скважины $Q = 200 \text{ м}^3/\text{сут}$, мощность пласта $h = 5 \text{ м}$, коэффициент пористости $m = 16\%$, коэффициент проницаемости $k = 0,2 \text{ д}$, плотность нефти $\rho = 0,8 \text{ г/см}^3$, вязкость ее $\mu = 5 \text{ сП}$. Скважина гидродинамически совершенна, радиус ее $r_c = 0,1 \text{ м}$.

Решение: Найдем скорость фильтрации на забое скважины

$$W = \frac{Q}{2\pi r_c h} = \frac{200 \cdot 10^6}{0,864 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 500} = 0,0738 \text{ см/сек.}$$

Определим число Рейнольдса по Щелкачеву и сопоставим его с критическим значением.

$$\text{Re} = \frac{10 \sqrt{k} \rho}{m^{2,3} \mu} = \frac{10 \cdot 0,0738 \sqrt{0,2 \cdot 1,02 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,8}{0,0148 \cdot 0,05} = 0,036,$$

$$\text{Re} = 0,036 < \text{Re}_{kp} = 1.$$

Задача 13

Дебит газовой скважины, приведенный к атмосферному давлению при пластовой температуре $Q_{ат} = 2 \cdot 10^6 \text{ м}^3/\text{сут}$, абсолютное давление на забое $p_c = 80 \text{ ат}$, мощность пласта $h = 10 \text{ м}$, коэффициент пористости пласта $m = 18\%$, коэффициент проницаемости $k = 1,2 \text{ д}$, средний молекулярный вес газа 18, динамический коэффициент вязкости в пластовых условиях $\mu = 0,015 \text{ сП}$, температура пласта 45° С .

Определить, имеет ли место фильтрация по закону Дарси в призабойной зоне совершенной скважины радиусом $r_c = 10 \text{ см}$.

Решение:

Определим плотность газа у забоя скважины. Для этого найдем плотность газа при 0° С и при давлении в $1,033 \text{ ат}$

$$\rho_0 = \frac{18}{22,4} = 0,804 \text{ кг/м}^3$$

и при условиях на забое

$$\rho = \frac{\rho_0 T_0 p_c}{T p_0} = \frac{0,804 \cdot 273 \cdot 80}{(273 + 45) \cdot 1,033} = 53,3 \text{ кг/м}^3.$$

Скорость фильтрации на забое равна

$$W_c = \frac{Q_{ам} p_{ам}}{2\pi r_c h p_c} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1,033}{0,864 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot 80} = 0,0477 \text{ м/сек.}$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{10W\sqrt{k}\rho}{m^{2.3}\mu} = \frac{10 \cdot 4,77 \sqrt{1,2 \cdot 1,02 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,0533}{0,0195 \cdot 0,15 \cdot 10^{-2}} = 96,5 > Re_{кр} = 12.$$

т. е. в призабойной зоне нарушается закон Дарси.

§5. Прямолинейно-параллельное движение несжимаемой жидкости. Приток к дренажной галерее

Движение жидкости считается напорным, когда пьезометрическая линия располагается выше верхней непроницаемой границы потока (кровли пласта).

Установившийся фильтрационный поток жидкости или газа называется одномерным в том случае, когда давление является функцией только одной координаты, взятой по линии тока.

К одномерным потокам относятся:

- 1) Прямолинейно-параллельный (или параллельно-струйный) фильтрационный поток;
- 2) плоско-радиальный и
- 3) радиально-сферический.

Прямолинейно-параллельное движение имеет место в том случае, когда векторы скоростей фильтрации параллельны между собой.

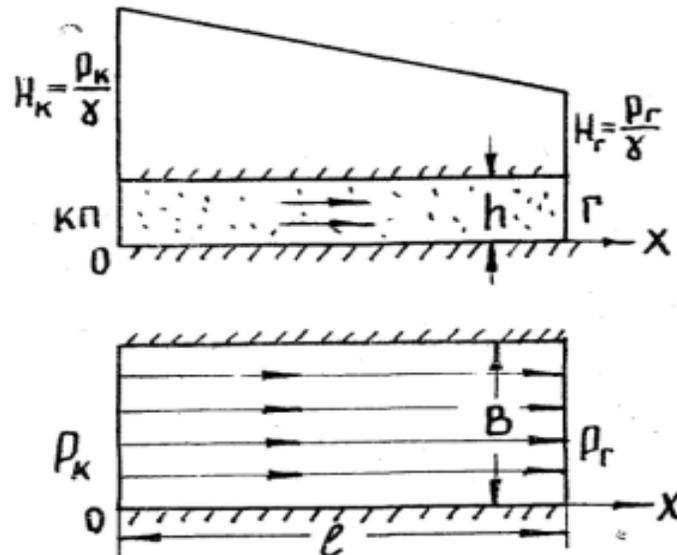


Рис. 5.

Если пласт горизонтальный, кровля и подошва непроницаемы, мощность пласта h и ширина пласта B всюду одинаковы, то в плане пласт пред-

ставится прямоугольником (рис. 5). Если в первом сечении пласта, соответствующем границе пласта с областью питания, поддерживается давление p_k , а в другом сечении, совпадающем, например, с дренажной галерей и отстоящим от первого сечения на расстоянии l , поддерживается давление p_r , то движение будет установившееся прямолинейно-параллельное.

Направим ось Ox вдоль линии тока. Считая, что фильтрация происходит по закону Дарси, пласт однородный по пористости m и проницаемости k , можем определить величину объемного дебита по формуле

$$Q = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{l} \omega, \quad (26)$$

где $\omega = Bh$ - площадь сечения пласта, нормального к направлению движения; величину давления в любом сечении пласта

$$p = p_k - \frac{p_k - p_r}{l} x, \quad (27)$$

и время, в течение которого частицы пройдут путь x ,

$$t = \frac{m\mu}{k} \frac{lx}{p_k - p_r}. \quad (28)$$

§6. Плоско-радиальное напорное движение несжимаемой жидкости. Приток к совершенной скважине. Формула Дюпюи

При плоско-радиальном движении векторы скорости фильтрации направлены по радиусам к оси скважины, поэтому давление и скорость фильтрации зависят только от одной координаты r . При этом во всех горизонтальных плоскостях поле скоростей и давлений будет одинаковым.

Примером плоско-радиального фильтрационного потока является приток к гидродинамически совершенной скважине, вскрывшей горизонтальный пласт бесконечной протяженности на всю мощность h и сообщаемой с пластом через полностью открытую боковую поверхность цилиндра, отделяющую ствол скважины от продуктивного пласта.

Поток будет также плоско-радиальным при притоке к совершенной скважине радиуса r_c , расположенной в центре ограниченного горизонтального цилиндрического пласта, мощностью h и радиусом R_k (рис. 6).

Если на внешней границе пласта, совпадающей с контуром питания, поддерживается постоянное давление p_k , а на забое скважины постоянное давление p_c , пласт однороден по пористости m и проницаемости k , фильтра-

ция происходит по закону Дарси, то объемный дебит скважины определится по формуле Дюпюи:

$$Q = \frac{2\pi k}{\mu} \frac{p_{\kappa} - p_c}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}}, \quad (29)$$

где μ - динамический коэффициент вязкости; закон распределения - формулой

$$p = p_{\kappa} - \frac{p_{\kappa} - p_c}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \ln \frac{R_{\kappa}}{r}, \quad (30)$$

либо

$$p = p_{\kappa} - \frac{Q\mu}{2\pi k h} \ln \frac{R_{\kappa}}{r}, \quad (31)$$

либо

$$p = p_c + \frac{p_{\kappa} - p_c}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c}. \quad (32)$$

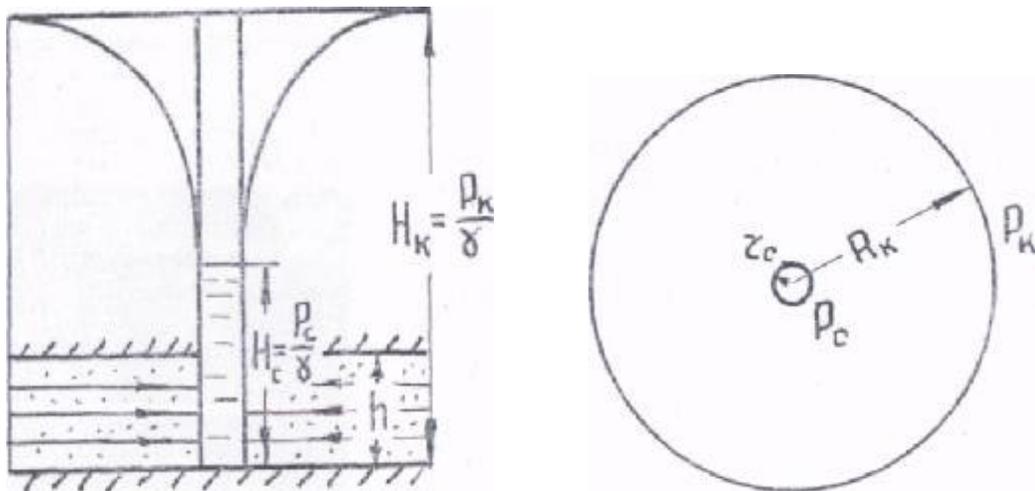


Рис. 6.

Линия $p = p(r)$ называется депрессионной кривой давления. Характерно, что при приближении к скважине градиенты давления и скорости фильтрации резко возрастают. При построении карты изобар следует учитывать, что радиусы изобар изменяются в геометрической прогрессии, в то время как давление на изобарах изменяется в арифметической прогрессии.

Индикаторная линия - зависимость дебита скважины от депрессии $\Delta p = p_k - p_c$ при притоке к скважине в условиях справедливости закона Дарси представляет собой прямую линию, определяемую уравнением $Q = \eta \Delta p$.

Коэффициент продуктивности

$$\eta = \frac{2\pi kh}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}}, \quad (33)$$

есть дебит при депрессии, равной единице.

