

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный
аграрный университет»

Учетно-финансовый факультет
Кафедра статистики и прикладной математики

ЭКОНОМЕТРИКА

Методические рекомендации
к выполнению контрольной работы
для студентов-бакалавров заочной формы обучения
направления «Экономика»

Краснодар
КубГАУ
2015

Составители: П. С. Бондаренко, И. А. Кацко, В. И. Перцухов, А. Е. Сенникова, Т. В. Соловьева, Е. Д. Стеганцова, Т. Ю. Чернобыльская

Эконометрика : метод. рекомендации к выполнению контрольной работы / сост. П. С. Бондаренко [и др.]. – Краснодар : КубГАУ, 2015. – 74 с.

Методические рекомендации содержат задания к выполнению контрольной работы, а также примеры решения задач, позволяющие освоить учебный материал самостоятельно.

Предназначены для студентов-бакалавров заочной формы обучения направления 38.03.01 «Экономика».

Рассмотрено и одобрено методической комиссией учетно-финансового факультета Кубанского госагроуниверситета, протокол № 7 от 25.03.2015.

Председатель
методической комиссии

Ю. И. Сигидов

© ФГБОУ ВПО «Кубанский
государственный аграрный
университет», 2015

ВВЕДЕНИЕ

Успешная практическая деятельность специалиста экономического профиля все в большей мере зависит от рациональной организации сбора и обработки информации, от умения строить и анализировать эконометрические модели взаимосвязей экономических явлений и процессов. Совершенствование технологий получения, хранения и обработки данных – создание баз, хранилищ (банков) данных и знаний во всех сферах деятельности человека предъявляет новые требования к уровню подготовки специалистов. Большой объем информации, которой сопровождается деятельность практически любой организации, обычно содержит полезные сведения, благодаря которым можно значительно повысить эффективность работы, совершенствуя технологию, организацию, управление и т.д.

Методика получения, обработки и последующего анализа данных включает в себя описательную и аналитическую статистику, визуализацию данных и др.

Эконометрика – это наука, изучающая конкретные количественные закономерности и взаимосвязи экономических явлений, объектов и процессов с помощью статистических и математических методов и моделей. Она базируется на экономической теории, экономической статистике, статистико-математическом инструментарии. Эконометрика придает количественное выражение качественным закономерностям экономических явлений и процессов.

Задачи дисциплины:

а) освоение методов и приемов эконометрического анализа статистических данных;

б) изучение аппарата и техники разработки математических моделей связей и зависимостей между экономическими явлениями и процессами;

в) формирование навыков количественной оценки состояния, развития и прогнозирования социально-экономических явлений;

г) подготовка специалистов, обладающих навыками исследовательской деятельности.

Выделяется семь этапов построения эконометрической модели:

1. Постановка проблемы, исходя из целей и задач конкретного исследования. Выбор включаемых в модель переменных, взаимосвязи между которыми подлежат изучению.

2. Предварительный теоретический анализ сущности изучаемых явлений, по результатам которого формируется априорная информация и выдвигаются различные статистические гипотезы.

3. Информационный этап включает выбор объекта исследования, сбор необходимой информации и предварительный анализ ее качества. Определяются значения переменных по объектам наблюдения, моментам и периодам времени.

4. Спецификация модели заключается в обосновании общего вида модели, связывающей зависимые и независимые переменные (входные и выходные, экзогенные и эндогенные).

5. Идентификация модели включает ее статистический анализ и оценку параметров модели по имеющимся статистическим данным.

6. На этапе верификации модели осуществляется анализ ее точности и адекватности моделируемому явлению или процессу, строятся точечные и интервальные оценки (прогнозы) параметров эконометрической модели.

7. Проводится интерпретация полученных результатов и дается оценка возможности использования формализованных выводов в практических целях.

Основные разделы эконометрики: регрессионный анализ, анализ временных рядов, системы одновременных уравнений, статистические методы классификации и снижения размерно-

сти. Сферы применения: макроуровень (модели национальной экономики); мезоуровень (модели региональной экономики, отраслей, секторов); микроуровень (модели поведения потребителей, домашних хозяйств, фирм, предприятий). Эконометрику можно рассматривать как приложение методов математической статистики к изучению социально-экономических явлений, систем и процессов. Современные коммерческие организации интенсивно внедряют информационные базы, банки (хранилища) данных и знаний, многие из которых содержат средства интеллектуального анализа данных или предполагают возможность их применения. Изучение эконометрики является первым шагом к освоению современных компьютерных технологий интеллектуального анализа данных.

Выделяется три основных класса эконометрических моделей:

- регрессионные модели в виде одного уравнения, когда резульативный признак зависит от одного или множества факторов;

- модели временных рядов;

- системы одновременных уравнений.

Настоящие методические рекомендации предназначены для студентов экономических специальностей заочной формы обучения. Студент, на основании изучения рекомендуемой литературы, выполняет одну контрольную работу, которая представляется на кафедру до начала лабораторно-экзаменационной сессии в соответствии с указанным в таблице 1 вариантом. Контрольная работа, выполненная по другому варианту, не рецензируется.

Для самостоятельного изучения эконометрики рекомендуется следующая литература:

1. Афанасьев В. Н., Эконометрика / В. Н. Афанасьев, М. М. Юзбашев, Т. И. Гуляева. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 256 с.

2. Бондаренко П. С. Практикум по эконометрике: учебно-практ. пособие для бакалавров. / П. С. Бондаренко, И. А. Кацко и др. – Краснодар : КубГАУ, 2013. – 164 с.

3. Бородич С. А. Эконометрика: учеб. пособие / С.А. Бородич. – Мн. : Новое знание, 2001. – 408 с.

4. Доугерти К. Введение в эконометрику: учебник. / К. Доугерти. – 2-е изд.; пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 2007. – 432 с.

5. Кремер Н. Ш. Эконометрика: учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко. – М. : ЮНИТИ – ДАНА, 2007. – 311 с.

6. Магнус Я.Р. Эконометрика: начальный курс : учеб. / Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. – 4-е изд. – М. : Дело, 2004. – 576 с.

7. Мхитарян В.С. Эконометрика: учебник. / В. С. Мхитарян, М. Ю. Архипова и др. – М. : Проспект», 2009. – 384 с.

8. Практикум по эконометрике: учеб. пособие. / под ред. И. И. Елисеевой. – М. : Финансы и статистика, 2005. – 192 с.

9. Эконометрика: учебник для бакалавров / под ред. И. И. Елисеевой. – М. : Проспект, 2014. – 288 с.

10. Эконометрика: учебник. / И. И. Елисеева, С. В. Курышева, Т. В. Костеева и др.; под ред. И. И. Елисеевой. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика, 2007. – 576 с.

11. Яновский Л.П. Введение в эконометрику: учебное пособие / Л. П. Яновский, А. Г. Буховец. – 2-е изд. – КНОРУС, 2007. – 256 с.

Контрольная работа содержит три задания по основным темам. Задания выполняются в отдельной тетради. По каждому заданию записывается условие, проводятся подробные расчеты с необходимыми пояснениями, формулируются выводы по полученным результатам. В конце контрольной работы приводится список использованной литературы, ставится дата и подпись студента. Для облегчения выполнения кон-

контрольной работы по каждому заданию изложены необходимые краткие методические указания, приводится решение типовых задач, формулируются краткие выводы.

Все расчеты рекомендуется выполнять на компьютере с использованием табличного процессора *Microsoft Excel*. Можно использовать также эконометрические пакеты программ: *Statistika, Stata, IBM SPSS* и другие профессиональные пакеты.

Студентом контрольная работа выполняется по одному варианту заданий в соответствии с первой и второй буквой фамилии. Варианты и номера решаемых задач указаны в таблице 1.

Таблица 1 – Варианты и номера задач для выполнения контрольной работы

Первая буква фамилии студента	Вторая буква фамилии студента			
	А, Б, В, Г, Д, Е, Ё,	Ж, З, И, Й, К, Л, М	Н, О, П, Р, С, Т, У	Остальные буквы
А, Б	1, 31, 73	12, 42, 83	23, 53, 94	4, 64, 105
В, Г	2, 32, 73	13, 43, 84	24, 54, 95	5, 65, 106
Д, Е, Ё	3, 33, 74	14, 44, 85	25, 55, 96	6, 66, 107
Ж, З	4, 34, 75	15, 45, 86	26, 56, 97	7, 67, 108
И, Й, К	5, 35, 76	16, 46, 87	27, 57, 98	8, 68, 109
Л, М	6, 36, 77	17, 47, 88	28, 58, 99	9, 69, 110
Н, О	7, 37, 78	18, 48, 89	29, 59, 100	10, 70, 111
П, Р	8, 38, 79	19, 49, 90	30, 60, 101	12, 71, 112
С, Т	9, 39, 80	20, 50, 91	1, 61, 102	13, 31, 113
У, Ф, Х, Ц	10, 40, 81	21, 51, 92	2, 62, 103	14, 32, 114
Остальные буквы	11, 41, 82	22, 52, 93	3, 63, 104	15, 33, 115

1 Методические рекомендации к выполнению контрольной работы

1.1 Однофакторный корреляционно-регрессионный анализ

В эконометрике, для количественного описания взаимосвязей между экономическими переменными, широко используются методы регрессии и корреляции. В зависимости от количества факторов изучаемые признаки подразделяются на факторные (независимые) и результативные (зависимые). Факторные – это признаки, обуславливающие изменение результативного, зависимого признака. Результативный признак или зависимая переменная – это признак, изменяющийся под влиянием факторных признаков, обозначается Y . Факторные признаки или независимые переменные обозначаются X_j , $j=1, 2, 3, \dots, p$, где p – число факторов.

Если на изменение результативного признака Y оказывает влияние один (основной, доминирующий) фактор, то связь называется парной. Соответственно регрессионный анализ связи Y от X называется однофакторным.

Уравнение связи между двумя переменными имеет вид $y = f(x)$, где y – зависимая переменная (результативный признак); x – независимая переменная (факторный признак). Реальные наблюдения, в силу неучтенных факторов, отличаются от теоретического значения y на величину ε – случайную ошибку.

Уравнения регрессии подразделяются на линейные и нелинейные. Модель линейной регрессии имеет следующий вид:

$$y = a + bx + \varepsilon, \quad (1.1)$$

где ε – случайный член, характеризующий отклонение фактически наблюдаемых значений результативного признака от значений, найденных по уровню регрессии;
 a и b – параметры уравнения регрессии.

Вид функции $f(x)$ подбирается на основе теоретического анализа сущности изучаемых явлений и процессов. Обычно используют графическое отображение пар наблюдений на плоскости. В исследованиях наиболее часто применяется линейная форма связи между двумя переменными вследствие наглядности и четкой экономической интерпретации параметров уравнения. Модель линейной регрессии имеет вид:

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i, \text{ где } i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2)$$

где y_i – наблюдаемые значения результативного признака по i -й единице совокупности;

x_i – наблюдаемые значения факторного признака по i -й единице совокупности;

n – число единиц изучаемой совокупности объектов или явлений.

На практике часто применяются нелинейные модели, которые подразделяются на два класса.

Нелинейные модели по объясняющим переменным:

$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k + \varepsilon$ – полином k -го порядка;

$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$ – гипербола;

Нелинейные модели по оцениваемым параметрам:

$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$ – степенная;

$y = a \cdot e^{bx}$ – экспоненциальная;

$y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$ – показательная;

$$y = \frac{1}{a + b_0 \cdot b_1^{x+\varepsilon}} - \text{логистическая.}$$

Выбор конкретной математической модели осуществляется графическим, аналитическим или экспериментальным методами.

Большинство нелинейных моделей с помощью соответствующих преобразований обычно удается привести к линейной модели, т.е. линеаризовать. Если же модель внутренне нелинейная по параметрам, то для оценки ее параметров используют итеративные методы.

Таблица 2 – Линеаризующие преобразования нелинейных моделей

№ п/п	Функция	Линеаризующие преобразования			
		переменных		выражения для величин a и b	
		y'	x'	a'	b'
1	$y = a + b/x$	y	$1/x$	a	b
2	$y = 1/(a + bx)$	$1/y$	x	a	b
3	$y = x/(a + bx)$	x/y	x	a	b
4	$y = ab^x$	$\lg y$	x	$\lg a$	$\lg b$
5	$y = ae^{bx}$	$\ln y$	x	$\ln a$	b
6	$y = 1/(a + be^{-x})$	$1/y$	e^{-x}	a	b
7	$y = ax^b$	$\lg y$	$\lg x$	$\lg a$	b
8	$y = a + b \lg x$	y	$\lg x$	a	b
9	$y = a/(b + x)$	$1/y$	x	b/a	$1/a$
10	$y = ax/(b + x)$	$1/y$	$1/x$	b/a	$1/a$
11	$y = ae^{b/x}$	$\ln y$	$1/x$	$\ln a$	b
12	$y = a + bx^n$	y	x^n	a	b

Задачами корреляционно-регрессионного анализа являются: установление типа уравнения регрессии; определение

параметров уравнения и оценка и их значимости; оценка тесноты и значимости связи между переменными; определение точечных и интервальных прогнозных значений зависимой переменной.

Корреляционно-регрессионный анализ проводится в определенной последовательности:

1. Исходя из целей и задач исследования, устанавливаются результативный и факторные признаки, значения которых определяются по совокупности заданных объектов.

2. Выбирается модель уравнения регрессии, обычно графическим способом. Для этого в прямоугольной системе координат строится график зависимости между переменными X и Y . На оси абсцисс откладываются значения факторного признака X , а по оси ординат – результативного признака Y с соблюдением масштаба. На основе вида корреляционного поля делаются выводы о направлении и возможной функциональной форме связи между факторным и результативным признаками (прямая связь или обратная, линейная или нелинейная).

3. Для линейных и нелинейных уравнений, приводимых к линейному виду, методом наименьших квадратов определяются параметры уравнения регрессии. Для этого составляется и решается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \Sigma y = na + b\Sigma x, \\ \Sigma yx = a\Sigma x + b\Sigma x^2. \end{cases} \quad (1.3)$$

Параметры уравнения линейной регрессии также можно найти по формулам, вытекающим из системы нормальных уравнений:

$$b = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{x^2 - (\bar{x})^2}, \quad a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}. \quad (1.4)$$

Коэффициент регрессии линейного уравнения b показывает на сколько единиц в среднем изменится результативный признак Y при изменении факторного признака X на единицу.

4. Качество уравнения регрессии оценивается с помощью средней ошибки аппроксимации:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \cdot 100 \% ; \quad (1.5)$$

Качество уравнения регрессии считается хорошим, если средняя ошибка аппроксимации составляет менее 10–12 %.

5. Корреляционная зависимость между переменными величинами – это функциональная зависимость между значениями одной из них и групповыми средними другой. Теснота связи при линейной зависимости характеризуется выборочным коэффициентом корреляции (r), который определяется по формуле:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} , \quad (1.6)$$
$$-1 \leq r \leq 1,$$

где σ_x и σ_y – средние квадратические отклонения по X и по Y .

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} ; \quad \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} . \quad (1.7)$$

Чем ближе значение коэффициента корреляции к нулю, тем связь между признаками слабее, а чем ближе к единице, тем связь сильнее. Если $|r| = 1$, то связь линейная и функциональная. Если $r = 0$, то признаки линейно независимы. Коэффициент корреляции также показывает направление связи между признаками. Если $r > 0$, то связь прямая, а если $r < 0$, то – обратная.

При нелинейной зависимости теснота связи между переменными X и Y определяется с помощью индекса корреляции:

$$R_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_y^2}}. \quad (1.8)$$

Квадрат коэффициента (индекса) корреляции называется коэффициентом (индексом) детерминации.

$$D = r^2 \cdot 100 \%. \quad (1.9)$$

Коэффициент детерминации D показывает долю влияния фактора X на результативную переменную Y , а $(100 \% - D)$ – долю влияния других, неучтенных в модели факторов.

6. Средний коэффициент эластичности определяется по формуле:

$$\bar{\varepsilon} = f'(x) \frac{\bar{x}}{\bar{y}}. \quad (1.10)$$

При линейной форме связи он находится по формуле:

$$\bar{\varepsilon} = b \frac{\bar{x}}{\bar{y}}, \quad (1.11)$$

где \bar{X} и \bar{Y} – средние значения признаков;

b – коэффициент регрессии.

Средний коэффициент эластичности показывает, что при увеличении фактора X на 1 %, результативная переменная Y в среднем изменяется на величину коэффициента эластичности.

7. Оценка статистической значимости построенной модели регрессии в целом производится с использованием крите-

рия F -Фишера. Рассматриваются нулевая гипотеза $H_0 : r^2 = 0$ и альтернативная ей гипотеза $H_1 : r^2 \neq 0$.

Наблюдаемое (фактическое) значение F – критерия находится по формуле:

$$F_n = \frac{r^2}{1-r^2} \left(\frac{n-m-1}{m} \right); \quad (1.12)$$

где m – число параметров при переменной x ;

n – число наблюдений.

Для однофакторного линейного уравнения регрессии расчет F_n производится по формуле:

$$F_n = \frac{r^2}{1-r^2} (n - 2). \quad (1.13)$$

Критическое (табличное) значение $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$ находится по таблице Фишера-Снедекора, при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы $k_1=m; k_2=n-m-1$. В случае парной регрессии число степеней свободы $k_1=1; k_2=n-2$.

Если $F_n > F_{кр}$, то нулевая гипотеза отклоняется и принимается альтернативная ей гипотеза о статистической значимости уравнения регрессии, в противном случае уравнение регрессии статистически незначимо.

8. Так как обычно регрессионный анализ зависимости между признаками проводится по выборочным данным, то проверяется значимость величины выборочного коэффициента корреляции, а также параметров уравнения регрессии a и b с использованием критерия t -Стьюдента при заданном уровне значимости α .

Находится наблюдаемое значение t для параметров a и b :

$$t_a = \frac{a}{m_a}; \quad m_a = \frac{\sigma_{ocm} \sqrt{\sum x^2}}{n\sigma_x}; \quad (1.14)$$

$$t_b = \frac{b}{m_b}; \quad m_b = \frac{\sigma_{ocm}}{\bar{\sigma}_x \sqrt{n}}. \quad (1.15)$$

По таблице значений t -Стьюдента определяется критическое значение $t_{кр.}$. Если $t_n > t_{кр.}$, то основную гипотезу отвергаем и принимаем альтернативную гипотезу и коэффициенты уравнения регрессии a и b считаются статистически значимы при заданном уровне значимости α . В противном случае основную гипотезу о не значимости параметров уравнения регрессии a и b принимаем.

Для проверки значимости коэффициента корреляции выдвигаем нулевую гипотезу $H_0 : r_2 = 0$ – коэффициент корреляции в генеральной совокупности равен нулю и изучаемый фактор не оказывает существенного влияния на результативный признак, при альтернативной гипотезе $H_1 : r_2 \neq 0$ – коэффициент корреляции в генеральной совокупности значительно отличается от нуля при заданном уровне значимости α .

Для проверки нулевой гипотезы применяется критерий t -Стьюдента и определяется наблюдаемое значение t -критерия:

$$t_n = |r| \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}. \quad (1.16)$$

Критическое значение $t_{кр}$ находится по таблице распределения t -Стьюдента при уровне значимости α и числе степеней свободы $k = n-2$ для двухсторонней критической области.

Сравнивается t_n и $t_{кр.}$. Если $t_n > t_{кр.}$, то нулевая гипотеза отвергается и коэффициент корреляции r существенно отличается от нуля в генеральной совокупности. Если $t_n < t_{кр.}$,

то принимаем основную гипотезу о не значимости коэффициент корреляции r .

При парной линейной зависимости оценка значимости всего уравнения, коэффициентов корреляции и регрессии дает одинаковые результаты, так как $t_b^2 = t_r^2 = F$ (незначительные отличия объясняются ошибками округлений).

9. Рассчитывается доверительный интервал для параметров a и b . Для этого определяется предельная ошибка для каждого параметра:

$$\Delta_a = t \cdot \hat{m}_a; \quad \Delta_b = t \cdot \hat{m}_b. \quad (1.17)$$

Доверительные интервалы для параметров a и b определяются по следующим формулам:

$$\gamma_{a_{min}} = a - \Delta_a; \quad \gamma_{a_{max}} = a + \Delta_a; \quad (1.18)$$

$$\gamma_{b_{min}} = b - \Delta_b; \quad \gamma_{b_{max}} = b + \Delta_b. \quad (1.19)$$

Если ноль попадает в границы доверительных интервалов, т. е. нижняя граница отрицательна, а верхняя положительна, то оцениваемый параметр с заданной доверительной вероятностью является статистически незначимым. В противном случае принимается статистическая значимость оцениваемого параметра.

10. Прогнозное значение результативного признака определяется путем подстановки в построенное парное линейное уравнение регрессии прогнозного значения факторного признака x_p :

$$\hat{y}_p = a + b x. \quad (1.20)$$

11. Для нахождения доверительного интервала прогноза определяется средняя и предельная ошибки прогноза:

$$m_{\hat{y}_p} = \sigma_{ocm} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_p)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (1.21)$$

Средняя ошибка индивидуального значения y находится по формуле:

$$m_{\hat{y}_p} = \sigma_{ocm} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_p)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (1.22)$$

где $\sigma_{ocm} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y})^2}{n - m - 1}}$; $\Delta_{\hat{y}_p} = t_{кр} \cdot \hat{m}_{y_p}$. (1.23)

Определим границы доверительного интервала прогноза:

$$y_{ур\min} = \hat{y}_p - \Delta_{\hat{y}_p}; \quad y_{ур\max} = \hat{y}_p + \Delta_{\hat{y}_p}. \quad (1.24)$$

По доверительному интервалу прогноза оценивается статистическая значимость и надежность прогноза при заданном уровне значимости α .

Замечание. Корреляционно-регрессионный анализ можно осуществить в табличном процессоре *Excel*.

Пример 1. Имеются выборочные данные по 20 сельскохозяйственным предприятиям центральной зоны Краснодарского края за 2013 г. (таблица 3).

Требуется выполнить следующие задания.

1. Построить график зависимости между переменными, по которому необходимо подобрать модель уравнения ре-

грессии, используя следующие наиболее часто применяемые функции:

- а) линейную,
- б) степенную,
- в) экспоненциальную,
- г) показательную,
- д) равнобочной гиперболы,
- е) полиномиальную.

2. Рассчитать параметры выбранного уравнения регрессии методом наименьших квадратов.

3. Оценить качество уравнения регрессии с помощью средней ошибки аппроксимации.

4. Найти коэффициент эластичности.

5. Оценить тесноту связи между переменными с помощью показателей корреляции и детерминации.

6. Оценить значимость коэффициентов корреляции и регрессии по критерию t -Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

7. Охарактеризовать статистическую надежность результатов регрессионного анализа с использованием критерия F -Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

8. Определить прогнозное значение результативного признака, если возможное значение факторного признака составит 1,25 от его среднего уровня по совокупности.

Таблица 3 – Среднегодовая стоимость основных фондов и выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий по сельскохозяйственным организациям

№ п/п	Стоимость основных фондов на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб. (X)	Выручка от реализации на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб. (Y)
1	44,9	37,8
2	69,3	60,7
3	22,7	36,8
4	21,6	41,4
5	26,9	40,0
6	29,5	42,3
7	61,2	42,6
8	59,9	45,2
9	60,1	49,6
10	71,7	57,2
11	48,5	41,7
12	50,3	47,5
13	21,4	30,4
14	40,1	38,0
15	55,0	54,5
16	59,2	44,4
17	40,1	38,2
18	45,3	38,5
19	29,1	35,9
20	21,3	35,7

Решение

1. График зависимости переменных X и Y строится в прямоугольной системе координат. На оси абсцисс откладываются значения факторного признака X , а по оси ординат – результативного признака Y .

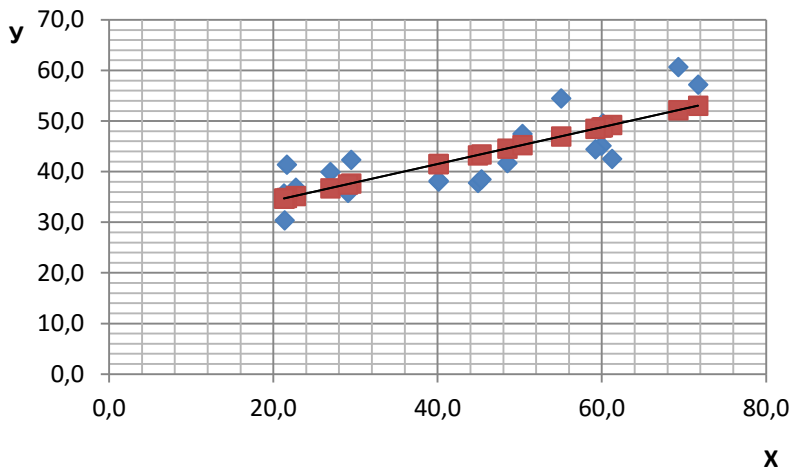


Рисунок 1 – Зависимость выручки от реализации продукции на 1 га сельхозугодий от уровня фондообеспеченности

Характер расположения точек на графике показывает, что связь между переменными может выражаться линейным уравнением регрессии:

$$\hat{y}_x = a + bx. \quad (1.25)$$

2. Параметры уравнения регрессии находятся методом наименьших квадратов, путем составления и решения следующей системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} n \cdot a + b \cdot \sum x = \sum y, \\ a \cdot \sum x + b \cdot \sum x^2 = \sum xy. \end{cases} \quad (1.26)$$

Для проведения всех расчетов строится вспомогательная таблица 4, расчеты в которой могут быть проведены как без применения средств вычислительной техники, так и с ее при-

менением. В таблице 4 все средние значения находятся по формуле средней арифметической простой: $\bar{x} = \sum x : n$.