Закон движения частиц вдоль линии тока, если при $t = 0$ частица находилась в точке с координатой $r = r_0$, описывается уравнением

$$t = \frac{\pi hm}{Q} (r_0^2 - r^2), \quad (34)$$

или

$$t = \frac{\mu m \ln \frac{R_k}{r_c}}{2k(p_k - p_c)} (r_0^2 - r^2). \quad (34a)$$

Средневзвешенное по объему порового пространства Ω пластовое давление

$$\hat{p} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} p d\Omega, \quad (35)$$

где

$$\Omega = \pi (R_k^2 - r_c^2) hm, \quad d\Omega = 2\pi h m r dr.$$

Подставляя выражение для p (30), выполняя интегрирование и пренебрегая всеми членами, содержащими r_c^2 , получим

$$\hat{p} = p_{\kappa} - \frac{p_{\kappa} - p_c}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}}. \quad (36)$$

Закон распределения давления и формула дебита при нарушении закона Дарси при притоке к совершенной скважине получается из двучленной формулы

$$-\frac{d p}{d s} = \frac{d p}{d r} = \frac{\mu}{k} W + b W^2. \quad (37)$$

Подставляя выражение для скорости фильтрации $W = \frac{Q}{2\pi r h}$ в уравнение (37) и разделяя переменные, получим

$$d p = \frac{Q\mu}{2\pi k h} \frac{d r}{r} + \frac{Q^2 b}{(2\pi h)^2} \frac{d r}{r^2}. \quad (38)$$

Интегрируя по p в пределах от p_c до p_{κ} и по r в пределах от r_c до R_{κ} , будем иметь

$$p_{\kappa} - p_c = \frac{Q\mu}{2\pi k h} \ln \frac{R_{\kappa}}{r_c} + \frac{Q^2 b}{(2\pi h)^2} \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_{\kappa}} \right). \quad (39)$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим дебит скважины Q . Интегрируя уравнение (38) по p в пределах от p до p_{κ} и по r в пределах от r до R_{κ} , найдем закон распределения давления в виде

$$p = p_{\kappa} - \frac{Q\mu}{2\pi k h} \ln \frac{R_{\kappa}}{r} - \frac{Q^2 b}{(2\pi h)^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{\kappa}} \right). \quad (40)$$

Как видно из уравнения (39) индикаторная линия при нарушении закона Дарси является параболой.

Если фильтрация происходит по закону Краснопольского, то дебит определяется по формуле

$$Q = 2\pi h \sqrt{\frac{r_c}{h} \Delta p}. \quad (41)$$

Задача 14

Определить дебит дренажной галереи шириной $B = 100$ м, если мощность пласта $h = 10$ м, расстояние до контура питания $l = 10$ км, проницаемость пласта $k = 1$ дарси, динамический коэффициент вязкости жидкости $\mu = 1$ сП, давление на контуре питания $p_k = 100$ ат и давление в галерее $p_r = 75$ ат. Движение жидкости напорное по закону Дарси.

Ответ: $Q = 21.6$ м³/сут.

Задача 15

Определить величину коэффициента проницаемости пласта (в различных системах единиц), если известно, что в пласте происходит одномерное, прямолинейно-параллельное установившееся движение однородной жидкости по закону Дарси. Гидравлический уклон $i = 0,03$, ширина галереи $B = 500$ м, мощность пласта $h = 6$ м, удельный вес жидкости $\gamma = 850$ кг/м³, абсолютная вязкость ее $\mu = 5$ сП и дебит галереи $Q = 30$ м³/сут.

Ответ: $k = 2,27$ д $= 2,32 \cdot 10^{-8}$ см² $= 2,32 \cdot 10^{-12}$ м².

Задача 16

Определить дебит нефтяной скважины (в т/сут) в случае установившейся плоско-радиальной фильтрации жидкости по закону Дарси, если известно, что давление на контуре питания $p_k = 100$ ат, давление на забое скважины $p_c = 75$ ат, проницаемость пласта $k = 500$ мд, мощность пласта $h = 15$ м, диаметр скважины $D_c = 24,8$ см, радиус контура питания $R_k = 10$ км, динамический коэффициент вязкости жидкости $\mu = 6$ сП и удельный вес $\gamma = 850$ кг/м³.

Ответ: $G = 127$ т/сут.

Задача 17

Определить давление на расстоянии 10 и 100 м от скважины при плоско-радиальном установившемся движении несжимаемой жидкости по линейному закону фильтрации, считая, что проницаемость пласта $k = 0,5$ дарси, мощность пласта $h = 10$ м, давление на забое скважины $p_c = 80$ ат, радиус скважины $r_c = 12,4$ см, коэффициент вязкости нефти $\mu = 4$ сП, удельный вес нефти $\gamma = 0,870$ т/м³ и весовой дебит скважины $G = 200$ т/сут.

Ответ: $p_1 = 94,7$ ат., $p_2 = 102,7$ ат.

Задача 18

Определить средневзвешенное по объему пластовое давление, если известно, что давление на контуре питания $p_k = 100$ ат, давление на забое возмущающей скважины $p_c = 80$ ат, расстояние до контура питания $R_k = 25$ км, радиус скважины $r_c = 10$ см. В пласте имеет место установившееся плоско-радиальное движение несжимаемой жидкости по закону Дарси.

Ответ: $p = 99,19$ ат.

Задача 19

Определить время t , за которое частица жидкости подойдет к стенке скважины с расстояния $r_0 = 200$ м, проницаемость пласта $k = 1$ дарси, вязкость нефти $\mu = 5$ снз, депрессия во всем пласте радиусом $R = 1$ км составляет $p_k - p_c = 10$ ат: мощность пласта $h = 10$ м, пористость пласта $m = 15\%$, радиус скважины $r_c = 10$ см.

Ответ: $t = 1600$ суток.

§7. Связь плоской задачи и теории функций комплексного переменного

При исследовании плоского фильтрационного потока, подчиняющегося закону Дарси, можно использовать теорию функций комплексного переменного. Совместим плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ с основной плоскостью течения.

Для каждого плоского фильтрационного потока можно найти характеристическую функцию течения, или комплексный потенциал $F(z)$, который является функцией комплексного переменного z . В функции $F(z)$ можно отделить действительную часть от мнимой

$$F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (42)$$

$\varphi(x, y)$ - потенциал скорости, $\psi(x, y)$ - функция тока. Эти функции связаны между собой уравнениями Коши-Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (43)$$

и подчиняются уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (44)$$

Уравнение $\varphi(x, y) = c$ определяет собой семейство эквипотенциалей, совпадающих с изобарами, так как $\varphi = \frac{k}{\mu} p$, а $\psi(x, y) = c$ - семейство линий тока. Эквипотенциалы и линии тока взаимно ортогональны (рис. 7). Проекции скорости фильтрации на координатные оси находятся по формулам

$$W_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad W_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (45)$$

а модуль скорости фильтрации

$$W = \left| \frac{dF}{dz} \right| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}. \quad (46)$$

Время движения частицы жидкости вдоль линии тока s можно определить по формуле

$$t = -m \int \frac{1}{s} \frac{dF}{dz} d\bar{z}, \quad (47)$$

где $\bar{z} = x - iy$ - сопряженное с z комплексное переменное.

Если какой-либо сложный плоский фильтрационный поток можно представить как результат наложения нескольких простейших потоков, то характеристическая функция сложного потока равна по принципу суперпозиции алгебраической сумме характеристических функций простейших потоков.

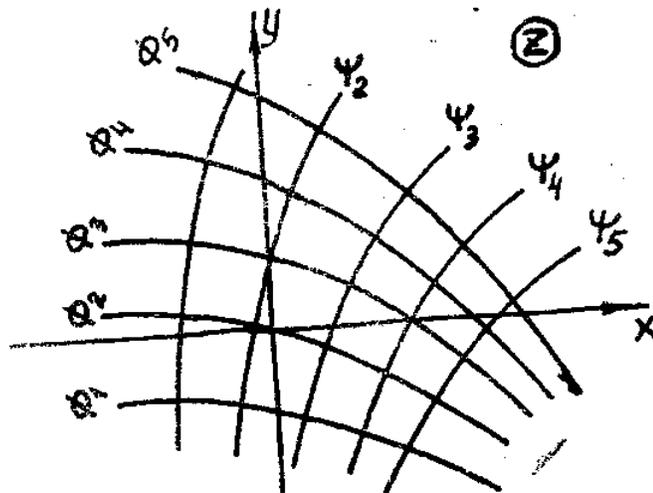


Рис. 7.

Задача 20

Определить каким плоским фильтрационным потокам соответствуют следующие характеристические функции (комплексные потенциалы)

1) $F(z) = Az$

$$2) F(z)=Az^2$$

$$3) F(z)=A \ln(z-a)$$

$$4) F(z)=A \ln[(z-a)/(z+a)]$$

где A и a - действительные постоянные числа.

Решение:

В качестве примера рассмотрим случай 2). Найдем потенциал скорости фильтрации и функцию тока, уравнения изобар и линий тока, модуль скорости фильтрации, построим семейства изобар и линий тока.

$$2) F(z)=az^2=A(x+iy)^2=A(x^2+2ixy-y^2)=A(x^2-y^2)+i2Axy.$$

Приравнивая действительную часть потенциалу скорости фильтрации φ , а мнимую часть - функции тока ψ , получим

$$\varphi(x, y) = A(x^2 - y^2), \quad \psi(x, y) = 2Axy.$$

Уравнение семейства эквипотенциалей получим, полагая $\varphi(x, y)=\text{const}$, т.е.

$$A(x^2 - y^2)=c_1, \quad (\text{I})$$

а уравнение семейства линий тока, полагая

$$\psi(x, y) = \text{const} = c_2,$$

т. е.

$$2Axy = c_2. \quad (\text{II})$$

Уравнение (I) определяет собой семейство гипербол, асимптотами которых являются биссектрисы координатных углов, а уравнение (II) - семейство гипербол с асимптотами, совпадающими с осями координат (рис. 8).

Найдем составляющие скорости фильтрации

$$W_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2Ax, \quad W_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2Ay$$

и модуль скорости фильтрации

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = 2A\sqrt{x^2 + y^2} = 2Ar.$$

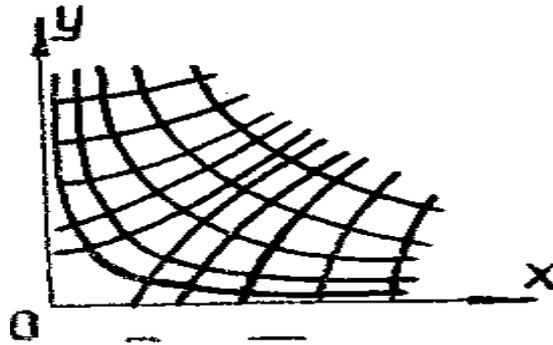


Рис. 8.

Задача 21

Эксплуатационная скважина работает в пласте, в котором до ее пробуривания имелся напорный плоско-параллельный поток жидкости со скоростью фильтрации $W = 0,001 \text{ см/сек}$.

Дебит скважины $Q = 100 \text{ м}^3/\text{сут}$, мощность пласта $h=10 \text{ м}$. Изобразить графически линии тока результирующего течения.

Решение:

Используя принцип суперпозиции, запишем характеристическую функцию для фильтрационного потока как сумму характеристической функции, отвечающей плоско-параллельному потоку в направлении оси x (Wz) и характеристическую функцию плоско-радиального потока со стоком в начале координат ($-\frac{q}{2\pi} \ln z$)

$$F(z) = Wz - \frac{q}{2\pi} \ln z.$$

Представляя комплексную переменную z в декартовых и полярных координатах

$$z = x + iy = r e^{i\theta},$$

отделим действительную часть от мнимой

$$F(z) = W(x + iy) - \frac{q}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) = Wx - \frac{q}{2\pi} \ln r + i(Wy - \frac{q}{2\pi} \theta)$$

и запишем выражение для функции тока

$$\psi = W y - \frac{q}{2\pi} \theta = W y - \frac{q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Уравнение линий тока имеет вид

$$W y - \frac{q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -c.$$

Подставляя исходные данные в системе cgs, получим

$$0,001 y - \frac{100 \cdot 10^6}{0,864 \cdot 10^5 \cdot 10^3 2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -c$$

или

$$0,001 y - \frac{0,58}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -c.$$

Запишем последнее уравнение в виде

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \left[(c + 0,001 y) \frac{\pi}{0,58} \right].$$

Рассчитаем несколько линий тока, придавая постоянной c различные значения. Результаты расчетов сведены в таблицу представлены на рис.9.

Значению $c = q/(2W) = 0,58$ соответствует линия тока $y = + O$, $x < 0$. В нижней полуплоскости картина линий тока симметрична относительно оси x , только соответствующие линии тока характеризуются значениями c с обратными знаками.

c = 0		c = 0,1		c = 0, 2		c = - 0, 1		c = 0, 35		c = - 0,2	
y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	X
580	- ∞	350	-417	300	-644	450	-150	180	-673	600	-405
435	- 435	300	-202	250	-298	390	0	150	-322	490	0
290	0	200	-10,5	200	- 135	300	159	100	-119	400	212
145	145	150	33. 3	100	-5.26	200	333			300	508
0	185	90	54	50	10.8	150	540				

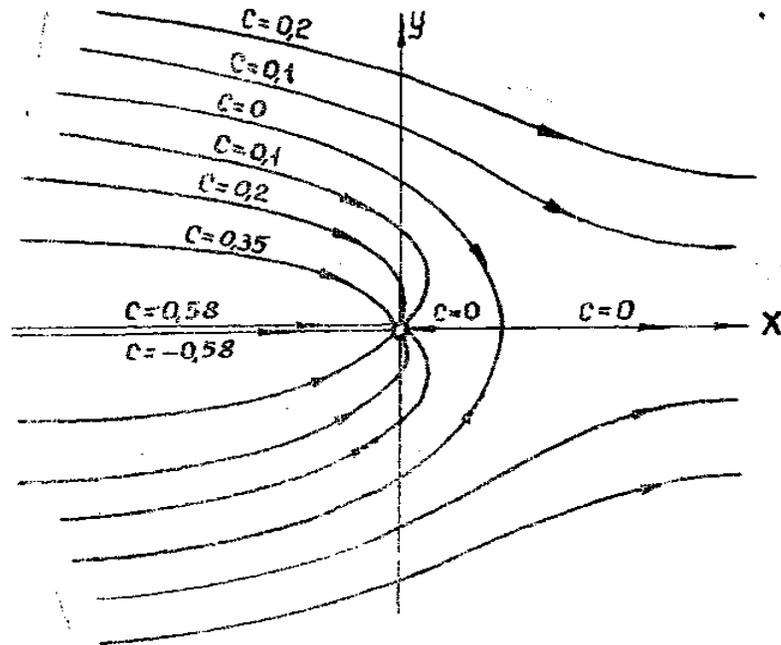


Рис. 9.

Как видно из графика, линия тока со значением $c=0$, является нейтральной линией, ограничивающей область засасывания, т. е. область, в которой жидкость поглощается скважиной. Наибольшая ширина области засасывания составляет величину $y|_{c=0}^{x=-\infty} = \frac{q}{W} = 1160 \text{ см.}$

вания составляет величину $y|_{c=0}^{x=-\infty} = \frac{q}{W} = 1160 \text{ см.}$

§8. Установившееся безнапорное движение жидкости в пористой среде. Безнапорное движение жидкости к прямолинейной галерее

Движение жидкости является безнапорным, если пьезометрическая поверхность совпадает со свободной поверхностью жидкости, в каждой точке которой действует постоянное давление.

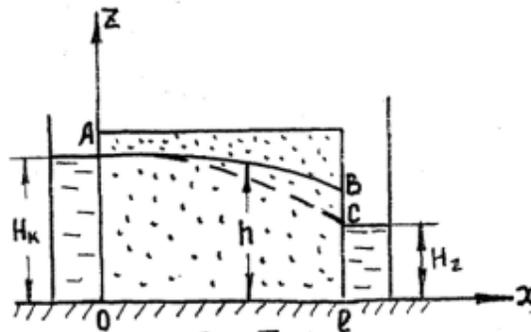


Рис. 10.

При безнапорном движении свободная поверхность AB жидкости в пласте у стенки дренажной прямолинейной галереи (рис. 10) или скважины (рис.

11) расположена выше у уровня жидкости в галерее или в скважине. Разрыв уровней образует промежуток высачивания BC .

В области нефтедобычи безнапорная фильтрация встречается, например, когда нефть, залегающая в продуктивном пласте, перекрытом непроницаемой кровлей, вследствие истощения пластовой энергии опускается ниже кровли пласта, безнапорная фильтрация имеет место также при шахтном и карьерном способе эксплуатации нефтяных месторождений. Гидротехникам приходится часто сталкиваться с безнапорным движением грунтового потока.

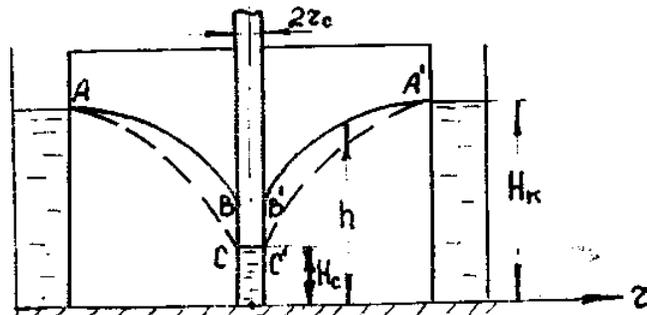


Рис. 11.

При решении задач установившегося безнапорного движения жидкости в пласте часто пользуются приближенной теорией - так называемой гидравлической теорией Дюпюи—Форхгеймера.

В гидравлической теории сделаны следующие допущения:

- 1) горизонтальные компоненты скорости фильтрации в поперечном сечении потока распределены равномерно;
- 2) давления вдоль вертикали распределены по гидростатическому закону, т.е.

$$H = z + \frac{p}{\gamma} = const$$

- считается постоянным вдоль вертикали.

Эти предпосылки гидравлической теории допустимы в части потока, где уклон свободной поверхности $i = \sin \alpha \approx 0$ (α - угол наклона поверхности к горизонту).

Если потоком жидкости со свободной поверхностью охвачена большая площадь, то свободная поверхность бывает слабо искривлена. В этом случае задачи о безнапорном течении к прямолинейной галерее и о безнапорном течении к гидродинамически совершенной скважине можно решать методами теории одномерного движения.

Считая, что установившееся безнапорное движение жидкости в пласте происходит по закону Дарси, при выбранном расположении координатных осей (рис. 10), приток к галерее шириной B со стороны области питания будет характеризоваться дебитом

$$Q = \frac{k\gamma B(H_{\kappa}^2 - H_{\Gamma}^2)}{2\mu l}, \quad (48)$$

пъезометрическая линия (кривая депрессии AC) будет описываться уравнением

$$h = \sqrt{H_{\kappa}^2 - \frac{H_{\kappa}^2 - H_{\Gamma}^2}{2\mu l} x}, \quad (49)$$

а движение частиц жидкости - подчиняться закону

$$t = \frac{B^2 mk\gamma}{3Q^2 \mu} \left[\left(H_{\kappa}^2 - \frac{2Q\mu}{Bk\gamma} x_0 \right)^{3/2} - \left(H_{\kappa}^2 - \frac{2Q\mu}{Bk\gamma} x \right)^{3/2} \right] \quad (50)$$

x_0 - координата движущейся частицы жидкости при $t=0$.