Таблица 4 – Результаты вычислений в Excel

№ п/п	X	Y	X ²	Y ²	XY	Ŷ	Y-Ŷ	(Y - Ŷ) ²	$\left \frac{Y-\hat{Y}}{Y} \right \cdot 100$
1	44,9	37,8	2016,01	1428,84	1697,22	43,2835	-5,4835	30,0688	14,5066
2	69,3	60,7	4802,49	3684,49	4206,51	52,1895	8,5105	72,4286	14,0206
3	22,7	36,8	515,29	1354,24	835,36	35,1805	1,6195	2,6228	4,4008
4	21,6	41,4	466,56	1713,96	894,24	34,7790	6,6210	43,8376	15,9928
5	26,9	40	723,61	1600	1076	36,7135	3,2865	10,8011	8,2163
6	29,5	42,3	870,25	1789,29	1247,85	37,6625	4,6375	21,5064	10,9634
7	61,2	42,6	3745,44	1814,76	2607,12	49,2330	-6,6330	43,9967	15,5704
8	59,9	45,2	3588,01	2043,04	2707,48	48,7585	-3,5585	12,6629	7,8728
9	60,1	49,6	3612,01	2460,16	2980,96	48,8315	0,7685	0,5906	1,5494
10	71,7	57,2	5140,89	3271,84	4101,24	53,0655	4,1345	17,0941	7,2281
11	48,5	41,7	2352,25	1738,89	2022,45	44,5975	-2,8975	8,3955	6,9484
12	50,3	47,5	2530,09	2256,25	2389,25	45,2545	2,2455	5,0423	4,7274
13	21,4	30,4	457,96	924,16	650,56	34,7060	-4,3060	18,5416	14,1645
14	40,1	38	1608,01	1444	1523,8	41,5315	-3,5315	12,4715	9,2934
15	55	54,5	3025	2970,25	2997,5	46,9700	7,5300	56,7009	13,8165
16	59,2	44,4	3504,64	1971,36	2628,48	48,5030	-4,1030	16,8346	9,2410
17	40,1	38,2	1608,01	1459,24	1531,82	41,5315	-3,3315	11,0989	8,7212
18	45,3	38,5	2052,09	1482,25	1744,05	43,4295	-4,9295	24,3000	12,8039
19	29,1	35,9	846,81	1288,81	1044,69	37,5165	-1,6165	2,6131	4,5028
20	21,3	35,7	453,69	1274,49	760,41	34,6695	1,0305	1,0619	2,8866
Итого	878,1	858,4	43919,1	37970,3	39647,0	858,4	–	412,6699	187,4268
Среднее значение	43,905	42,92	2195,96	1898,52	1982,35	–	–	–	9,3713

Подставим полученные суммы в систему уравнений, учитывая, что $n = 20$.

$$\begin{cases} 20 \cdot a + 878,1 \cdot b = 858,4, \\ 878,1 \cdot a + 43919,1 \cdot b = 39646,99. \end{cases}$$

Решив систему, например, по формулам Крамера, получим $a = 26,892$; $b = 0,365$.

Параметры уравнения регрессии также можно найти по формулам, вытекающим из системы нормальных уравнений:

$$b = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \quad a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}. \quad (1.27)$$

Небольшие расхождения в результатах расчетов могут происходить за счет округления средних значений во втором случае.

Таким образом, уравнение регрессии имеет вид:

$$\hat{y}_x = 26,892 + 0,365 \cdot x.$$

Замечание. Расчет данных в вспомогательной таблице можно осуществить в табличном процессоре *Excel*. Если исходные данные (x и y) приведены в виде, представленном в таблице 4, то для расчетов можно воспользоваться следующей последовательностью действий (возможны альтернативы):

1) введем для расчета остальных значений таблицы 4 следующие формулы в соответствующие ячейки (ввод – *Enter*): $D2: =B2^2$; $E2: =C2^2$; $F2: =B2*C2$;

2) выделим диапазон ячеек $B2:F2$ и протащим с помощью маркера заполнения до строки 21;

3) для вычисления сумм введем формулу в ячейку $B22: =СУММ(B2:B21)$, и протащим с помощью маркера заполнения для диапазона $B21:F21$;

4) для расчета средних введем формулу в ячейке $B23: =B22/20$ и скопируем с помощью маркера заполнения для диапазона $B23:F23$;

5) после расчета параметров уравнения парной регрессии: $G2: =0,365*B2+26,892$;

6) $H2: =C2-G2$;

7) $I2:=H2^2$;

8) $J2:=ABS(H2/C2)*100$;

9) выделяется диапазон $G2:J2$ и с помощью маркера заполнения копируется до 21 строки;

10) для столбцов I и J находятся суммы и средние значения (см. выше).

Коэффициент регрессии (b) показывает, что при увеличении среднегодовой стоимости основных фондов на 1 тыс. руб. в расчете на 1 га сельскохозяйственных угодий выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий в сельскохозяйственных организациях в среднем увеличивается на 365 руб. Если в уравнение регрессии подставить фактические значения переменной X , то определяются возможные (теоретические) значения переменной \hat{Y} , которые наносятся на график в виде прямой.

3. Качество уравнения регрессии оценивается с помощью средней ошибки аппроксимации:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \cdot 100 = \frac{187,4268}{20} = 9,4 \%$$

Значит, фактические значения стоимости реализованной продукции на 1 га сельхозугодий от расчетных значений, найденных по уравнению регрессии, в среднем различаются на 9,4%. Полученное уравнение регрессии можно оценить как достаточно хорошее.

4. Средний коэффициент эластичности при линейной форме связи находится по формуле: $\Theta = b \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$, где \bar{X} и \bar{Y} – средние значения признаков.

$$\Theta = 0,365 \cdot \frac{43,905}{42,92} = 0,373.$$

Коэффициент эластичности показывает, что при увеличении фондообеспеченности сельскохозяйственных организаций на 1 % выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий в среднем возрастает на 0,37 %.

5. При линейной зависимости теснота связи между переменными X и Y определяется с помощью коэффициента корреляции:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad (1.28)$$

где σ_x и σ_y – средние квадратические отклонения по X и Y .

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{2195,956 - 43,905^2} = \sqrt{268,307} = 16,38;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{1898,516 - 42,92^2} = \sqrt{56,39} = 7,509;$$

$$r = \frac{1982,35 - 43,905 \cdot 42,92}{16,38 \cdot 7,509} = 0,796.$$

Так как значение коэффициента корреляции довольно близко к единице, то между признаками связь тесная и прямая.

Коэффициент детерминации $r^2 = 0,796^2 = 0,634$ показывает, что 63,4 % различий в стоимости реализованной продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий между организациями объясняется вариацией фондообеспеченности, а 36,6 % другими, неучтенными факторами.

6. Так как исходные данные обычно являются выборочными, то необходимо оценить существенность или значимость величины коэффициента корреляции. Выдвигаем нулевую гипотезу: коэффициент корреляции в генеральной сово-

купности равен нулю и изучаемый фактор не оказывает существенного влияния на результивный признак:
 $H_0 : r_2 = 0$, при $H_1 : r_2 \neq 0$.

Для проверки нулевой гипотезы применим критерий t -Стьюдента. Найдем наблюдаемое значение t -критерия:

$$t_n = |r| \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0,796 \sqrt{\frac{20-2}{1-0,634}} = 5,58.$$

Критическое значение t находится по таблицам распределения t -Стьюдента при уровне значимости $\alpha=0,05$ и числе степеней свободы $k = n-2 = 20-2 = 18$ для двухсторонней критической области, $t_{кр} = 2,10$. Сравниваем t_n с $t_{кр}$. Так как $t_n > t_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается, коэффициент корреляции существенно отличен от нуля в генеральной совокупности. Значит, фондообеспеченность оказывает статистически существенное влияние на выручку от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий.

Статистическая значимость коэффициента регрессии также проводится с использованием критерия t -Стьюдента.

Находится наблюдаемое значение критерия:

$$t_n = \frac{b}{m_b}; m_b = \sqrt{\frac{\sum(y - \hat{y})^2}{(n-2) \cdot \sigma_x^2 \cdot n}} = \sqrt{\frac{412,6699}{(20-2) \cdot 268,307 \cdot 20}} \approx 0,0654.$$

$$t_n = \frac{0,365}{0,0654} = 5,58.$$

Критическое значение t также равно 2,10. Так как $t_n > t_{кр}$, то коэффициент регрессии статистически значим. Подтверждается вывод о значимости влияния фондообеспеченности на стоимость реализованной продукции.

7. Статистическая надежность уравнения регрессии проверяется с использованием критерия F -Фишера – рассматри-

вается нулевая гипотеза $H_0: r^2 = 0$, при альтернативной $H_1: r^2 \neq 0$ (или нулевая гипотеза $H_0: b = 0$, при $H_1: b \neq 0$). Наблюдаемое (фактическое) значение F -критерия находится по формуле:

$$F_H = \frac{\Sigma(\hat{y} - \bar{y})^2 / m}{\Sigma(y - \hat{y})^2 / (n - m - 1)}, \quad (1.29)$$

где m – число параметров при переменных X ;
 n – число наблюдений.

Если применяется линейное уравнение регрессии, то расчет F_H упрощается.

$$F_H = \frac{r^2}{1 - r^2} (n - 2) = \frac{0,634}{1 - 0,634} \cdot 18 = 31,18.$$

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $k_1 = m = 1, k_2 = n - m - 1 = 20 - 1 - 1 = 20 - 2 = 18$ по таблице находится критическое значение F -критерия.

$F_{кр} = F_{\alpha=0,05}(k_1 = 1, k_2 = 18) = 4,41$. Так как $F_H > F_{кр}$, то уравнение регрессии статистически значимое или надежное.

При парной линейной зависимости оценка значимости всего уравнения, коэффициентов корреляции и регрессии дает одинаковые результаты, так как $t_b^2 = t_r^2 = F$ (наблюдаемые отличия объясняются ошибками округлений).

8. Прогнозное значение результативного признака определяется путем подстановки в уравнение регрессии прогнозного или возможного значения факторного признака (x_p).

По условию $x_p = \bar{x} \cdot 1,25 = 43,905 \cdot 1,25 = 54,88$.

Тогда прогнозное значение выручки от реализации продукции составит:

$$\hat{y}_p = 26,895 + 0,365 \cdot 54,88 = 46,926.$$

Значит, при фондообеспеченности в 54,9 тыс. руб. возможная выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий составит 46,9 тыс. руб.

1.2 Множественный корреляционно-регрессионный анализ

В экономических исследованиях результативный признак Y формируется, как правило, под влиянием не одного, а нескольких факторных признаков X_1, X_2, \dots, X_p . Уравнение множественной регрессии в таком случае имеет вид:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p, e).$$

В зависимости от вида функции используются как линейные, так и нелинейные модели. Линейная модель множественной регрессии с несколькими переменными имеет вид:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p + e, \quad (2.1)$$

где $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ – параметры модели,
 e – случайные отклонения или остаток,
 p – количество переменных.

Наиболее распространенным методом оценивания параметров линейных эконометрических моделей является метод наименьших квадратов. Его идея сводится к выбору таких значений оценок b_0, b_1, \dots, b_p структурных параметров

ε – вектор-столбец остаточных значений результативного признака размерности $(n \times 1)$.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}; \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{p1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Тогда оценки параметров линейной модели b находятся из выражения:

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (2.7)$$

где X^T – транспонированная матрица X ;
 $(X^T X)^{-1}$ – обратная матрица.

Множественный коэффициент регрессии (b_j) показывает, на сколько единиц изменяется в среднем результативный признак Y , если j -й факторный признак X_j увеличить на единицу при условии, что все другие факторы в линейной модели закреплены на постоянном, обычно среднем, уровне.

Уравнение множественной регрессии может быть построено в стандартизованном масштабе, когда единицей измерения признаков принимается их среднее квадратическое отклонение:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \dots + \beta_p t_{x_p}. \quad (2.8)$$

$$t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}, \quad t_{x_j} = \frac{x_j - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}},$$

где β_j – стандартизованные коэффициенты регрессии.

Параметры уравнения регрессии определяются методом наименьших квадратов путем составления и решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} r_{yx_1} = \beta_1 + \beta_2 r_{x_1 x_2} + \dots + \beta_p r_{x_1 x_p} \\ r_{yx_2} = \beta_1 r_{x_1 x_2} + \beta_2 + \dots + \beta_p r_{x_2 x_p} \\ \dots \\ r_{yx_p} = \beta_1 r_{x_1 x_p} + \beta_2 r_{x_2 x_p} + \dots + \beta_p \end{cases} \quad (2.9)$$

Зная стандартизованные коэффициенты можно получить множественные коэффициенты регрессии:

$$b_j = \beta_j \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 - \dots - b_p \bar{x}_p. \quad (2.10)$$

По абсолютной величине -коэффициентов судят об относительной силе влияния факторов на изменение результативного признака. Для характеристики силы влияния факторов на результативный признак используется также коэффициент эластичности, который представляет отношение прироста результативного признака Y к приросту факторного признака X_j :

$$\mathcal{E}_{x_j} = \frac{dy}{\hat{y}} : \frac{dx_j}{x_j} = \frac{dy}{dx_j} \cdot \frac{x_j}{\hat{y}}. \quad (2.11)$$

По линейной модели множественной регрессии коэффициент эластичности определяется по формуле:

$$\mathcal{E}_{x_j} = b_j \frac{x_j}{b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \dots + b_p x_{ip}}. \quad (2.12)$$

Если в этой формуле значения факторов взять на среднем уровне, то будет получен средний коэффициент эластичности, который показывает, на сколько процентов в среднем

изменится результативный признак, если j -й фактор увеличить на один процент, при условии что все другие факторы закреплены на среднем уровне.

$$\bar{\varepsilon}_{x_j} = b_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}. \quad (2.13)$$

Для оценки тесноты связи между признаками применяются парные, частные и множественные коэффициенты (индексы) корреляции и детерминации.