Если допустить, что при прочих равных условиях движение жидкости во всем пласте подчиняется нелинейному закону фильтрации

$$W = C \left(-\frac{dh}{dx} \right)^{\frac{1}{n}},$$

где - C и n некоторые постоянные, причем $1 \leq n \leq 2$, то формула дебита будет иметь следующий вид:

$$Q = BC \left[\frac{H_{\kappa}^{n+1} - H_{\Gamma}^{n+1}}{(n+1)l} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (51)$$

§ 9. Установившееся безнапорное движение жидкости к скважине

В случае, если гидродинамически совершенная скважина (или колодец) (рис. 11) вскрыла первый сверху водоносный пласт радиуса R_{κ} (в центре) до

горизонтального водоупора, и в пласте имеет место движение жидкости со свободной поверхностью по закону Дарси, то дебит определяется по формуле

$$Q = \frac{\pi k \gamma (H_{\kappa}^2 - H_c^2)}{\mu \ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}}, \quad (52)$$

кривая депрессии - по формуле

$$h = \sqrt{H_{\kappa}^2 - \frac{H_{\kappa}^2 - H_c^2}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \ln \frac{R_{\kappa}}{r}}, \quad (53)$$

а время движения частиц находится интегрированием графоаналитическим методом уравнения

$$t = \frac{2\pi m}{Q} \int_r^{r_0} r \sqrt{H_{\kappa}^2 - \frac{Q\mu}{\pi k \gamma} \ln \frac{R_{\kappa}}{r}} dr \quad (54)$$

или приближенно по формуле

$$t = \frac{2\pi m}{Q} \tilde{h} \int_r^{r_0} r dr = \frac{\pi m \tilde{h}}{Q} (r_0^2 - r^2), \quad (55)$$

где \tilde{h} - среднее значение напора в интервале изменения величины r от r_0 до r . Дебит скважины при нелинейном законе фильтрации жидкости находится по формуле

$$Q = 2\pi C \left(\frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{H_{\kappa}^{n+1} - H_c^{n+1}}{r_c^{1-n} - R_{\kappa}^{1-n}} \right) \quad (56)$$

При $n = 2$ из формулы (56) получается формула, выведенная А. А. Краснопольским для случая безнапорной фильтрации в трещиноватых породах. Формулы (48) и (52) называются формулами Дюпюи.

Депрессионные кривые (пунктирные линии на рис. 10, рис. 11), рассчитанные по формулам (49) и (53) вблизи стока существенно отличаются от истинных (сплошных линий). По приближенной гидравлической теории не получается промежутка высачивания BC .

Задача 22

В истощенной нефтяной залежи (рис. 12) по простиранию пласта проведен дренажный штрек длиной $b=75$ м. Нефть притекает в штрек при гравитационном режиме. Уровень нефти в штреке находится от подошвы пласта на

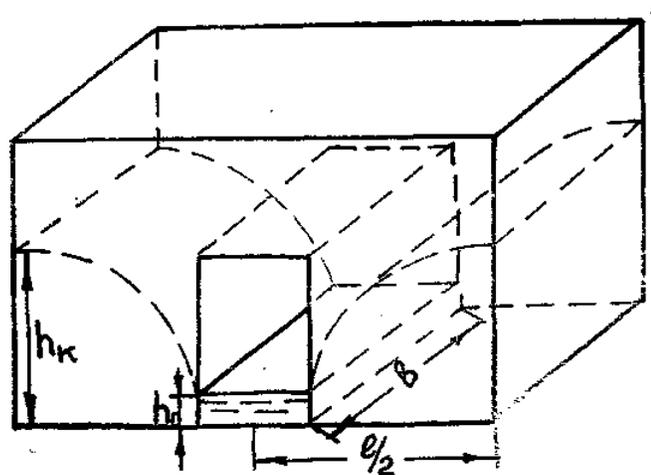


Рис. 12.

высоте $h_{\Gamma}=0,9$ м; высота уровня нефти на контуре питания $h_k=4$ м. Пласт имеет длину $l=800$ м, штрек находится посередине пласта. Проницаемость пласта $k=2$ дарси, вязкость нефти $\mu=6$ сантипуаз; объемный вес нефти $\gamma=970$ кг/м³. Найти производительность штрека.

Ответ: $Q=9,2$ см³/сек.

Задача 23

Определить дебит безнапорного фильтрационного потока (на единицу ширины пласта), имеющего место в наклонном песчаном пласте прямоугольной формы, если известно, что уровни воды в пьезометрических скважинах, расположенных вдоль пласта на расстоянии $l=200$ м, вдали от области стока находятся на отметках $H_1=80$ м и $H_2=79,3$ м (рис. 13). Глубина фильтрационного потока между скважинами $h=15$ м, коэффициент фильтрации пласта $c=45$ м/сут.

Решение:

Расход на единицу ширины фильтрационного потока равен

$$q = -ch \frac{dh}{dx} = chi,$$

где гидравлический уклон

$$i = \frac{H_1 - H_2}{l} = \frac{80 - 79,3}{200} = 0,0035$$

и может считаться постоянным вдали от области стока. Тогда

$$q = 45 \cdot 15 \cdot 0,0035 = 2,36 \frac{\text{м}^3 / \text{сут}}{\text{м}}$$

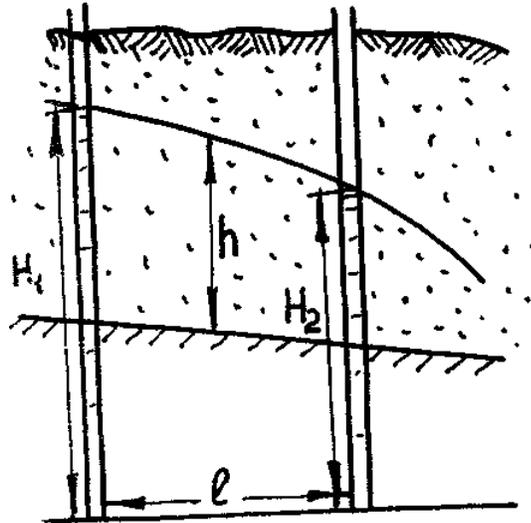


Рис. 13.

Задача 24

Для возведения фундамента требуется понизить уровень грунтовых вод на 2 м на площади $10 \times 10 \text{ м}^2$ при помощи дренирования. Уровень грунтовых вод находится на глубине 0,5 м от поверхности земли.

Вырыт колодец радиусом 20 см на глубину 6,6 м (рис. 14) до водоупора.

Определить:

- 1) Производительность насоса для обеспечения необходимого дренажа;
- 2) на каком расстоянии r' будет иметь место понижение уровня воды на 2 м, если производительность насоса увеличить на 10%.

Расчет произвести при условии, что коэффициент проницаемости $k = 1 \text{ д}$, радиус контура питания $R_k = 200 \text{ м}$, удельный вес жидкости $\gamma = 9800 \text{ н/м}^3$, вязкость ее $\mu = 1 \text{ сн}$.

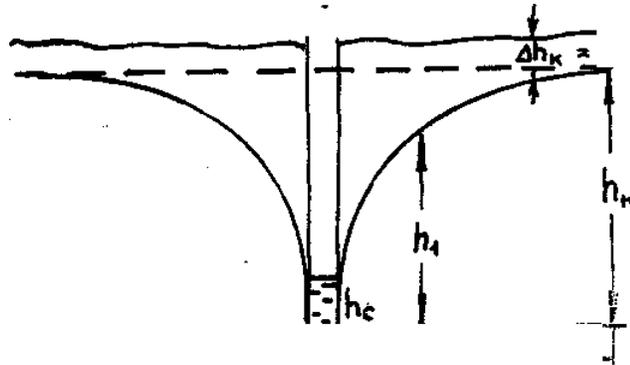


Рис. 14.

Решение:

Исходя из условия, что уровень грунтовых вод должен быть понижен на 2 м на площади $10 \times 10 \text{ м}^2$, найдем радиус r_1 круговой зоны, охватывающей указанную площадь (см. рис. 15).

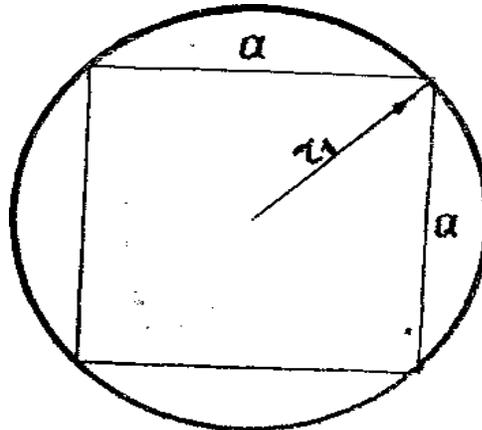


Рис. 15.

Как видно из чертежа

$$r_1 = a\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = 7,05 \text{ м.}$$

Определим уровень грунтовых вод на расстоянии $r_1 = 7,05 \text{ м}$, отсчитывая его от дна колодца $h_1 = 6,5 - 2,0 = 4,5 \text{ м}$.

Уровень воды в колодце найдем из формулы

$$h_c = \sqrt{h_k^2 - \frac{h_k^2 - h_1^2}{\ln \frac{R_k}{r_1}} \ln \frac{R_k}{r_c}} = \sqrt{36 - \frac{36 - 20,25}{\lg \frac{200}{7,05}} \lg \frac{200}{0,2}} = 1,87 \text{ м.}$$

Подсчитаем производительность насоса

$$Q = \frac{\pi k \gamma (h_k^2 - h_c^2)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} = \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 10^{-3} (6^2 - 1,87^2) \cdot 10^4}{1 \cdot 2,3 \cdot \lg \frac{200}{0,2}} = 148 \frac{\text{см}^3}{\text{сек}} = 0,535 \frac{\text{м}^3}{\text{час}}.$$

Если производительность насоса увеличить на 10%, то она составит

$$Q' = 1,1Q = 163 \frac{\text{см}^3}{\text{сек}}.$$

Определим уровень воды в колодце, соответствующий значению Q'

$$h_c' = \sqrt{h_k^2 - \frac{Q' \mu \ln \frac{R_k}{r_c}}{\pi k \gamma}} = \sqrt{36 \cdot 10^4 - \frac{163 \cdot 1 \cdot 2,3 \lg \frac{200}{0,2}}{3,14 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}} = 44,7 \text{ см} = 0,447 \text{ м}.$$

Найдем расстояние r' , на котором понижение уровня воды равно 2 м, т.е. $h' = 4,5 \text{ м}$.

$$\ln \frac{R_k}{r'} = \frac{h_k^2 - h'^2}{h_k^2 - h_c^2} \ln \frac{R_k}{r_c},$$

или

$$\lg \frac{R_k}{r'} = \frac{h_k^2 - h'^2}{h_k^2 - h_c^2} \lg \frac{R_k}{r_c} = \frac{36 - 20,25}{36 - 0,2} \lg \frac{200}{0,2} = 1,32,$$

откуда

$$\frac{R_k}{r'} = 20,9 \quad \text{и}$$

$$r' = \frac{R_k}{20,9} = 9,57 \text{ м}.$$

Задача 25

Определить весовой дебит колодца и скорость фильтрации на расстоянии 20 м от скважины при дренировании залежи с помощью колодцев из вы-

работок над пластом в условиях безнапорной фильтрации, если высота уровня на контуре питания $h_k = 13$ м, высота уровня жидкости в колодце $h_c = 3$ м, вязкость нефти $\mu = 4$ сантипуаза, плотность нефти $\rho = 850$ кг/м³, проницаемость пласта $k = 1$ дарси, расстояние до контура питания $R_k = 100$ м, радиус колодца $r_c = 90$ см.