Множественный коэффициент (индекс) корреляции ($R_{yx_1x_2\dots x_p}$) характеризует совместное влияние всех факторов, включенных в уравнение регрессии. Он рассчитывается по следующим формулам:

$$R_{yx_1x_2\dots x_p} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{ост.}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_{рег.}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum_i^n (y - \hat{y}_{x_1x_2\dots x_p})^2}{\sum_i^n (y - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{SS_{ост.}}{SS_{общ.}}}, \quad (2.14)$$

где σ_y^2 – общая дисперсия результативного признака,

$\sigma_{рег.}^2$ – дисперсия, объяснимая регрессией,

$\sigma_{ост.}^2$ – остаточная дисперсия, причем

$$\sigma_y^2 = \sigma_{рег.}^2 + \sigma_{ост.}^2; \quad \sigma_y^2 = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}; \quad \sigma_{рег.}^2 = \frac{\sum (\hat{y} - \bar{y})^2}{n}; \quad \sigma_{ост.}^2 = \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n}.$$

$$SS_{общ.} = SS_{факт.} + SS_{ост.};$$

$$\sum (y - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2 + \sum (y - \hat{y})^2, \quad (2.15)$$

где $SS_{общ.}$ – общая сумма квадратов отклонений результативного признака;

$SS_{факт.}$ – факторная сумма квадратов отклонений;

$SS_{ост.}$ – остаточная сумма квадратов отклонений.

Квадрат множественного коэффициента (индекса) корреляции называется множественным коэффициентом (индексом) детерминации. Он показывает, какая часть вариации результативного признака объясняется влиянием факторов, включенных в уравнение регрессии. Если используется линейное уравнение множественной регрессии в стандартизованном масштабе, то множественный коэффициент детерминации рассчитывается по формуле:

$$R_{yx_1x_2\dots x_p}^2 = \beta_1 r_{yx_1} + \beta_2 r_{yx_2} + \dots + \beta_p r_{yx_p} = \sum \beta_j r_{x_j}. \quad (2.16)$$

Частные коэффициенты корреляции, характеризующие тесноту связи между фактором x_j и результативным признаком, при исключении влияния других факторов, включенных в модель, определяется по формулам:

$$r_{yx_j \cdot x_1x_2\dots x_{j-1}x_{j+1}\dots x_p} = \sqrt{1 - \frac{1 - R_{yx_1x_2\dots x_j\dots x_p}^2}{1 - R_{yx_1x_2\dots x_{j-1}x_{j+1}\dots x_p}^2}}, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} r_{yx_j \cdot x_1x_2\dots x_{j-1}x_{j+1}\dots x_p} &= \\ &= \frac{r_{yx_j \cdot x_1x_2\dots x_{j-1}x_{j+1}\dots x_{p-1}} - r_{yx_p \cdot x_1x_2\dots x_{j-1}x_{j+1}\dots x_{p-1}} \cdot r_{x_j x_p \cdot x_1\dots x_{j-1}x_{j+1}\dots x_{p-1}}}{\sqrt{(1 - r_{yx_p \cdot x_1x_2\dots x_{j-1}x_{j+1}\dots x_{p-1}}^2)(1 - r_{x_j x_p \cdot x_1\dots x_{j-1}x_{j+1}\dots x_{p-1}}^2)}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

В формуле частные коэффициенты корреляции j -го порядка рассчитываются через частные коэффициенты корреляции $(j-1)$ -го порядка. Значения частных коэффициентов корреляции изменяются от -1 до 1 . Они могут быть использованы при отсеке несущественно влияющих факторов.

С учетом поправки на число степеней свободы рассчитывается скорректированный коэффициент (индекс) множественной корреляции:

$$R_{ск}^2 = 1 - \frac{\sum (y - \hat{y})^2 : (n - m - 1)}{\sum Y - \bar{y})^2 : (n - 1)}, \quad (2.19)$$

$$R_{ск}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{(n-1)}{(n-m-1)}, \quad (2.20)$$

где m – число параметров уравнения регрессии без учета свободного члена. В линейном уравнении $m = p$.

Оценка значимости множественного уравнения регрессии производится с помощью F -критерия Фишера-Снедекора.

Определяется наблюдаемое значение критерия по следующей формуле:

$$F_n = \frac{SS_{факт.}}{m} \cdot \frac{SS_{осм.}}{n-m-1} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}. \quad (2.21)$$

При заданном уровне значимости α и числе степеней свободы факторной (k_1) и остаточной дисперсий (k_2) по таблицам находится критическое значение критерия Фишера-Снедекора. Сравнивается наблюдаемое и критическое значения критерия. Если $F_n < F_{кр}$, то нулевая гипотеза о незначимости уравнения регрессии принимается. Если $F_n > F_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная гипотеза о статистической значимости всего уравнения регрессии.

Оценка значимости параметров множественного линейного уравнения регрессии производится с помощью t -критерия Стьюдента. Выдвигается основная гипотеза о равенстве нулю параметров уравнения регрессии ($H_0: \beta_j = 0$), при конкурирующей гипотезе, что параметры уравнения отличны от нуля ($H_0: \beta_j \neq 0$). Наблюдаемое значение t -критерия для параметра уравнения b_j определяется по формуле:

$$t_{b_j} = \frac{b_j}{s_{b_j}}, \quad s_{b_j} = \sqrt{\frac{SS_{осм.}}{n-p-1} [(X^T X)^{-1}]_{jj}}, \quad (2.22)$$

где s_{b_j} – стандартная ошибка параметра уравнения регрессии b_j ,

$[(X^T X)^{-1}]_{jj}$ – диагональный элемент матрицы $(X^T X)^{-1}$.

Стандартная ошибка множественного коэффициента регрессии b_j может быть найдена также по формуле:

$$s_{b_j} = \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}} \sqrt{\frac{1 - R_{y x_1 x_2 \dots x_p}^2}{(1 - R_{x_j x_1 x_2 \dots x_{j-1} x_{j+1} \dots x_p}^2)(n - m - 1)}}, \quad (2.23)$$

где σ_y – среднее квадратическое отклонение результативного признака;

σ_{x_j} – среднее квадратическое отклонение факторного признака x_j .

Критическое значение t находится по таблице значений t -критерия Стьюдента при уровне значимости α и числе степеней свободы $k = n - m - 1$. Если $|t_{b_j}| > |t_{kp}|$, то параметр уравнения статистически значим. Если $|t_{b_j}| < |t_{kp}|$, то параметр уравнения статистически не значим и j -ая переменная исключается из уравнения регрессии. Доверительные интервалы для коэффициентов линейного уравнения регрессии находятся по формуле:

$$b_j \pm t_{kp} s_{b_j}. \quad (2.24)$$

Условия, необходимые для получения несмещенных, состоятельных эффективных оценок, представляют собой предпосылки метода наименьших квадратов, соблюдение которых желательно для получения достоверных результатов регрессии:

1) остаток является случайной величиной;

2) математическое ожидание случайного остатка равно 0:

$$M(\varepsilon_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n;$$

3) дисперсия случайных остатков постоянна для любого наблюдения $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$, это предположение называется условием гомоскедастичности;

4) случайные остатки ε_i и ε_j не коррелированы,

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j;$$

5) остатки распределены по нормальному закону.

Первые 4 условия известны как условия Гаусса-Маркова.

При построении уравнения множественной регрессии обычно используются следующие нелинейные функции:

степенная $y = b_0 \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \dots x_p^{b_p} \cdot \varepsilon;$ (2.25)

экспонента $y = e^{b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p} \cdot \varepsilon;$ (2.26)

гипербола $y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2} + \dots + \frac{b_p}{x_p} + \varepsilon;$ (2.27)

логлинейная $\ln y = b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + \dots + b_p \ln x_p + \varepsilon.$ (2.28)

Довольно часто применяются и другие виды функций, например:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1^2 + b_4 x_2^2 + b_5 x_1 x_2 + \varepsilon. \quad (2.27)$$

Если уравнение регрессии нелинейное, то оно вначале приводится путем соответствующего преобразования к линейному виду.

Пример 2. Исследовать влияние среднегодовой стоимости основных фондов на 1 га сельскохозяйственных угодий и численности работников на 100 га сельскохозяйственных угодий на стоимость реализованной продукции с 1 га сельскохозяйственных угодий по сельскохозяйственным организациям Краснодарского края за 2013 год. Исходные данные для выполнения задания представлены в приложениях 1 и 3.

Результативным признаком (Y) является стоимость реализованной продукции на 1 га сельхозугодий, тыс. руб.

Факторные признаки: X_1 – среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га сельскохозяйственных угодий, характеризующая оснащенность сельскохозяйственных организаций основными фондами, тыс. руб.; X_2 – среднегодовая численность работников на 100 га сельхозугодий, чел., выражающая обеспеченность сельскохозяйственных организаций рабочей силой.

Требуется определить:

- 1) параметры множественного уравнения регрессии в натуральной и стандартизованной форме;
- 2) средние коэффициенты эластичности для каждого фактора;
- 3) коэффициенты частной и множественной корреляции;
- 4) общий и частные критерии F -Фишера.

Решение

Связь между результативным признаком Y и факторами X_1 и X_2 выражается множественным линейным уравнением регрессии, которое имеет вид:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2. \quad (2.28)$$

Рассмотрим применение пакета анализа данных в *Excel MS Office* для решения задачи. Исходные данные введем на листе *MS Excel* в виде, представленном таблице 5.

Таблица 5 – Исходные данные для регрессионного анализа в *MS Excel*

№ п/п	Выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб. (Y)	Среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб. (X_1)	Среднегодовая численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий, чел. (X_2)
1	37,8	44,9	3,02
2	60,7	69,3	6,87
3	36,8	22,7	2,55
4	41,4	21,6	4,82
5	40,0	26,9	4,55
6	42,3	29,5	1,92
7	42,6	61,2	3,29
8	45,2	59,9	6,81
9	49,6	60,1	6,77
10	57,2	71,7	5,84
11	41,7	48,5	3,16
12	47,5	50,3	5,93
13	30,4	21,4	1,54
14	38,0	40,1	2,83
15	54,5	55,0	5,97
16	44,4	59,2	4,99
17	38,2	40,1	1,58
18	38,5	45,3	5,02
19	35,9	29,1	4,04
20	35,7	21,3	2,93

Для проведения анализа предварительно установим пакет анализа, выполнив последовательно действия: кнопка *Office* –

Параметры Excel – Настройки – Пакет анализа – Перейти (выделим в окне доступных надстроек *Пакет анализа*), после этого во вкладке *Данные* ленты появится инструмент *Пакет анализа*.

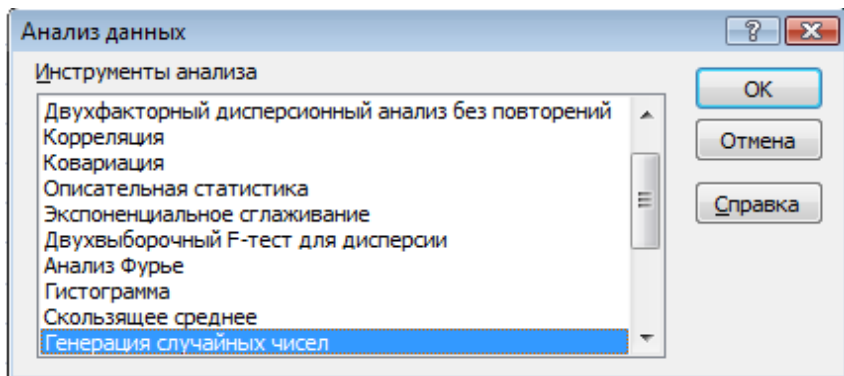


Рисунок 2 – Анализ данных

Выберем в *Пакете анализа* инструмент *Описательная статистика* и заполним параметры диалогового окна (рисунок 3). В результате будут рассчитаны обобщающие характеристики по каждому признаку (таблица 6).

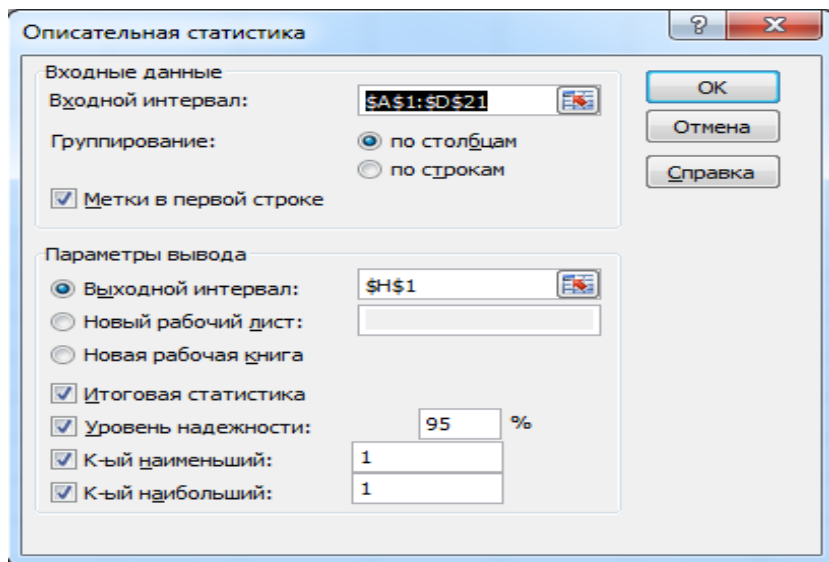


Рисунок 3 – Диалоговое окно описательной статистики

Таблица 6 – Обобщающие характеристики исследуемых признаков по совокупности сельскохозяйственных организаций

Показатель	Y	X_1	X_2	Принятые обозначения
Среднее значение	42,921	43,908	4,222	$\bar{X} = \sum x_i n_i / n$
Стандартная ошибка	1,722	3,760	0,397	$s_{\bar{X}} = s / \sqrt{n}$
Медиана	41,548	45,108	4,295	M_e
Мода	н/д	н/д	н/д	M_o
Стандартное отклонение	7,700	16,816	1,774	s
Дисперсия выборки	59,289	282,768	3,148	$s^2 = \sum (x_i - \bar{X})^2 n_i / (n - 1)$
Экссесс	0,471	- 1,321	- 1,289	$Ex = \sum ((x_i - \bar{X}) / S)^4 n_i / n - 3$
Асимметричность	0,909	0,022	0,053	$Sk = \sum ((x_i - \bar{X}) / S)^3 n_i / n$
Интервал	30,3	50,426	5,33	$W = X_{\max} - X_{\min}$
Минимум	30,4	21,3	1,54	X_{\min}

Максимум	60,7	71,7	6,87	x_{\max}
Сумма	858,42	878,2	84,43	Σx_i
Счет	20	20	20	$n = \Sigma n_i$
Наибольший (1)	60,7	71,7	6,87	-
Наименьший (1)	30,4	21,3	1,54	-
Уровень надежности (95,0%)	3,61	7,87	0,83	$\Delta = t_{\alpha, n-1} S_{\bar{X}}$

Данные таблицы 6 показывают, что по совокупности предприятий средняя выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий составила 42,9 тыс. руб. и в среднем между предприятиями выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий колеблется в границах $42,9 \pm 7,7$ тыс. руб., т. е. от 35,2 до 50,6 тыс. руб. Коэффициент вариации составил 17,9 %, что свидетельствует о больших различиях в выручке от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий между предприятиями. По значению медианы видно, что половина предприятий имеет размер выручки до 41,5 тыс. руб./га, а половина более. Распределение предприятий по данному признаку является несимметричными ($Ka = 0,909$) и островершинным ($\mathcal{E} = - 0,471$). Наименьшее значение выручки на 1 га сельскохозяйственных угодий составило 30,4, а наибольшее – 60,7 тыс. руб.

Аналогичные выводы можно сделать и по факторным признакам X_1 и X_2 .

Для нахождения парных коэффициентов корреляции применим инструмент пакета анализа *Корреляция*, для этого заполним параметры диалогового окна как на рисунке 4.

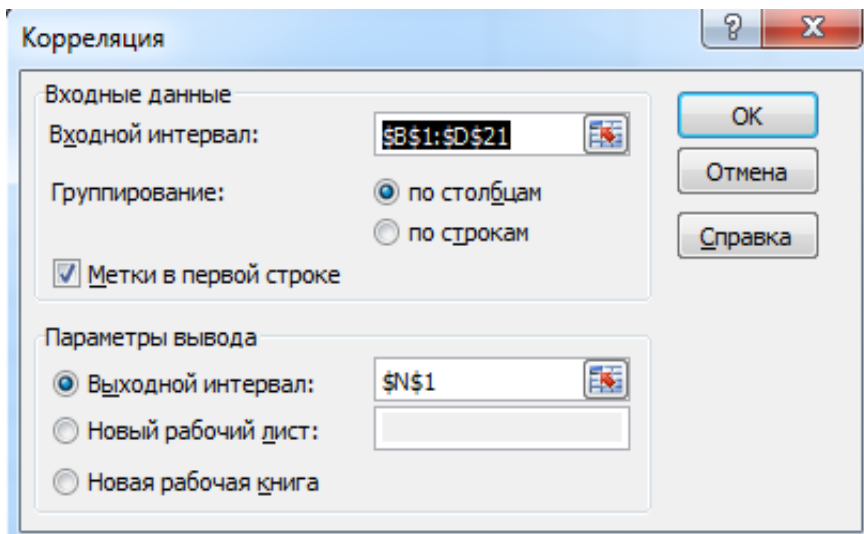


Рисунок 4 – Диалоговое окно «Корреляция»

В результате будет получена матрица парных коэффициентов корреляции между всеми изучаемыми переменными (таблица 7).

Таблица 7 – Парные коэффициенты корреляции между признаками

	Y	X_1	X_2
Y	1	0,7963	0,7692
X_1	0,7963	1	0,6586
X_2	0,7692	0,6586	1

Значит: $r_{yx_1} = 0,7963$; $r_{yx_2} = 0,7692$; $r_{x_1x_2} = 0,6586$. Парные коэффициенты корреляции показывают, что связь между выручкой от реализации, фондооснащенностью и трудообеспеченностью довольно тесная, а между факторными признаками X_1 и X_2 – средняя.

Линейное уравнение множественной регрессии в натуральной форме имеет вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2.$$

Найдем параметры этого уравнения, используя инструмент *Пакета анализа – Регрессия*. Заполним параметры диалогового окна (рисунок 5).

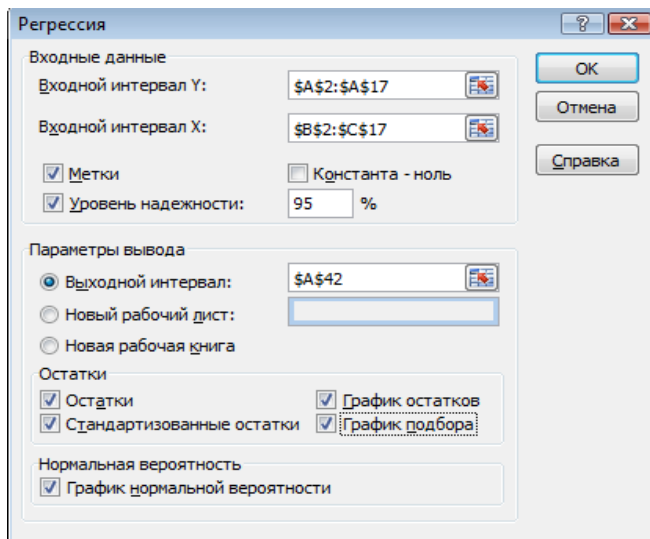


Рисунок 5 – Диалоговое окно «Регрессия»

ВЫВОД ИТОГОВ

<i>Регрессионная статистика</i>						
Множественный R		0,8602				
R-квадрат		0,7399				
Нормированный R-квадрат		0,7093				
Стандартная ошибка		4,1536				
Наблюдения		20				
Дисперсионный анализ						
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>	
Регрессия	2	834,4994099	417,249705	24,18487	1,0669E-05	
Остаток	17	293,2925901	17,2525053			
Итого	19	1127,792				
<i>Коэффициенты</i>		<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>
У-пересечение	24,699	2,78480	8,8693	8,718E-08	18,8239	30,5747
X1	0,2345	0,0753	3,1125	0,0063	0,0756	0,3934
X2	1,8770	0,71356	2,6304	0,0175	0,3715	3,3825

Рисунок 6 – Вывод итогов регрессионного анализа

Получим линейное уравнение множественной регрессии:

$$y = 24,699 + 0,234x_1 + 1,877x_2.$$

Коэффициенты множественной регрессии показывают, что при увеличении среднегодовой стоимости основных фондов на 1 га сельскохозяйственных угодий на 1 тыс. руб. выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий в среднем увеличивается на 234 руб. (при исключении

влияния второго фактора X_2), а при росте численности работников на 100 га сельскохозяйственных угодий на одного работника она в среднем возрастает на 1877 руб./ га.

В стандартизированной форме уравнение регрессии имеет вид:

$$t_y = \beta_1 \cdot t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2}, t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}; t_{x_1} = \frac{x_1 - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}}; t_{x_2} = \frac{x_2 - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}}.$$

Найдем β -коэффициенты, используя их связь с коэффициентами b_j уравнения регрессии в нормальной форме:

$$\beta_j = b_j \frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_y},$$

$$\beta_1 = 0,234 \cdot \frac{16,816}{7,7} = 0,512,$$

$$\beta_2 = 1,877 \cdot \frac{1,774}{7,7} = 0,432.$$

B -коэффициенты, можно также найти с помощью парных коэффициентов корреляции по формулам:

$$\beta_1 = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} = \frac{0,7963 - 0,7692 \cdot 0,6568}{1 - 0,6568^2} = 0,512,$$

$$\beta_2 = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} = \frac{0,7692 - 0,7963 \cdot 0,6568}{1 - 0,6568^2} = 0,432.$$

Линейное уравнение множественной регрессии в стандартизованном масштабе имеет вид:

$$t_y = 0,512 t_{x_1} + 0,432 t_{x_2}.$$

По абсолютной величине β -коэффициентов можно сделать вывод об относительной силе влияния факторов на изменение результативного признака. Видно, что на выручку от реализации продукции большее влияние оказывает обеспеченность основными фондами и меньшее – обеспеченность рабочей силой.

2. Средние коэффициенты эластичности находятся по формуле:

$$\text{Э}x_j = b_j \cdot \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}},$$

$$\text{Э}x_1 = b_1 \cdot \frac{\bar{x}_1}{\bar{y}} = 0,234 \cdot \frac{43,908}{42,921} = 0,239,$$

$$\text{Э}x_2 = b_2 \cdot \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}} = 1,877 \cdot \frac{4,222}{42,921} = 0,185.$$

Значит, при увеличении обеспеченность основными фондами на 1 % выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий увеличивается в среднем на 0,239 %, исключив влияние второго фактора. Если увеличить численность работников на 100 га сельхозугодий на 1 %, то выручка от реализации в среднем возрастет на 0,185 %, исключив влияние фондооснащенности.

3. Коэффициенты частной корреляции определяются через парные коэффициенты корреляции по формулам:

$$r_{yx_1-x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r_{yx_2}^2)(1-r_{x_1x_2}^2)}} = \frac{0,7963 - 0,7692 \cdot 0,6568}{\sqrt{(1-0,7692^2)(1-0,6568^2)}} = 0,604;$$

$$r_{yx_2-x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1}r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r_{yx_1}^2)(1-r_{x_1x_2}^2)}} = \frac{0,7692 - 0,7963 \cdot 0,6568}{\sqrt{(1-0,7963^2)(1-0,6568^2)}} = 0,540;$$

$$r_{x_1x_2-y} = \frac{r_{x_1x_2} - r_{yx_1}r_{yx_2}}{\sqrt{(1-r_{yx_1}^2)(1-r_{yx_2}^2)}} = \frac{0,6568 - 0,7963 \cdot 0,7692}{\sqrt{(1-0,7963^2)(1-0,7692^2)}} = 0,115.$$

Коэффициенты частной корреляции характеризуют тесноту связи между двумя переменными, исключив влияние третьей переменной. Значит, связь между фондооснащенностью и выручкой от реализации прямая и довольно тесная, между трудообеспеченностью и выручкой от реализации прямая и средняя. А связь между факторами x_1 и x_2 слабая и также прямая.

Коэффициент множественной корреляции находится по формуле:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\beta_1 r_{yx_1} + \beta_2 r_{yx_2}} = \sqrt{0,512 \cdot 0,7963 + 0,432 \cdot 0,7692} = \sqrt{0,408 + 0,332} = \sqrt{0,74} = 0,86.$$

Величина коэффициента множественной корреляции показывает, что связь между выручкой и обоими факторами очень тесная, причем 86 % вариации выручки от реализации продукции объясняется влиянием фондо- и трудообеспеченности, из которой на долю фондообеспеченности приходится 40,8 % вариации, а трудообеспеченности – 33,2 %.

4. Оценим значимость уравнения регрессии и множественного коэффициента детерминации R^2 с помощью критерия F -Фишера. Фактически рассматривается нулевая гипотеза $H_0: R^2=0, (b_1=b_2=0)$ и альтернативная гипотеза $H_1: R^2 \neq 0, (b_1 \neq 0, b_2 \neq 0)$.