Ответ: $G = 15,3$ т/сут, $W = 1,22 \cdot 10^{-5}$ см/сек.

Глава 2. Задачи по теории гидродинамической устойчивости

§1. Уравнения и краевые условия. Волновые решения

Рассмотрим течение в вертикальной плоскости (x, z) при наличии поля тяжести с ускорением g . Движение описывается уравнениями Эйлера:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - g\rho$$

и, в предположении несжимаемости,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = 0.$$

Пусть скорость основного стационарного течения направлена по оси Ox и зависит лишь от вертикальной координаты: $U(z)$. Скорость возмущенного течения будем считать мало отклоняющейся от скорости основного течения, $u = U(z) + u'$, $w = w'$, где u', w' - малые отклонения. Для давления p и плотности ρ имеем $p = \bar{p}(z) + p'$, $\rho = \bar{\rho}(z) + \rho'$. Если отбросить в уравнениях произведения малых величин, т. е. линеаризовать уравнения, то получится система

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial U}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial x},$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial z} - g\rho',$$

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + U \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}\right) = 0.$$

Воспользовавшись третьим уравнением, можно ввести функцию тока ψ , такую, что $u' = -\partial\psi/\partial z$, $w' = \partial\psi/\partial x$

Применяя операцию rot , исключим из первых двух уравнений ρ' , затем ρ' , в итоге получим уравнение

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 (\Delta\psi - \beta\psi_z) + (U'' - \beta U') \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_x = g\beta\psi_{xx}, \quad \beta = -\bar{\rho}_z / \bar{\rho} \quad (1)$$

Это основное уравнение теории. При каких граничных условиях его следует решать? Если имеется твердая стенка, параллельная оси Ox , то на ней $w' = 0$, т. е. $\psi_x = 0$ или $\psi = \text{const}$.

В дальнейшем иногда будут рассматриваться течения, имеющие на какой-нибудь высоте касательный разрыв. Можно представить себе, например, что жидкость двухслойна, на слое жидкости одной плотности лежит слой другой плотности, так что плотность имеет скачок. При этом может быть еще и скачок скорости. Каковы условия на таком разрыве? Должно выполняться два условия – одно условие кинематическое: компонента скорости, нормальная к разрыву, должна быть непрерывной при переходе через разрыв (и совпадать со скоростью перемещения поверхности разрыва). Второе условие динамическое – непрерывность давления. Эти условия ставятся на поверхности разрыва, форма которой заранее неизвестна. Все сильно упрощается, если линеаризовать не только уравнения, но и условия на разрыве. Будем считать, что отклонения поверхности разрыва от ее среднего значения очень малы. Запишем уравнение поверхности в виде $z = z_0 + \zeta(x, t)$. Значения всех величин на краях разрыва, сверху и снизу, будем разлагать по степеням малой величины ζ и приводить их к уровню z_0 . В конце концов условия на разрыве будут заменены приближенными условиями, поставленными на среднем уровне z_0 , область, занятая верхней жидкостью, будет $z > z_0$, а нижней – $z < z_0$. Картина течения вблизи разрыва исказится, а вдали от разрыва изменится не слишком. Для вертикальной скорости имеем

$$w(x, z, t) = w(x, z_0, t) + O(\zeta).$$

Значение w на разрыве заменяем значением на средней поверхности. Сама величина w при линеаризации мала, ошибка при такой замене имеет следующий порядок малости. Заменять $p(x, z, t)$ на $p(x, z_0, t)$ было бы слишком грубым, при этом были бы полностью потеряны архимедовы силы, возникающие при смещении более плотной жидкости в область, занятую менее плотной или наоборот. Но $p(x, z, t) = p(x, z_0, t) - g\bar{\rho}\zeta + O(\zeta^2)$. Для средних величин \bar{p} и $\bar{\rho}$, относительно которых линеаризуются уравнения: $p(x, z) = \bar{p}(x, z_0) - g\bar{\rho}\zeta + O(\zeta^2)$.

Динамическое условие на разрыве запишем теперь как непрерывность величины $p'(x, z_0, t) - g\bar{\rho}\zeta$ при переходе через $z = z_0$.

Кинематическое условие означает, что частица жидкости, находящаяся на разрыве, всегда будет на нем оставаться. Поэтому для нее $z = \zeta(x, t)$.

Отсюда $w' = \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt}$ Линеаризуя, получим

$$w^{\pm'} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{\pm} \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta(x, t).$$

Это справедливо как для верхней, так и для нижней жидкости, на что указывают значки \pm (+ будет означать верхнюю жидкость, – нижнюю).

Кинематическое условие на разрыве, выраженное через функцию тока Ψ имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^- \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi_x^+ = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi_x^-.$$

Заметим, что если разрыва скорости нет, а лишь разрыв плотности, то условие более простое – непрерывность w или $\Psi_x^+ = \Psi_x^-$.

Динамическое условие в терминах Ψ можно записать как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \bar{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi_z - \frac{dU}{dz} \Psi_x \right] \right\}^+ - g \{ \bar{\rho} \}_-^+ \Psi_{xx}^+ = 0,$$

где $\{ \}_-^+$ обозначен скачок на разрыве.

Отметим, что как уравнение (1), так и условия на разрыве становятся более простыми, если жидкость однородна и несжимаема. Если в основном состоянии плотность постоянна, то $\beta = 0$. Но если предположить к тому же,

что и возмущений плотности в начальный момент нет, то их не будет все остальное время движения и можно считать $\rho' = 0$.

Коэффициенты уравнения (1), а также линейных условий на твердых границах и на поверхностях раздела не зависят ни от координаты x , ни от t . Это позволяет искать решений типа нормальных волн

$$\psi(x, z, t) = \psi(z)e^{i\alpha(x-ct)},$$

где α - волновое число в направлении оси Ox , c - фазовая скорость волны. Для таких решений уравнение приобретает вид:

$$(U - c)^2(\psi'' - \alpha^2\psi - \beta\psi') - (U'' - \beta U')(U - c)\psi = -g\beta\psi. \quad (2)$$

Краевые условия на твердой стенке: $w' \equiv \psi_x \equiv i\alpha\psi = 0$.

На разрыве имеем

$$(U^- - c)\psi^+ = (U^+ - c)\psi^-$$

$$(U^+ - c)\left\{ \bar{\rho} \left[(U - c)\psi_z - \frac{dU}{dz}\psi \right] \right\}_-^+ - g\{\bar{\rho}\}_-^+\psi^+ = 0.$$

Теперь задача ставится таким образом. При заданном значении волнового числа α требуется определить те значения параметра c , при которых существует решение уравнения, удовлетворяющее всем условиям – на границах и на поверхностях разрыва. Если такое собственное значение c окажется вещественным, то соответствующее решение ограничено во времени, т. е. устойчиво; если c имеет положительную мнимую часть, то решение экспоненциально растет, т. е. неустойчиво, при отрицательной мнимой части решение затухает. Заметим, что в силу вещественности коэффициентов уравнения, комплексные собственные значения входят сопряженными парами, т. е. из существования затухающего решения всегда следует существование растущего.

Насколько полно исследование устойчивости уравнения (1) методом нормальных волн? Не может ли оказаться, что все нормальные волны устойчивы, а решения, не имеющие вида нормальных волн, вообще говоря неустойчивы? Применение метода разделения переменных, метода Фурье основано на допущении, что решений в виде нормальных волн достаточно много, т. е. любое решение можно представить в виде суперпозиции нормальных волн

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{k,l} A_{k,l} e^{i\alpha_k(x-c_{k,l}t)} \psi_{k,l}(z). \quad (3)$$

Для этого нормальные волны должны образовывать полную систему решений. В нашем случае положение оказывается сильно осложненным. Уравнение имеет особую точку – старший коэффициент может обратиться в нуль, когда $U - c = 0$. В связи с этим, во-первых, вообще затруднительно определить, что такое волновое решение, так как решение может иметь разрыв там, где $U - c = 0$ (точнее разрыв производной), и неясно, какие условия ставить на краях этого разрыва. Даже после того, как условия склейки определены некоторым разумным образом, оказывается, что волновых решений, т. е. решений уравнения (2), слишком мало. Как правило, набор собственных значений c бывает лишь конечным. Таким образом, предположение о представимости любого решения в виде ряда (3) неверно.

На самом деле, решения описанного волнового вида относятся к дискретному спектру, кроме которого существует еще непрерывный спектр.

Заметим, что мы интегрируем уравнение по вещественной оси переменного z , значит особая точка возникает лишь при вещественных c , т. е. для нейтральных колебаний. Поэтому первый и наиболее существенный вопрос, который здесь возникает, таков: может быть, несмотря на то что волновых решений мало, отсутствие неустойчивых волновых решений все же гарантирует устойчивость всех решений уравнения (1)? Замечательно, что ответ на этот вопрос дается утвердительный. Неустойчивость бывает, в общем, лишь тогда, когда существуют неустойчивые волновые решения, т. е. волновые решения для невещественных c .

Примеры

Пример 1. Пусть полупространство $z < 0$ занято покоящейся несжимаемой жидкостью плотности ρ_1 , а над ним, при $z > 0$ – также покоящаяся несжимаемая жидкость другой плотности ρ_2 . Рассмотрим колебания такой системы. Уравнение (2) принимает вид

$$c^2(\Psi'' - \alpha^2\Psi) = 0.$$

Отсюда следует, что при $c = 0$ имеется лишь одна собственная функция. Именно,

$$\Psi = \begin{cases} Ae^{-\alpha z}, & z > 0, \\ Be^{\alpha z}, & z < 0. \end{cases}$$

Здесь мы приняли естественное условие на бесконечности – ограниченность решения. Осталось удовлетворить условиям на поверхности разрыва $z = 0$. Непрерывность ψ дает $A = B$. Второе условие имеет вид

$$\rho_1 \{-c^2 \psi' + g \psi\}_{z=0} = \rho_2 \{-c^2 \psi' + g \psi\}_{z=+0}$$

и дает

$$c = \pm \sqrt{\frac{g \rho_1 - \rho_2}{\alpha \rho_1 + \rho_2}}. \quad (4)$$

Таким образом, для всякого α в этой задаче оказывается два собственных значения, отличных от нуля. Кроме того, $c = 0$ является бесконечнократным собственным значением: функцию ψ можно взять любой, лишь бы удовлетворялись условия на разрыве, т. е. $\psi(0) = 0$ и условие ограниченности на бесконечности. Формула (4) показывает, что при $\rho_1 > \rho_2$ колебания нейтральны, при $\rho_1 < \rho_2$ имеет место неустойчивость. Неустойчивость имеет место тогда и только тогда, когда тяжелая жидкость находится выше легкой. Неустойчивость, вызванная ростом плотности с высотой, называется *статической*, или *тейлоровской*.

Пример 2. Пусть плотность непрерывна и постоянна, а скорость терпит разрыв. Введем систему координат, движущуюся равномерно со скоростью, средней между скоростями течения выше и ниже разрыва. Тогда при $z < 0$ скорость будем считать постоянной и равной $-U_0$, а при $z > 0$ – равной $+U_0$. Уравнение (2) примет вид

$$\begin{aligned} -(U_0 - c)^2 (\psi''_+ - \alpha^2 \psi_+) &= 0 \quad \text{при } z > 0 \\ -(U_0 + c)^2 (\psi''_- - \alpha^2 \psi_-) &= 0 \quad \text{при } z < 0 \end{aligned}$$

Условия на разрыве $z = 0$ таковы:

$$\begin{aligned} (U_0 + c) \psi^+ &= -(U_0 - c) \psi^-, \\ (U_0 - c) \frac{d\psi^+}{dz} &= -(U_0 + c) \frac{d\psi^-}{dz}. \end{aligned}$$

Во-первых, имеются решения $c = -U_0$, ψ^- – произвольная ограниченная функция, обращающаяся в нуль при $z = 0$, $\psi^+ \equiv 0$. Таким образом, значения $c = \pm U_0$ являются бесконечно вырожденными собственными значениями.

ми. Это возмущения, движущиеся вместе с потоком. При $c \neq \pm U_0$ имеем $\psi^+ = Ae^{-\alpha z}$, $\psi^- = Be^{\alpha z}$.

Условия на разрыве дают $(U_0 - c)^2 = -(U_0 + c)^2$. Отсюда $c = \pm iU_0$.

Имеет место неустойчивость, причина которой уже не статическая, а динамическая. Она носит название *гельмгольцевой* неустойчивости.

Задача 1

Исследовать устойчивость течения из примера 1 для случая, когда плотность изменяется по экспоненциальному закону $\rho = \rho_0 e^{-\beta z}$. Получить явное выражение для комплексного декремента.

Задача 2

Исследовать устойчивость течения из примера 2, в предположении, что имеет место и разрыв плотности.

Задача 3

Исследовать устойчивость течения из примера 2, в предположении, что плотность распределена по закону $\rho = \rho_0 e^{-\beta z}$

Задача 4

Пусть жидкость заполняет полупространство $z > 0$. Плотность убывает экспоненциально $\rho = \rho_0 e^{-\beta z}$, а скорость линейно растет $U = kz$. Определяющее уравнение имеет вид $(kz - c)^2(\psi'' - \alpha^2\psi) + g\beta\psi = 0$. Исследовать устойчивость течения.

Указание: использовать замену $(z - c/k)\alpha = \xi$, Рассмотреть отдельно задачу для случаев, когда число Ричардсона $Ri = g\beta/k^2 = g\beta/(\text{grad}U)^2$ принимает значения $Ri > 1/4$ и $Ri \leq 1/4$.

Задача 5

Исследовать устойчивость течения, скорость которого изменяется линейно $U = kz$, а плотность однородна

§2. Бифуркации и неустойчивость стационарных течений

Рассмотрим течения несжимаемой вязкой жидкости в заданной области Ω . Считаем, что в Ω справедливы уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности. На границе $\partial\Omega$ заданы граничные условия: $\vec{u} = \vec{U}_0$, \vec{u} - вектор скорости течения. Предположим, что данная задача имеет решение, описывающее стационарное течение. Пусть этому *основному* течению соот-

ветствует поле скоростей \dot{U}_* и давление P_* . Введем безразмерные переменные и определим число Рейнольдса Re . Выберем некоторый характерный масштаб длины L основного течения, например, диаметр области Ω , а также некоторый характерный масштаб скорости V , например, максимальное значение $|\dot{U}_*|$ в Ω . Определим безразмерные переменные

$$\overset{r}{x} = \overset{r}{x}_* / L, \quad t = Vt_* / L, \quad \overset{r}{u} = \overset{r}{u}_* / V, \quad p = p_* / \rho V^2,$$

где индексом «*» обозначены размерные переменные и функции, а также число Рейнольдса $Re = VL/\nu$. Безразмерные поля скорости U и давления P основного течения в Ω удовлетворяют уравнениям Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \dot{U} \cdot \nabla \dot{U} &= -\nabla P + Re^{-1} \nabla U, \\ \nabla \cdot \dot{U} &= 0 \end{aligned}$$

и граничным условиям $\dot{U} = \dot{U}_0$ на $\partial\Omega$.

В общем случае \dot{U}, P зависят от Re , и может существовать более одного стационарного решения для одного и того же значения Re и тех же граничных условий. *Бифуркация*, т.е. изменение числа или качественных свойств возможных стационарных течений (или нестационарных течений в состоянии динамического равновесия), при изменении Re часто связана с переходом к неустойчивости.

Важная физическая идея, относящаяся к чередованию неустойчивостей и смены режимов течения на «пути к турбулентности» при увеличении числа Рейнольдса, будет представлена далее на примере ряда очень простых модельных задач о бифуркации. Уравнения, которые будут рассмотрены не только иллюстрируют многие важные идеи устойчивости, но также асимптотически описывают *локальные* свойства большого числа неустойчивостей и бифуркаций.

Пример 3. Точка поворота. В качестве простой модельной задачи рассмотрим вспомогательную задачу:

$$a - l(U - U_0)^2 = 0, \quad a = k(Re - Re_c),$$

где $k > 0$, $l \neq 0, U_0, Re_c$ некоторые постоянные. Вспомогательная задача может оказаться полезной при изучении сложного свойства движения жидкости, если она описывает именно изучаемое свойство, даже не имея отношения к большинству других свойств движения. Величина U

может рассматриваться в качестве компоненты скорости жидкости в некоторой заданной точке стационарного течения в зависимости от числа Рейнольдса. Тогда $U = U_0 \pm [k(\text{Re} - \text{Re}_c)/l]^{1/2}$. Имеем два решения, когда $k(\text{Re} - \text{Re}_c)/l > 0$, одно, когда $\text{Re} = \text{Re}_c$, и ни одного, когда $k(\text{Re} - \text{Re}_c)/l < 0$.

Будем говорить, что имеет место *простая точка поворота, складка* или *бифуркация седло-узел* при $\text{Re} = \text{Re}_c$, $U = U_0$. Эта точка называется *точкой бифуркации*, так как число (и свойства) решений меняются в ней.

Пример 4: Течения Джефффри-Гамеля. Рассмотрим двумерное течение несжимаемой вязкой жидкости между двумя твердыми плоскостями, заданными уравнениями $\theta = \pm\alpha$. Течение возбуждается стационарным линейным источником (или стоком) с объемным расходом Q на единицу расстояния по нормали к плоскости течения. Источник (сток) расположен на пересечении $r_* = 0$ двух плоскостей, где (r_*, θ) - полярные координаты. Схема течения изображена на рис. 1.

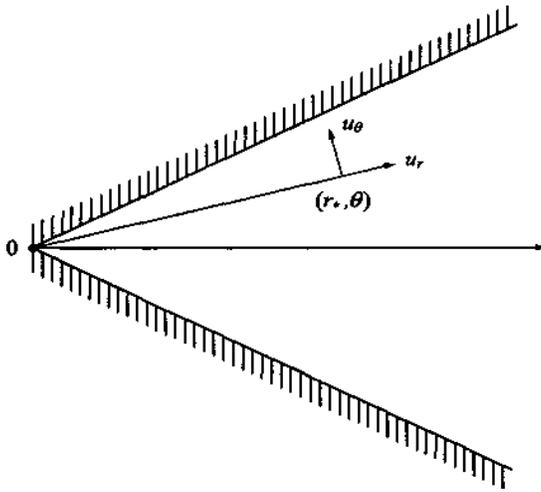


Рис.1

Граничные условия имеют вид $\psi_* = \pm \frac{1}{2}Q$, $\frac{\partial \psi_*}{\partial \theta} = 0$ при $\theta = \pm\alpha$, где ψ_* - функция тока, так что радиальная и касательная компоненты скорости даются соответственно формулами $u_{r_*} = \partial \psi_* / r_* \partial \theta$, $u_{\theta} = -\partial \psi_* / \partial r_*$. Будем искать стационарные течения, для которых функция тока зависит только от θ , т.е. $\psi_* = \Psi_*(\theta)$. В результате имеем чисто радиальное течение со скоростью $u_{r_*} = U_* = d\Psi_* / r_* d\theta$ и завихренностью $\zeta_* = -\nabla_* \psi_* = -d^2 \Psi_* / r_*^2 d\theta^2$.