Наблюдаемое значение критерия находится по формуле:

$$F_n = \frac{R_{y_1x_2}^2}{1 - R_{y_1x_2}^2} : \frac{m}{n - m - 1},$$

где m – число факторов в линейном уравнении регрессии;
 n – число единиц наблюдения.

$$F_n = \frac{0,737}{1 - 0,737} : \frac{2}{20 - 2 - 1} = 24,19.$$

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $k_1 = m = 2$, $k_2 = n - m - 1 = 20 - 2 - 1 = 17$, по таблице значений критерия F -Фишера критическое значения составляет 3,59, т. е. $F_{кр} = 3,59$. Сравниваем F_n с $F_{кр}$. Так как $F_n > F_{кр}$, то нулевую гипотезу о незначимости величины R^2 отклоняем, т.е. уравнение множественной регрессии и R^2 статистически значимы.

В уравнении множественной регрессии не все факторы могут оказывать статистически существенное влияние на изменение результативного признака. Оценка значимости факторов в уравнении регрессии может быть дана с помощью частного F -критерия или критерия t -Стьюдента.

$$F_{nx_1} = \frac{R_{yx_1x_2}^2 - r_{yx_2}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{1} = \frac{0,74 - 0,5917}{1 - 0,74} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{1} = 9,70.$$

При $\alpha = 0,05$, $k_1 = 1$, $k_2 = 17$, $F_{кр} = 4,45$. Так как $F_{nx_1} > F_{кр}$, то в уравнение регрессии целесообразно включение фактора X_1 после X_2 . Фактор X_1 оказывает статистически значимое влияние на Y .

$$F_{nx_2} = \frac{R_{yx_1x_2}^2 - r_{yx_1}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{1} = \frac{0,737 - 0,6341}{1 - 0,74} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{1} = 6,92.$$

В этом случае также наблюдаемое значение критерия Фишера больше критического, это свидетельствует о статистической значимости влияния фактора X_2 и целесообразно-

сти включения его в уравнение множественной регрессии. В данной задаче на выручку от реализации продукции статистически значимое влияние оказывают оба фактора. Небольшие расхождения в результатах расчетов в компьютерном и ручном вариантах расчетов обусловлено округлением расчетных значений.

1.3 Временные ряды

Экономические явления, их связи и зависимости могут рассматриваться как в пространстве, так и во времени, путем построения и анализа одного или нескольких временных рядов.

Временной ряд – это совокупность числовых значений изучаемого показателя в последовательные моменты или периоды времени. Он состоит из значений или уровней временного ряда (Y) и периодов или моментов времени (t). Первый член временного ряда называют начальным (y_1), а последний конечным (y_n). Тогда временной ряд имеет вид:

$$\begin{array}{cccccc} t: & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ Y_t: & Y_1 & Y_2 & Y_3 & \dots & Y_n \end{array} \quad (3.1)$$

Модели, построенные по данным, характеризующим один объект за ряд последовательных моментов или периодов времени, называются моделями временных рядов.

Уровни временного ряда формируются под воздействием большого числа факторов, которые условно можно подразделить на три группы:

- факторы, формирующие тенденцию изменения уровней временного ряда – трендовая компонента (T);
- факторы, формирующие циклические или сезонные колебания уровней ряда – циклическая компонента (S);
- случайные факторы – случайная компонента (ε).

Модель, в которой временной ряд представлен как сумма перечисленных выше компонент, называется аддитивной моделью временного ряда ($Y=T+S+\varepsilon$). Если временной ряд представлен как произведение компонент, то она называется мультипликативной моделью временного ряда ($Y=T \cdot S \cdot \varepsilon$).

Основная задача эконометрического исследования отдельного временного ряда – выявление и количественная оценка каждой из компонент с целью использования полученной информации для анализа и прогнозирования будущих значений ряда.

При наличии во временном ряду тенденции и циклических колебаний значения каждого последующего уровня ряда зависят от предыдущих. Корреляционную зависимость между последовательными уровнями временного ряда называют автокорреляцией уровней ряда. Количественно ее можно измерить с помощью линейного коэффициента корреляции между уровнями исходного временного ряда и уровнями этого ряда, сдвинутыми на один или несколько периодов или моментов времени, называемого коэффициентом автокорреляции.

Коэффициент автокорреляции уровней ряда первого порядка, смещенных на одну единицу времени, определяется по формуле:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1) \cdot (y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{t=2}^n (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}},$$

$$\text{где } \bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n y_t}{n-1}; \quad \bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=2}^n y_{t-1}}{n-1}; \quad (3.2)$$

Коэффициент автокорреляции уровней ряда второго порядка:

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3) \cdot (y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)^2 \cdot \sum_{t=3}^n (y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}}, \quad (3.3)$$

где $\bar{y}_3 = \frac{\sum_{t=3}^n y_t}{n-2}$; $\bar{y}_4 = \frac{\sum_{t=3}^n y_{t-2}}{n-2}$.

Аналогично можно определить коэффициенты автокорреляции более высоких порядков.

Так как коэффициент автокорреляции строится по аналогии с линейным коэффициентом корреляции, то по нему можно судить о наличии линейной или близкой к линейной тенденции. Чем ближе коэффициент автокорреляции первого порядка к единице, тем более выражена линейная тенденция. Для некоторых временных рядов, имеющих сильную нелинейную тенденцию, коэффициент автокорреляции уровней исходного ряда может приближаться к нулю.

Последовательность значений коэффициентов автокорреляции уровней первого, второго и т. д. порядков называют автокорреляционной функцией временного ряда. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, исследуемый ряд содержит только тенденцию. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка τ , то ряд содержит циклические или сезонные колебания с периодичностью в τ моментов времени. Если ни один коэффициент не является значимым, можно сделать вывод о том, что либо ряд не содержит тенденции и циклических колебаний, либо содержит сильную нелинейную тенденцию.

Число периодов или моментов времени, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, называют лагом.

Построение аналитической функции для моделирования тенденции (тренда) временного ряда называют аналитическим выравниванием временного ряда. Тенденция во времени может принимать разные формы, для ее формализации используют следующие функции:

- линейная: $y_t = a + bt$;

- степенная: $y_t = at^b$;
- гипербола: $y_t = a + b/t$;
- экспонента: $y_t = e^{a=bt}$;
- показательная: $y_t = ab^t$;
- полином k -ого порядка: $y_t = a + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_k t^k$;
- логическая: $y_t = \frac{1}{1+be^{-ct}}$;
- Гомперца: $\log_c f(x) = a - bc^t$, где $0 < c < 1$.

Параметры каждой из перечисленных выше функций определяются методом наименьших квадратов, используя в качестве независимой переменной время (t), а в качестве зависимой переменной – фактические уровни временного ряда (y_t). Для нелинейных трендов предварительно проводят стандартную процедуру линейризации (таблица 8).

При выборе конкретной функции предпочтение отдается той, которая имеет меньшую сумму квадратов отклонений фактических уровней временного ряда от теоретических, найденных по уравнениям тренда.

Таблица 8 – Линейризующие преобразования

Функция	Преобразования переменных	
	y	t
$y_t = a + b/t$	y	$1/t$
$y_t = e^{a+bt}$	$\ln y$	t
$y_t = a t^b$	$\lg y$	$\lg t$
$y_t = a+b_1t+b_2t^2+\dots+b_kt^k$	y	$t_1=t, t_2=t^2, \dots, t_k=t^k$
$y_t = ab^t$	$\lg y$	t

Наиболее простую экономическую интерпретацию имеют параметры линейного и экспоненциального трендов. Для линейного тренда: a – начальный уровень временного ряда в момент времени $t = 0$; b – средний за единицу времени абсолютный прирост уровней ряда. Для показательного тренда: a – начальный уровень временного ряда в момент времени

$t = 0$; b – средний за единицу времени коэффициент роста уровней ряда. Критерием отбора наилучшей формы тренда является значение скорректированного коэффициента детерминации: чем выше его значение, тем лучше форма тренда отражает тенденцию изменения уровней ряда.

Пример 3. Имеются данные о средней цене реализации пшеницы сельскохозяйственными производителями Краснодарского края.

Таблица 9 – Средняя цена реализации 1 тонны пшеницы с.-х. производителями Краснодарского края

Год	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Средняя цена 1 т, руб.	2635	2331	3105	5186	5101	4212	3962	5255	7413	7033

Требуется:

1. Построить график динамики цены реализации 1 т пшеницы.
2. Рассчитать коэффициент автокорреляции первого порядка.
3. Обосновать выбор типа уравнения тренда и рассчитать его параметры.
4. Дать интерпретацию параметров тренда и сделать выводы по результатам решения.

Решение

1. Рассмотрим систему координат $Y0t$, где Y_t – средняя цена реализации 1 т пшеницы, t ; t – порядковый номер года и нанесем в ней данные примера 9 на график.

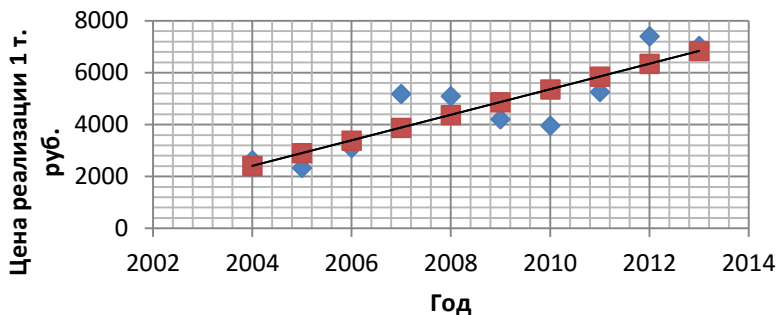


Рисунок 6 – Динамика средней цены реализации 1 т пшеницы сельскохозяйственными производителями Краснодарского края

2. Определим коэффициент автокорреляции первого порядка, характеризующего степень тесноты связи между последовательными уровнями временного ряда цены реализации, сдвинутыми на один год. Заполним вспомогательную таблицу 10.

Таблица 10 – Вспомогательная таблица для расчета коэффициента автокорреляции

t	y_t	y_{t-1}	$y_t - \bar{y}_1$	$y_{t-1} - \bar{y}_2$	$(y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y})$	$(y_t - \bar{y}_1)^2$	$(y_{t-1} - \bar{y}_2)^2$
1	2635	–	–	–	–	–	–
2	2331	2635	-2513,22	-1720,56	4324145,8	6316274,8	2960326,7
3	3105	2331	-1739,22	-2024,56	3521155,2	3024886,2	4098843,2
4	5186	3105	341,78	-1250,56	-427416,4	116813,6	1563900,3
5	5101	5186	256,78	830,44	213240,4	65936,0	689630,6
6	4212	5101	-632,22	745,44	-471282,1	399702,1	555680,8
7	3962	4212	-882,22	-143,56	126651,5	778312,1	20609,5
8	5255	3962	410,78	-393,56	-161666,6	168740,2	154889,5
9	7413	5255	2568,78	899,44	2310463,5	6598630,7	808992,3
10	7033	7413	2188,78	3057,44	6692063,5	4790757,9	9347939,4
Сумма	46233	39200	0,02	-0,04	16127354,8	22260053,6	20200812,3

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n y_t}{n-1} = \frac{46233 - 2635}{9} = 4844,22;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=2}^n y_{t-1}}{n-1} = \frac{39200}{9} = 4355,56;$$

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1) \cdot (y_{t-2} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{t=2}^n (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}} = \frac{16127354,8}{\sqrt{22260053,6 \cdot 20200812,3}} = 0,7605.$$

3. Полученное значение коэффициента автокорреляции и графическое изображение временного ряда позволяют сделать вывод о том, что ряд средней цены реализации пшеницы содержит тенденцию, близкую к линейной. Поэтому для моделирования его тенденции используем линейную функцию

$$y = a + bt.$$

Для расчета параметров линейного тренда a и b используем метод наименьших квадратов, для чего составим и решим следующую систему:

$$\begin{cases} na + b \sum t = \sum y, \\ a \sum t + b \sum t^2 = \sum yt. \end{cases}$$

Для составления и решения системы уравнений заполним таблицу 11.

Таблица 11 – Вспомогательная таблица для расчета параметров тренда

№ п/п	y	t	Yt	t^2	\hat{y}_t	$(y-\hat{y}_t)^2$
1	2635	1	2635	1	2404,8	52992,04
2	2331	2	4662	4	2897,8	321262,24
3	3105	3	9315	9	3390,8	81681,64
4	5186	4	20744	16	3883,8	1695724,84
5	5101	5	25505	25	4376,8	524465,64
6	4212	6	25272	36	4869,8	432700,84
7	3962	7	27734	49	5362,8	1962240,64
8	5255	8	42040	64	5855,8	360960,64
9	7413	9	66717	81	6348,8	1132521,64
10	7033	10	70330	100	6841,8	36557,44
Сумма	46233	55	294954	385	46233	6601107,6
Среднее значение	4623,3	5,5	29495,4	38,5		

Вспользуемся формулами, вытекающими из системы:

$$b = \frac{\overline{yt} - \bar{y} \cdot \bar{t}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2} = \frac{29495,4 - 4623,3 \cdot 5,5}{38,5 - 5,5^2} = 493;$$

$$a = \bar{y} - b\bar{t} = 4623,3 - 493 \cdot 5,5 = 1911,8 \Rightarrow Y = 1911,8 + 463t.$$

Таким образом, в среднем ежегодно за 2004–2013 гг. средняя цена реализации пшеницы сельскохозяйственными товаропроизводителями Краснодарского края увеличивалась на 493 руб. за 1 т. Парный коэффициент корреляции между Y и t составил 0,867, что свидетельствует о достаточно хорошем отражении тенденции роста цены линейным уравнением.