Определим далее безразмерные переменные $\psi = 2\psi_* / Q$ и число Рейнольдса $\text{Re} = Q/2\nu$. Тогда безразмерная форма уравнения для завихренности имеет вид $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\zeta, \psi)}{\partial(r, \theta)} = \text{Re}^{-1} \nabla \zeta$. Это уравнение для $\psi = \Psi(\theta)$ превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4\Psi}{d\theta^4} + 4\frac{d^2\Psi}{d\theta^2} + 2\operatorname{Re}\frac{d\Psi}{d\theta}\frac{d^2\Psi}{d\theta^2} = 0.$$

Граничные условия принимают вид

$$\Psi = \pm 1, \quad \frac{d\Psi}{d\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = \pm\alpha.$$

Решение задачи может быть выражено в явном виде через эллиптические функции Якоби, однако во многих отношениях его проще получить численно.

В общих чертах свойства течений Джеффри-Гамеля можно суммировать следующим образом. Для любой заданной пары $(\operatorname{Re}, \alpha)$ существует бесконечное число стационарных течений. Имеет место сложная структура, содержащая большое число точек поворота и вил.

Устойчивость и линеаризованная задача

Сначала выбирается интересующее нас основное течение – решение уравнений движения, устойчивость которого подлежит исследованию. Течение определяется из уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} &= -\nabla P + \operatorname{Re}^{-1} \nabla^2 \mathbf{U}, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \end{aligned}$$

Вводится возмущенное течение, для которого уравнения и граничные условия линеаризуются. Решение линеаризованной задачи ищется в виде нормальных волн, подобно тому, как это делалось в § 1, гл. 2. В результате получим задачу относительно комплексного декремента s .

Задача 6

Для модельного уравнения $aU - lU^2 = 0$ исследовать возникающие режимы течения (см. пример 3).

Примечание. Решение данной задачи дает пример *транскритической бифуркации*.

Задача 7

Для модельного уравнения $aU - lU^3 = 0$ исследовать возникающие режимы течения (см. пример 3).

Примечание. Решение данной задачи дает пример *вилобразной бифуркации*.

Задача 8

Исследовать режимы течения плоско-параллельного течения несжимаемой вязкой жидкости, вектор скорости которого задан в виде $\dot{U} = U(z)\dot{i}$.

а) плоское течение Куэтта $U(z) = Vz/L$ при $-L \leq z \leq L$;

б) плоское течение Пуазейля $U(z) = V(1 - z^2/L^2)$ при $-L \leq z \leq L$

Задача 9

Найдите точное общее решение u уравнения

$$\frac{du}{dt} = a - l(u - U_0)^2, \quad a = k(\text{Re} - \text{Re}_c), \quad k > 0.$$

Исследовать устойчивость решения методом нормальных волн.

Задача 10

Найдите точное общее решение u уравнения

$$\frac{du}{dt} = au - lu^2, \quad a = k(\text{Re} - \text{Re}_c), \quad k > 0.$$

Исследовать устойчивость решения методом нормальных волн.

Задача 11

Пусть для $\text{Re} > 0$ ($\text{Re} = VL/\nu$ - число Рейнольдса) справедливо

$$\frac{du}{dt} = -u(1 - u\text{Re})(1 - u).$$

Покажите, что $U = 0$ является устойчивым стационарным решением для всех Re .

Задача 12

Запишите уравнения Навье-Стокса в цилиндрической системе координат (x, r, φ) , используя безразмерные переменные и число Рейнольдса Re . Линеаризуйте эти уравнения относительно основного течения несжимаемой вязкой жидкости со скоростью $\dot{U} = U(r)\dot{i}$ и давлением $P = P(x)$, где $U(r) = 1 + r^2$, $P(x) = P_0 - 2x/\text{Re}$, $0 \leq r \leq 1$, полагая $\dot{u} = \dot{U} + \dot{u}'$, $p = P + p'$.

Задача 13

Основное течение в двух горизонтальных параллельных бесконечных и расположенных один над другим слоях несжимаемых идеальных жидкостей,

имеющих различные скорости и плотности, задается распределениями скорости, плотности и давления

$$U(z) = \begin{cases} U_2^{\uparrow} \\ U_1^{\uparrow} \end{cases}, \quad \rho(z) = \begin{cases} \rho_2 \\ \rho_1 \end{cases}, \quad p(z) = \begin{cases} p_0 - g\rho_2 z, & z > 0, \\ p_0 - g\rho_1 z, & z < 0, \end{cases}$$

где U_1, U_2 - скорости течений в слоях, ρ_1, ρ_2 - плотности, p_0 - постоянное давление, z - вертикальная координата, g - ускорение свободного падения.

Пусть возмущенное течение является безвихревым с каждой стороны вихревого слоя. Потенциал скорости ψ с каждой стороны поверхности раздела между двумя потоками задан следующим образом

$$\psi = \begin{cases} \psi_2, & z > \zeta \\ \psi_1, & z < \zeta \end{cases}, \quad (5)$$

поверхность раздела задается формулой $z = \zeta(x, y, t)$, когда течение является возмущенным и справедливы соотношения

$$\nabla\psi_2 = 0 \quad (z > \zeta), \quad \nabla\psi_1 = 0 \quad (z < \zeta). \quad (6)$$

Найти собственные значения задачи, используя метод нормальных волн.

Задача 14

Для течения, определенного в задаче 13, покажите, что линеаризованные уравнения движения Эйлера имеют вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U_2 \frac{\partial u'}{\partial x} = -\rho_2^{-1} \nabla p' \quad \text{при } z > \zeta.$$

Задача 15

Для течения, определенного в задаче 13, докажите, что $\Delta p' = 0$ и возмущение вектора вихря удовлетворяет уравнению

$$\omega'(x, t) = \omega'(x - U_2 t, y, z) \quad \text{при } z > \zeta.$$

Влияет ли присутствие вихря в начальных возмущениях на критерий устойчивости?

Задача 16

Задано основное течение, скорость, плотность и давление для которого имеют вид

$$\vec{U}(z) = \begin{cases} U_2 \vec{i} + V_2 \vec{j}, \\ U_1 \vec{i} + V_1 \vec{j}, \end{cases} \quad \rho = \begin{cases} \rho_2, \\ \rho_1, \end{cases} \quad P = \begin{cases} p_0 - g\rho_2 z & \text{при } z > 0, \\ p_0 - g\rho_1 z & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Используя метод нормальных волн найдите декремент.

Задача 17

Основное стационарное течение однородной несжимаемой вязкой жидкости задано функциями

$$\vec{U} = \frac{2\Omega}{a^2 + b^2} (-a^2 y, b^2 x, 0), \quad P = \frac{2a^2 b^2 \rho \Omega^2 (x^2 + y^2)}{(a^2 + b^2)},$$

где a, b, ρ, Ω - положительные постоянные. Удовлетворяет ли это течение уравнениям Навье-Стокса?

Пусть возмущения скорости заданы в виде

$$\vec{u}' = \left(\frac{qz}{c} - \frac{ry}{b}, \frac{rx}{a} - \frac{pz}{c}, \frac{py}{b} - \frac{qx}{a} \right),$$

где $p = p(t), q = q(t), r = r(t)$. Получить линеаризованные уравнения для завихренности и выражения для комплексного декремента, используя методом нормальных волн.

Задача 18

Для течения, определенного в задаче 13 найти выражение для комплексного декремента, если между жидкостями имеется поверхностное натяжение γ .

§3. Конвекция Релея-Бенара

Тепловая конвекция

Имеется бесконечный слой жидкости, ограниченный неподвижными горизонтальными плоскостями $z_* = 0, z_* = d$, температура которых поддерживается постоянной и равной θ_1, θ_2 соответственно. В основном состоянии покоя температура распределяется за счет теплопроводности, а давление

является гидростатическим. Скорость, температура и давление, соответствующие основному течению, имеют вид

$$\mathbf{U}_*^{\Gamma} = 0, \Theta_* = \theta_0 - \beta z_*, P_* = p_0 - g\rho_0 \left(z_* + \frac{\alpha\beta}{2} z_*^2 \right), \quad 0 \leq z_* \leq d,$$

где $\beta = (\theta_0 - \theta_1)/d$, ρ_0 - средняя плотность, α - коэффициент теплового расширения жидкости.

Конвекцию в тонком слое моделируют при помощи уравнений движения, энергии и состояния для *жидкости Буссинеска*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_*^{\Gamma}}{\partial t_*} + \mathbf{u}_*^{\Gamma} \cdot \text{grad } \mathbf{u}_*^{\Gamma} &= -\text{grad} \left(\frac{p_*}{\rho_0} + gz_* \right) + \alpha g (\theta_* - \theta_0) \mathbf{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_*^{\Gamma}, \\ \text{div } \mathbf{u}_*^{\Gamma} &= 0, \\ \frac{\partial \theta_*}{\partial t_*} + \mathbf{u}_*^{\Gamma} \cdot \text{grad } \theta_* &= \chi \nabla^2 \theta_*, \end{aligned} \quad (7)$$

Звездочки в качестве нижних индексов используются для обозначения размерных зависимых и независимых переменных. Уравнение состояния жидкости имеет вид $\rho_* = \rho_0(1 - \alpha(\theta_* - \theta_0))$. Уравнения (7) называются *уравнениями Буссинеска*.