Рассчитаем прогнозное значение средней цены реализации пшеницы сельскохозяйственными товаропроизводителями Краснодарского края на 2016 г. путем подстановки в уравнение линейного тренда значения $t_{np}=13$:

$$\hat{Y}_{np} = 1911,8 + 493 \cdot 13 \rightarrow \hat{Y}_{np} = 8320,8 \text{ руб. за 1 т.}$$

Однако точечный прогноз нереален и он дополняется расчетом интервальной оценки \hat{y}_{np}^* с учетом 95 %-й доверительной вероятности:

$$\hat{Y}_{np} - t_{\alpha} \cdot m_{\hat{y}_t} \leq y_{np}^* \leq \hat{Y}_{np} + t_{\alpha} \cdot m_{\hat{y}_t},$$

где: t_{α} – критическое значение t -критерия Стьюдента при уровне значимости α и числе степеней свободы $df = n-2$;

$$m_{\hat{y}_t} = \sqrt{S_{ocm}^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(t_{np} - \bar{t})^2}{\sum(t - \bar{t})^2} \right)} \quad \text{– стандартная ошибка прогноза.}$$

$$S^2 = \frac{\sum(y - \hat{y}_t)^2}{n-2} = \frac{6601107,6}{8} = 825138,45,$$

$$m_{\hat{y}_t} = \sqrt{825138,45 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{(13 - 5,5)^2}{82,5} \right)} = 803,2$$

при $t_{\alpha=0.05; df=8} = 2,3$.

$$8320,8 - 2,3 \cdot 803,2 \leq y_{np}^* \leq 8320,8 + 2,3 \cdot 803,2,$$

$$6473,4 \leq y_{np}^* \leq 10168,2.$$

Следовательно, с доверительной вероятностью 0,95 можно утверждать, что средняя цена реализации пшеницы сельскохозяйственными товаропроизводителями Краснодарского края в 2016 г. будет находиться в интервале от 6473,2 до 10168,2 руб. за 1 т.

2. Задания по контрольной работе

Задание 1. Имеются данные по совокупности сельскохозяйственных предприятий центральной зоны Краснодарского

края за 2013 г. По одному варианту требуется выполнить задания.

1. Построить график связи между двумя признаками, определив какой из них является факторным (X), а какой результативным (Y). По графику подобрать соответствующую модель уравнения регрессии.

2. Методом наименьших квадратов определить параметры уравнения регрессии.

3. Оценить тесноту связи с помощью показателей корреляции и детерминации.

4. Найти средний коэффициент эластичности.

5. Оценить качество уравнения регрессии с помощью средней ошибки аппроксимации.

6. Оценить значимость коэффициентов корреляции и регрессии по критерию t -Стьюдента при уровне значимости 0,05.

7. Охарактеризовать статистическую надежность уравнения регрессии по критерию F -Фишера при уровне значимости 0,05.

8. Рассчитать прогнозное значение результативного признака, если возможное значение факторного признака на 15 % больше его среднего значения по совокупности.

Варианты задач по данным приложения А

1. Производственная себестоимость молока и надой молока от одной коровы.

2. Производственная себестоимость молока и затраты на корма на 1 ц молока.

3. Производственная себестоимость молока и затраты труда на 1 ц молока.

4. Производственная себестоимость молока и среднегодовое поголовье коров на предприятии.

5. Производственная себестоимость молока и доля молока в выручке от реализации продукции животноводства.

6. Коммерческая себестоимость молока и надой молока от одной коровы.

7. Коммерческая себестоимость молока и затраты на корма на 1 ц молока.

8. Коммерческая себестоимость молока и затраты труда на 1 ц молока.

9. Коммерческая себестоимость молока и среднегодовое поголовье коров на предприятии.

10. Коммерческая себестоимость молока и доля молока в выручке от реализации продукции животноводства

11. Оплата труда на 1 чел.-ч и затраты труда на 1 ц молока.

12. Затраты труда на 1 ц молока и надой молока на среднегодовую корову.

13. Надой молока на среднегодовую корову и среднегодовое поголовье коров.

14. Надой молока на среднегодовую корову и доля молока в выручке от реализации продукции животноводства.

15. Оплата труда на 1 чел.-ч и надой молока на среднегодовую корову.

16. Надой молока на среднегодовую корову и затраты на корма на среднегодовую корову.

Варианты задач по данным приложения Б

17. Выручка от реализации на 1 га сельскохозяйственных угодий и затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяйственных угодий.

18. Выручка от реализации на 1 га сельскохозяйственных угодий и среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га сельскохозяйственных угодий.

19. Выручка от реализации на 1 га сельскохозяйственных угодий и среднегодовая численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий.

20. Выручка от реализации на 1 га сельскохозяйственных угодий и материальные затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий.

21. Выручка от реализации на 1 га сельскохозяйственных угодий и энергетические мощности на 1 га сельскохозяйственных угодий.

22. Выручка от реализации на 1 га сельскохозяйственных угодий и начислено заработной платы на 1 га сельскохозяйственных угодий.

23. Выручка от реализации на 1 га сельскохозяйственных угодий и среднегодовая стоимость оборотных средств на 1 га сельскохозяйственных угодий.

24. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни и среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га пашни.

25. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни и материальные затраты на 1 га пашни.

26. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни и энергетические мощности на 1 га пашни.

27. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни и начислено заработной платы на 1 га пашни.

28. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни и затраты на реализованную продукцию на 1 га пашни.

29. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни и среднегодовая стоимость оборотных средств на 1 га пашни.

30. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни и среднегодовая численность работников на 100 га пашни.

Задание 2. Имеются данные по совокупности сельскохозяйственным предприятиям центральной зоны Краснодарского края за 2013 г.

По одному варианту задания требуется:

1. Определить параметры множественного уравнения регрессии в натуральной и стандартизованной форме.

2. Найти средние коэффициенты эластичности для каждого фактора.

3. Рассчитать коэффициенты частной и множественной корреляции.
4. Определить общий и частные критерии F -Фишера. Написать выводы по результатам расчетов.

Варианты задач по данным приложений А и В

31. Производственная себестоимость молока, надой молока на среднегодовую корову, затраты на корма на 1 ц молока.

32. Производственная себестоимость молока, надой молока на среднегодовую корову, затраты труда на 1 ц молока.

33. Производственная себестоимость молока, надой молока на среднегодовую корову, среднегодовое поголовье коров.

34. Производственная себестоимость молока, надой молока на среднегодовую корову, доля молока в выручке от реализации продукции животноводства.

35. Производственная себестоимость молока, надой молока на среднегодовую корову, оплата труда на 1 чел.-ч.

36. Коммерческая себестоимость молока, надой молока на среднегодовую корову, затраты на корма на 1 ц молока.

37. Коммерческая себестоимость молока, надой молока на среднегодовую корову, затраты труда на 1 ц молока.

38. Коммерческая себестоимость молока, надой молока на среднегодовую корову, среднегодовое поголовье коров.

39. Коммерческая себестоимость молока, надой молока на среднегодовую корову, доля молока в выручке от реализации продукции животноводства.

40. Коммерческая себестоимость молока, надой молока на среднегодовую корову, оплата труда на 1 чел.-ч.

41. Надой молока на среднегодовую корову, среднегодовое поголовье коров, доля молока в выручке от реализации продукции животноводства.

42. Надой молока на среднегодовую корову, среднегодовое поголовье коров, оплата труда на 1 чел.-ч.

43. Надой молока на среднегодовую корову, доля молока в выручке от реализации продукции животноводства, оплата труда на 1 чел.-ч.

44. Надой молока на среднегодовую корову, среднегодовое поголовье коров, затраты на корма на среднегодовую корову.

45. Надой молока на среднегодовую корову, оплата труда на 1 чел.-ч, затраты на корма на среднегодовую корову.

46. Надой молока на среднегодовую корову, доля молока в выручке от реализации продукции животноводства, затраты на корма на среднегодовую корову.

47. Затраты труда на 1 ц молока, надой молока на среднегодовую корову, среднегодовое поголовье коров.

48. Затраты труда на 1 ц молока, надой молока на среднегодовую корову, доля молока в выручке от реализации продукции животноводства.

49. Затраты труда на 1 ц молока, надой молока на среднегодовую корову, оплата труда на 1 чел.-ч.

50. Затраты труда на 1 ц молока, среднегодовое поголовье коров, доля молока в выручке от реализации продукции животноводства.

51. Затраты труда на 1 ц молока, среднегодовое поголовье коров, оплата труда на 1 чел.-ч.

52. Затраты труда на 1 ц молока, доля молока в выручке от реализации продукции животноводства, оплата труда на 1 чел.-ч.

Варианты задач по данным приложений Б и Г

53. Выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий, среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га сельскохозяйственных угодий, среднегодовая стоимость оборотных средств на 1 га сельскохозяйственных угодий.

54. Выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий, среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га сельскохозяйственных угодий, среднегодовая численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий.

55. Выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий, среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га сельскохозяйственных угодий, материальные затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий.

56. Выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий, среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га сельскохозяйственных угодий начислено заработной платы на 1 га сельскохозяйственных угодий.

57. Выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий, среднегодовая численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий, материальные затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий.

58. Выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий, среднегодовая численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий, среднегодовая стоимость оборотных средств на 1 га сельскохозяйственных угодий.

59. Выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий, материальные затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий, начислено заработной платы на 1 га сельскохозяйственных угодий.

60. Выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий, материальные затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий, энергетические мощности на 1 га сельскохозяйственных угодий.

61. Выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий, энергетические мощности на 1 га сельскохозяйственных угодий, среднегодовая стоимость оборотных средств на 1 га сельскохозяйственных угодий.

62. Выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий, энергетические мощности на 1 га сельскохозяйственных угодий, начислено заработной платы на 1 га сельскохозяйственных угодий.

63. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни, среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га пашни, среднегодовая стоимость оборотных средств на 1 га пашни.

64. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни, среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га с пашни, среднегодовая численность работников на 100 га пашни.

65. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни, среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га пашни, материальные затраты на 1 га пашни.

66. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни, среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га пашни, начислено заработной платы на 1 га пашни.

67. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни, среднегодовая численность работников на 100 га пашни, материальные затраты на 1 га пашни.

68. Выручка от реализации продукции на 1 га, пашни среднегодовая численность работников на 100 га пашни, среднегодовая стоимость оборотных средств на 1 га пашни.

69. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни, материальные затраты на 1 га пашни, начислено заработной платы на 1 га пашни.

70. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни, материальные затраты на 1 га пашни, энергетические мощности на 1 га пашни.

71. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни, энергетические мощности на 1 г пашни а, среднегодовая стоимость оборотных средств на 1 га пашни.

72. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни, энергетические мощности на 1 га пашни, начислено заработной платы на 1 га пашни.

Исходные данные для задач 31 – 52 представлены в приложениях А и В, а для задач 53 – 72 в приложениях Б и Г.

Задание 3. По статистическим данным Краснодарского края, указанным в приложениях Д и Е, в соответствии с заданным вариантом контрольной работы:

- а) построить график временного ряда;
- б) рассчитать коэффициент автокорреляции первого порядка;
- в) обосновать выбор типа уравнения тренда и рассчитать его параметры;
- г) определить точечный и интервальный прогноз уровня временного ряда на 2016 год;
- д) сделать выводы по задаче.

Приложение А

Таблица А 1 – Показатели производства молока в с/х предприятиях
центральной зоны Краснодарского края, 2013 г.

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
1	1575	1575	60,6	738	1,69	760	35,6	162,4	44,7
2	1308	1394	71,9	582	1,23	700	91,0	314,0	41,9
3	1695	1728	35,3	860	3,70	460	41,5	58,8	30,3
4	1645	1802	52,2	660	3,86	536	82,5	106,7	34,5
5	1474	1474	49,0	521	1,71	1650	72,3	194,8	25,5
6	1421	1429	60,8	744	1,41	2600	82,2	196,4	45,2
7	1532	1543	26,6	642	3,20	742	71,9	121,8	17,0
8	1611	1773	34,4	607	3,52	331	58,3	89,1	20,8
9	1296	1367	54,6	663	1,45	1100	76,0	363,4	36,2
10	1536	1536	53,7	703	1,88	712	90,2	128,0	37,8
11	1728	1731	53,8	689	2,57	500	89,4	131,2	37,1
12	1762	1764	42,1	1123	4,33	686	71,8	87,8	47,3
13	1177	1177	52,5	695	2,56	2021	79,6	119,8	36,5
14	1532	1532	62,4	523	3,21	800	71,4	164,0	32,6
15	1458	1540	43,7	516	1,63	337	61,5	210,1	22,6
16	1204	1259	73,3	534	1,49	1450	82,0	298,6	39,1
17	1110	1203	62,3	538	1,38	1637	67,3	113,5	33,5
18	2030	2169	39,3	1272	2,92	500	41,6	278,9	50,0
19	2348	2388	30,5	1106	3,69	632	51,2	92,0	33,7

Обозначения:

X_1 – производственная себестоимость 1 ц молока, руб.;

X_2 – коммерческая себестоимость 1 ц молока, руб.;

X_3 – надой молока на среднегодовую корову, ц;

X_4 – затраты на корма на 1 ц молока, руб.;

X_5 – затраты труда на 1 ц молока, чел.-ч.;

X_6 – среднегодовое поголовье коров, гол.;

X_7 – доля молока в выручке от реализации продукции животноводства, %;

X_8 – оплата труда на 1 чел.-ч, руб.;

X_9 – затраты на корма на среднегодовую корову, тыс. руб.

Приложение Б

Таблица Б 1 – Показатели производства продукции и факторов на 1 га сельхозугодий и пашни в сельскохозяйственных организациях Краснодарского края 2013 г.

№ п/п	Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}
1	55,0	55,5	43,5	65,0	65,6	6,52	37,0	37,3	6,43	6,48	12,85	12,95	43,9	80,8	81,4	6,58
2	38,9	39,2	31,6	35,2	35,5	4,65	25,7	25,9	3,37	3,40	7,59	7,66	31,9	20,3	20,5	4,69
3	35,9	36,6	22,9	36,8	37,5	2,64	14,1	14,4	1,73	1,76	5,13	5,22	23,3	24,2	24,7	2,69
4	47,7	52,7	38,8	116,2	128,5	4,16	23,4	25,8	4,73	5,23	9,47	10,47	42,9	39,6	43,8	4,60
5	37,3	37,3	31,2	12,9	12,9	2,98	14,7	14,7	1,45	1,45	6,44	6,44	31,2	49,4	49,4	2,98
6	71,0	71,4	52,5	90,3	90,8	6,36	34,1	34,3	5,25	5,28	11,77	11,84	52,8	74,0	74,4	6,40
7	46,4	46,7	38,5	105,7	106,6	2,52	24,2	24,5	2,27	2,29	6,05	6,10	38,8	18,1	18,3	2,54
8	42,5	43,0	35,9	32,7	33,0	4,92	25,3	25,6	1,65	1,66	9,03	9,13	36,3	51,1	51,6	4,97
9	47,6	48,7	39,6	93,4	95,4	4,48	27,4	28,0	3,34	3,41	9,01	9,20	40,4	31,8	32,5	4,58
10	35,4	35,6	29,9	27,2	27,7	2,36	20,9	21,0	4,19	4,21	4,33	4,35	30,0	24,3	24,4	2,37
11	42,5	42,5	42,1	30,3	30,3	4,39	21,6	21,6	1,27	1,27	8,35	8,35	42,1	47,9	47,9	4,39
12	36,9	37,1	25,9	25,8	26,0	1,90	21,7	21,8	1,89	1,90	4,40	4,43	26,1	28,4	28,6	1,92
13	34,1	34,1	29,7	38,1	38,1	2,86	18,1	18,1	1,80	1,80	4,80	4,80	29,7	18,3	18,3	2,86
14	21,3	21,3	11,0	16,2	16,2	0,83	12,3	12,3	0,76	0,76	1,46	1,46	11,0	20,4	20,4	0,83
15	23,7	23,7	15,8	30,0	30,0	1,24	9,3	9,3	2,10	2,10	2,88	2,88	15,8	34,9	34,9	1,24
16	54,8	54,8	32,6	37,4	37,4	3,00	35,6	35,6	2,38	2,38	6,07	6,07	32,6	33,9	33,9	3,00
17	23,3	23,3	15,3	23,6	23,6	2,30	12,5	12,5	2,51	2,51	2,33	2,33	15,3	11,0	11,0	2,30
18	25,6	25,6	23,5	20,2	20,2	5,42	12,4	12,4	1,55	1,55	9,53	9,53	23,5	20,8	20,8	5,42
19	37,8	40,4	37,6	44,9	48,0	3,02	23,4	25,0	1,81	1,93	6,85	7,32	40,2	92,1	98,4	3,23
20	50,7	52,6	43,6	34,3	35,6	8,97	29,3	30,4	5,33	5,53	15,22	15,79	45,3	30,7	31,8	9,31

Условные обозначения:

U_1 – выручка от реализации на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;

U_2 – выручка от реализации продукции на 1 га пашни, тыс. руб.;

X_1 – затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;

X_2 – среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;

X_3 – среднегодовая стоимость основных фондов на 1 га пашни, тыс. руб.;

X_5 – материальные затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;

X_6 – материальные затраты на 1 га пашни, тыс. руб.;

X_7 – энергетические мощности на 1 га сельскохозяйственных угодий, л. с.;

X_8 – энергетические мощности на 1 га пашни, л. с.;

X_9 – начислено заработной платы на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;

X_{11} – затраты на реализованную продукцию на 1 га пашни, тыс. руб.;

X_{12} – среднегодовая стоимость оборотных средств на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

X_{13} – среднегодовая стоимость оборотных средств на 1 га пашни, тыс. руб.

X_{14} – среднегодовая численность работников на 100 га пашни, чел.

Приложение В

Таблица В 1 – Парные коэффициенты корреляции между показателями производства молока в сельскохозяйственных предприятиях

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
X_1	1								
X_2	0,983	1							
X_3	-0,641	-0,640	1						
X_4	0,765	0,748	-0,488	1					
X_5	0,650	0,651	-0,674	0,526	1				
X_6	-0,541	-0,589	0,439	-0,235	-0,493	1			
X_7	-0,483	-0,498	0,487	-0,465	-0,290	0,333	1		
X_8	-0,331	-0,287	0,509	-0,159	-0,653	0,172	0,208	1	
X_9	0,112	0,091	0,464	0,528	-0,135	0,210	0,023	0,307	1

Приложение Г

Таблица Г 1– Коэффициенты корреляции между выручкой от реализации продукции на 1 га сельхозугодий (пашни) и факторами

№ п/п	Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}
Y_1	1															
Y_2	0,996	1														
X_1	0,901	0,909	1													
X_2	0,624	0,661	0,601	1												
X_3	0,607	0,649	0,590	0,998	1											
X_4	0,628	0,634	0,722	0,250	0,245	1										
X_5	0,904	0,897	0,813	0,495	0,479	0,610	1									
X_6	0,906	0,906	0,825	0,527	0,514	0,620	0,997	1								
X_7	0,657	0,675	0,603	0,515	0,515	0,659	0,668	0,684	1							
X_8	0,653	0,676	0,605	0,537	0,540	0,658	0,659	0,679	0,998	1						
X_9	0,720	0,734	0,817	0,392	0,390	0,967	0,677	0,693	0,675	0,680	1					
X_{10}	0,715	0,735	0,816	0,415	0,416	0,960	0,671	0,691	0,683	0,691	0,998	1				
X_{11}	0,890	0,906	0,996	0,629	0,623	0,718	0,801	0,820	0,613	0,621	0,820	0,825	1			
X_{12}	0,522	0,534	0,597	0,224	0,225	0,350	0,494	0,510	0,324	0,324	0,474	0,476	0,605	1		
X_{13}	0,511	0,528	0,593	0,239	0,243	0,342	0,485	0,505	0,322	0,325	0,470	0,475	0,606	0,998	1	
X_{14}	0,628	0,639	0,725	0,271	0,269	0,999	0,609	0,622	0,669	0,671	0,971	0,967	0,726	0,353	0,348	1

Приложение Д

Таблица Д 1 – Урожайность сельскохозяйственных культур в
сельскохозяйственных организациях
Краснодарского края, ц с 1 га

№ варианта	Культура	Год									
		2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
73	Зерновые и зернобобовые	42,7	44,5	42,7	41,4	54,3	45,9	48,7	54,5	41,9	52,8
74	Пшеница озимая	44,2	48,2	43,7	46,5	57,4	47,0	51,1	55,9	39,9	51,3
75	Рожь озимая	23,3	28,0	29,5	22,0	27,6	47,9	30,6	47,5	30,9	55,6
76	Кукуруза на зерно	48,1	44,1	43,3	23,8	52,8	38,0	36,4	51,1	43,8	59,1
77	Ячмень озимый	46,5	42,0	44,9	49,2	53,5	49,1	51,7	55,4	38,0	55,4
78	Ячмень яровой	23,4	24,2	28,0	21,5	40,1	30,2	28,9	36,6	28,1	33,7
79	Овес	26,3	26,6	26,4	21,6	36,8	25,7	25,1	31,4	26,4	28,2
80	Просо	9,9	13,4	11,6	12,2	25,8	11,9	13,3	23,8	19,9	21,5
81	Рис	39,7	44,4	46,9	48,4	50,4	60,1	61,8	61,1	63,5	57,6
82	Зернобобовые	23,3	19,7	23,3	14,8	33,8	23,6	23,9	28,6	42,3	21,1
83	Горох	23,6	19,8	23,6	14,8	34,5	24,0	24,1	28,7	22,1	21,9
84	Сахарная свекла	396	328	369	268	448	394	369	448	432	524
85	Масличные культуры	18,0	19,3	19,6	17,1	23,6	21,3	20,3	22,5	21,9	24,9
86	Подсолнечник	18,2	20,9	22,5	20,7	25,3	22,4	22,1	24,1	24,2	27,0
87	Соя	18,0	15,1	12,3	9,4	16,4	18,2	15,8	18,9	18,6	21,2
88	Картофель	86	88	130	105	195	132	126	163	153	170
89	Овощи	91	100	114	85	127	117	98	125	94	102
90	Кукуруза на силос	188	156	170	126	191	166	141	194	155	206

Приложение Е

Таблица Е 1 – Динамика показателей по Краснодарскому краю

№ варианта	Показатель	Год									
		2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Потребление продуктов питания на члена семьи за год, кг:											
91	Хлебные продукты	113	110	106	116	113	116	118	102	92	94
92	Картофель	65	58	64	71	66	64	63	52	49	54
93	Овощи и бахчевые	98	118	122	134	122	131	127	129	122	119
94	Фрукты, ягоды	38	50	42	53	71	65	92	85	77	81
95	Мясо и мясопродукты	68	70	74	81	85	81	87	88	77	86
96	Молоко и молочные продукты	222	230	251	275	314	283	292	278	263	272
97	Яйца, штук	240	211	231	241	235	239	235	208	193	221
98	Рыба и рыбопродукты	16	17	18	19	23	23	28	24	20	20
99	Площадь жилых помещений на 1 жителя, кв. м.	19,0	19,4	19,8	20,5	21,1	21,6	22,4	22,6	23,1	23,3
Добыча отдельных видов полезных ископаемых											
100	Нефть, тыс. т	1789	1689	1838	1752	1424	1227	1144	1117	1121	1077
101	Газовый конденсат	40	67	102	152	157	115	102	111	114	147
102	Газ природный, млн. куб. м	1970	2656	2999	3281	3372	3126	2818	2900	2970	3144

Продолжение таблицы Е 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
103	Материалы строительные нерудные, млн. куб. м	7,6	7,7	7,9	14,0	15,5	14	19	21	21	21
Производство отдельных видов пищевых продуктов, тыс. т:											
104	Мясо, включая субпродукты I категории	93,3	86,4	101	144	121	111	99	116	122	133
105	Изделия колбасные	90,1	93,5	98,7	103	105	96	102	93	87	77
106	Масла растительные нерафинированные	478	484	653	616	538	719	657	639	917	815
107	Масла растительные рафинированные	164	116	195	183	192	270	237	339	433	508
108	Хлеб и хлебобулочные изделия	426	405	377	359	340	326	318	318	321	326
109	Сахар песок	1849	1890	1950	2122	1795	1374	1698	2114	1229	1076
110	Майонез	8,3	10,9	13,6	13,6	14,4	12,9	19,4	19,0	19,6	23,7
111	Воды минеральные, млн. полулитров	118	118	139	210	250	262	276	244	284	275
112	Топливо дизельное	1933	2253	2800	3256	3267	3318	3276	3534	3896	4349
113	Мазут топочный	2924	3355	4002	4707	4903	4819	5427	5804	5947	6843
114	Топливо печное бытовое	124	187	101	76	118	201	353	553	545	621
115	Электроэнергия, млн. кВт-часов	6165	6697	6905	7079	6689	6194	6620	6589	7980	9944

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 Методические рекомендации к выполнению контрольной работы.....	8
1.1 Однофакторный корреляционно-регрессионный анализ.....	8
1.2 Множественный корреляционно-регрессионный анализ.....	27
1.3 Временные ряды.....	48
2 Задания по контрольной работе.....	57
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	65

ЭКОНОМЕТРИКА

Методические рекомендации

Составители: **Бондаренко** Петр Сергеевич, **Кацко** Игорь Александрович, **Перцухов** Виктор Иванович и др.

Подписано в печать 29.06.2015 г. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Усл. печ. л. – 4,3 Уч.-изд. л. – 3,4

Тираж 70 экз. Заказ № 507

Типография Кубанского государственного
аграрного университета.
350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13