На неподвижной твердой поверхности задается граничное условие $\dot{\mathbf{u}} = 0$. Если имеется свободная поверхность, задаваемая уравнением $z_* = \text{const}$, то считаем ее горизонтальной и стационарной с нулевым *сдвиговым напряжением*, т. е.

$$w_* = \frac{\partial u_*}{\partial z_*} + \frac{\partial w_*}{\partial x_*} = \frac{\partial v_*}{\partial z_*} + \frac{\partial w_*}{\partial y_*} = 0.$$

Линеаризованная задача

Пусть

$$\mathbf{u}_*^{\Gamma} = \mathbf{u}'^{\Gamma}(\bar{x}_*, t_*), \theta_* = \Theta_*(z_*) + \theta'(\bar{x}_*, t_*), p_* = P_*(z_*) + p'(\bar{x}_*, t_*).$$

Линеаризуем уравнения Буссинеска (7) для малых возмущений. В безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \bar{x}^{\Gamma} &= \bar{x}_*^{\Gamma} / d, \quad t = \chi t_* / d^2, \quad \bar{u}^{\Gamma} = u_*^{\Gamma} d / \chi, \\ \theta &= \theta_*' / \beta d, \quad p = p_*' d^2 / \rho_0 \chi, \end{aligned}$$

получим задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla p + \text{Ra Pr } \theta \mathbf{k} + \text{Pr} \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} - w = \nabla \theta, \end{aligned} \quad (7)'$$

с граничными условиями $w = \partial w / \partial z = \theta = 0$ на твердой плоскости $z = \text{const}$ и $w = \partial^2 w / \partial z^2 = \theta = 0$ на свободной поверхности $z = \text{const}$. Полученная задача характеризуется следующими безразмерными параметрами: $\text{Ra} = \alpha \beta g d^4 / \chi \nu$ - число Релея и $\text{Pr} = \nu / \chi$ - число Прандтля.

Для завихренности $\bar{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ имеем уравнение

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = \text{Ra Pr } \nabla \theta \times \mathbf{k} + \text{Pr} \Delta \bar{\omega}.$$

Используя нормальные моды вида $(\theta, w) = (T(z), W(z)) f(x, y) e^{st}$, получим уравнение Гельмгольца для f :

$$\Delta_1 f + a^2 f = 0, \quad \Delta_1 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2. \quad (8)$$

Будем отождествлять a с горизонтальным волновым числом моды. В результате задача на собственные значения примет вид

$$\begin{aligned} (D^2 - a^2 - s)T &= -W, \\ (D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s/\text{Pr})W &= a^2 \text{Ra} T, \\ (D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s)(D^2 - a^2 - s/\text{Pr})W &= -a^2 \text{Ra} W, \\ D &= d/dz, \quad T = (a^2 \text{Ra})^{-1} (D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s/\text{Pr})W, \end{aligned} \quad (9)$$

с граничными условиями на идеальном проводнике $z = 0, 1$ в случае твердой границы $W = DW = T = 0$ или – в случае свободной границы.

Можно доказать, что для рассматриваемых задач справедлив принцип смены устойчивости: если $\text{Ra} < 0$, то $\text{Re}(\sigma) < 0$ и течение устойчиво, если же $\text{Ra} > 0$, то $\text{Im}(\sigma) = 0$. Нейтральная кривая определяется соотношением $\sigma = 0$. Граница устойчивости течения определяется точкой минимума Ra_k на нейтральной кривой (рис. 2). При $\text{Ra} < \text{Ra}_k$ имеет место устойчивость, а при $\text{Ra} > \text{Ra}_k$ - неустойчивость.

На рис. 2 построена нейтральная кривая - график зависимости критического числа Релея от безразмерного волнового числа.

Такой тип неустойчивости называют *конвективной неустойчивостью*, или неустойчивостью Релея-Бенара.

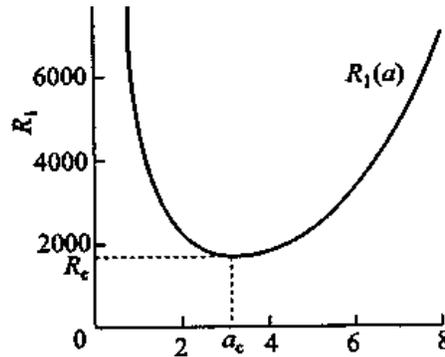


Рис. 2. Нейтральная кривая $Ra_1(a)$

Пример 5. Устойчивость течения в случае свободных границ. Решая третье уравнение системы (9) с граничными условиями в случае свободных идеально проводящих границ, ясно, что $W = W_n(z) = \sin n\pi z$, $s = s_n$ для $n = 1, 2, \dots$ и справедливо

$$(n^2\pi^2 + a^2)(n^2\pi^2 + a^2 + s_n)(n^2\pi^2 + a^2 + s_n / \text{Pr}) = a^2 \text{Ra}.$$

Отсюда получим явное выражение для s_n

$$s_n = -\frac{1}{2}(1 + \text{Pr})(n^2\pi^2 + a^2) \pm \left[\frac{1}{4}(\text{Pr} - 1)^2(n^2\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\alpha^2 \text{RaPr}}{(n^2\pi^2 + a^2)} \right]^{1/2}.$$

Если $\text{Ra} < 0$, то $\text{Re}(s_n) < 0$, и $s_n = 0$ на границе устойчивости при $\text{Ra} > 0$. Положив $s_n = 0$ в квадратном уравнении для s_n , найдем зависимость Ra , соответствующую нейтральной устойчивости моды с номером n , от волнового числа a : $\text{Ra}(a) = (n^2\pi^2 + a^2)^3 / a^2$. График кривой $\text{Ra}_1(a)$ изображен на рис. 2. Она называется нейтральной кривой, задающей границу между растущими и убывающими модами.

Для определения границы устойчивости течения находим минимум Ra_n для всех n , полагая $n = 1$ (для наименее устойчивой вертикальной моды), и затем берем минимум по всем горизонтальным волновым числам a . В результате получаем

$$Ra = \min_{-\infty < a < \infty} Ra_1(a^2) = 27\pi^4/4 = 657.5,$$

минимум достигается при $a = a_k = (\pi/2)^{1/2} = 2.221$. Отсюда следует, что $Ra < Ra_k$ имеет место устойчивость, а при $Ra > Ra_k$ - неустойчивость. Если Ra лишь немного превосходит Ra_k , то следует ожидать, что только мода с $n=1$ при $a \approx a_k$, и никакая другая, растет экспоненциально.

В случае двух твердых границ, а также твердой нижней границы и свободной верхней границы необходимы численные расчеты для нахождения Ra_k и a_k . Форма кривых $Ra = Ra_n(a)$ в каждом случае качественно подобна форме кривой $Ra = Ra_1(a)$ на рис. 2.

Размер ячеек определяется через горизонтальное волновое число a_k , а их форма – через решение уравнения Гельмгольца (8), которое является неопределенным в настоящей модели. Моделируя тонкий слой жидкости неограниченным слоем, ищем решение уравнений Гельмгольца, которые имеют вид мозаики на плоскости, состоящей из периодических ячеек.

Задача 19

Для задачи

$$\frac{dw}{dt} = -\nu d^{-2}w + \alpha g \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\chi d^{-2}\theta + \beta w$$

методом нормальных волн найдите декремент, при этом следует считать нормальные моды w, θ пропорциональными e^{st} . Докажите, что нулевое решение $w=0, \theta=0$ устойчиво, если число Релея $Ra = \alpha\beta g d^4 / \chi \nu > 1$.

Задача 20

Является ли функция $f(x, y) = \cos a_1 x \cos a_2 y$ решением уравнения Гельмгольца (8) при $a_1^2 + a_2^2 = a^2$. Какой период имеет функция f по переменным x и y ? Покажите, что f описывает движение внутри периодических ячеек с вертикальными границами и прямоугольным сечением, каждый прямоугольник имеет стороны длины $2\pi/a_1, 2\pi/a_1$.

Задача 21

Проверьте, является ли функция

$$f(x, y) = \cos \left[\frac{1}{2} a(3^{1/2} x + y) \right] + \cos \left[\frac{1}{2} a(3^{1/2} x - y) \right] + \cos ay$$

решением уравнения Гельмгольца (8). Какова форма регулярных ячеек?

Задача 22

Двумерная конвекция в бесконечном слое жидкости Буссинеска в пористой среде описывается следующими безразмерными уравнениями и граничными условиями

$$\Delta \psi = -Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{результат применения ротора к закону Дарси}),$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \nabla \theta \quad (\text{уравнение теплопроводности}),$$

$$\psi = 0, \quad \theta = -1 \quad \text{при } z = 1 \quad (\text{твердая идеально проводящая верхняя крышка}),$$

$$\psi = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (\text{твердая идеально проводящая нижняя крышка}),$$

Покажите, что $\Psi = 0$, $\Theta = -z$ описывают основное состояние покоя, представляющее собой однородное распределение тепла за счет теплопроводности от дна до вершины слоя. Линеаризуйте систему для возмущений $\psi = \Psi + \psi'$, $\theta = \Theta + \theta'$. Найдите спектральное соотношение для нормальных волн вида $\psi' = \hat{\psi}(z)e^{\sigma t + ikx}$, $\theta' = \hat{\theta}(z)e^{\sigma t + ikx}$.

Задача 23

Для основного течения, заданного в задаче 22, докажите что течение неустойчиво, если $Ra > Ra_k = 4\pi^2$.

Список литературы

1. Басниев К.С. Нефтегазовая гидромеханика: учеб. пособие для вузов / К.С. Басниев, Н.М. Дмитриев, Г.Д. Розенберг. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 544 с.
2. Басниев К.С. Подземная гидромеханика / К.С. Басниев, И.Н. Кочина, В.М. Максимов.- 1993. – 416 с.
3. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. – М.: Мир, 1971. 351 с.
4. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 287 с.

5. Евдокимова В.А., Кочина И.Н. Сборник задач по подземной гидравлике. М.: Недра, 1979. 200 с.
6. Йосс Ж, Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций М.: Мир, 1983. 304 с.
7. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости.-М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 195 с.
8. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина: учеб. пособие для университетов по специальности «Механика». – М.: Наука, 1977.– 664 с.
9. Прусов И.А. Двумерные краевые задачи фильтрации /И.А. Прусов. – Минск: Университетское, 1987. – 181 с.