МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Кубанский государственный аграрный университет
имени И. Т. Трубилина»

КАФЕДРА СТАТИСТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

# Теория вероятностей и математическая статистика

Методические рекомендации
для контактной и самостоятельной работы
обучающихся (уровень бакалавриата)

по направлениям подготовки:
09.03.03 Прикладная информатика
09.03.02 Информационные системы и технологии
38.03.05 Бизнес-информатика

Краснодар
КубГАУ
2020

**УДК 519.2**
**ББК 65.05**
**Т 338**

*Составители:* П. С. Бондаренко, Н. Х. Ворокова,
И. А. Кацко, Н. Г. Давыденко

**Т 338** **Теория вероятностей и математическая статистика :** методические рекомендации для контактной и самостоятельной работы обучающихся (уровень бакалавриата) / П. С. Бондаренко, Н. Х. Ворокова, И. А. Кацко, Н. Г. Давыденко – Краснодар: КубГАУ, Издательство: Краснодарский ЦНТИ – филиал ФГБУ «РЭА» Минэнерго России, 2020. – 98 с.

Методические указания для практических занятий, самостоятельной работы и выполнения контрольных работ, обучающихся по направлениям подготовки:

09.03.03 Прикладная информатика
09.03.02 Информационные системы и технологии
38.03.05 Бизнес-информатика

Рассмотрено и одобрено методической комиссией факультета Прикладной информатики Кубанского госагроуниверситета, протокол № 4 от 30.12.2019 г.

Председатель методической комиссии Крамаренко Т.А.

**УДК 519.2**
**ББК 65.05**

## Оглавление

# Часть I Теория вероятностей

## Тема 1 Случайные события

### 1.1 Алгебра событий

**Вопросы для обсуждения**

Предмет теории вероятностей и ее значение для экономической науки. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Понятие случайного события. Совместные и несовместные события, полная группа событий, равновозможные события.

**Задания для практических занятий**

1. Являются ли несовместными следующие события:

   а) опыт – бросание двух монет. События:
   $A_1$ – появление двух гербов, $A_2$ – появление двух цифр;

   б) опыт – три выстрела по мишени. События:
   $B_1$ – хотя бы одно попадание, $B_2$ – хотя бы один промах;

   в) опыт – бросание двух игральных костей. События:
   $C_1$ – хотя бы на одной кости появилось три очка,
   $C_2$ – появление четного числа очков на каждой кости;

   г) опыт – извлечение двух шаров из урны, содержащей белые и черные шары. События:
   $D_1$ – взято два белых шара, $D_2$ – оба извлеченных шара одного цвета;

   д) опыт – покупка двух лотерейных билетов. События:
   $E_1$ – выиграют два билета, $E_2$ – выиграет хотя бы один билет,
   $E_3$ – выиграет только один лотерейный билет;

   е) опыт – лифт отправляется с 10 пассажирами и останавливается на пяти этажах. События:
   $F_1$ – на первых четырех остановках вышло не более 9 человек,
   $F_2$ – на последней остановке вышел хотя бы один человек.

2. Образуют ли полную группу следующие события:

   а) опыт – два выстрела по мишени. События:
   $A_1$ – два попадания в мишень, $A_2$ – хотя бы один промах по мишени;

   б) опыт – бросание двух игральных костей. События:
   $B_1$ – сумма очков на верхних гранях больше 3,
   $B_2$ – сумма очков на верхних гранях равна 3;

   в) опыт – посажено четыре зерна. События:
   $C_1$ – взошло одно зерно, $C_2$ – взошло два зерна,
   $C_3$ – взошло три зерна, $C_4$ – взошло четыре зерна.

   г) покупатель посещает три магазина. События:
   $D_1$ – покупатель купит товар хотя бы в одном магазине,
   $D_2$ – покупатель не купит товар ни в одном магазине.

3. Являются ли равновозможными следующие события:

   а) опыт – выстрел по мишени. События:

$A_1$ – попадание при выстреле, $A_2$ – промах при выстреле;

б) опыт – бросание двух игральных костей. События:

$B_1$ – произведение очков на верхних гранях равно 12,

$B_2$ – сумма очков на верхних гранях равна 9;

в) опыт - бросание двух монет. События:

$C_1$ – появление двух гербов, $C_2$ – появление двух цифр,

$C_3$ – появление одного герба и одной цифры.

**Замечание.** В данном случае (пункт в) возможно несколько подходов, связанных с различными статистическими моделями физических частиц.

1. Модель (статистика) Больцмана-Максвелла (частицы различимы, хотя известно, что таких частиц в природе не существует). Для опыта с монетами: $Г_1Г_2$, $Г_1Р_2$, $Г_2$ $Р_1$, $Р_1Р_2$ (монеты различимы).
2. Модель Бозе-Эйнштейна (частицы неразличимы, например, фотоны, атомные ядра, атомы с четным числом частиц). Для опыта с монетами: $Г_1Г_2$, $Г_1Р_2$, $Р_1Р_2$ (монеты не различимы).
3. Модель Ферми-Дирака (частицы не могут принимать одинаковые значения, например, электроны, нейтроны, протоны). Для опыта с монетами: $Г_1Р_2$, $Г_2$ $Р_1$.

Опыты с монетами показывают, что здесь выполняется статистика Больцмана-Максвелла, поэтому нельзя заранее, до проведения эксперимента, утверждать истинность той или иной модели.

4. Брошены 3 монеты. Составьте события, образующие полную группу. Сколько равновозможных исходов образуют полную группу событий? Укажите элементарные события, не образующие полной группы событий.
5. Приведите примеры: $a$) трех событий, образующих полную группу событий; б) трех событий, равновозможных и несовместных, но не образующих полной группы событий; в) двух событий, несовместных и образующих полную группу событий, но не равновозможных.
6. Проводится три выстрела по мишени. Рассматриваются события: $A_1$ – попадание в цель первым выстрелом; $A_2$ – попадание в цель вторым выстрелом; $A_3$ – попадание в цель третьим выстрелом. Определить, каким событиям равносильны следующие события: 1) $A_1 + A_2 + A_3$, 2) $A_1A_2A_3$, 3) $\overline{A_1 + A_2 + A_3}$, 4) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,
   5) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, 6) $\overline{\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3}$,
   7) $A_1 + \overline{A}_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, 8) $(\overline{A}_1 + \overline{A}_2)A_3$.
7. Монета подбрасывается три раза. Рассматриваются события $A_i$ – появление герба при $i$ – ом подбрасывании ($i = 1, 2, 3$). Представить в виде сумм, произведений и сумм произведений событий $A_i$ и $\overline{A}_i$ следующие события: $A$ – появились все три герба; B – появились все три цифры; C – появился хотя бы один герб; $D$ – появилась хотя бы одна цифра; E – появился только один герб; $F$ – появилась только одна цифра.

## 1.2 Вероятность события

### Вопросы для обсуждения

Вероятность случайного события. Частота события, ее свойства, статистическая устойчивость частоты. Аксиомы теории вероятностей. Простейшие следствия из аксиом. Классическое и геометрическое определения вероятности случайного события.

### Контрольные задания

1. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что на ее верхней грани появится: а) шесть очков; б) нечетное количество очков; в) не менее четырех очков; г) не более двух очков.
2. Набирая номер телефона, абонент забыл две цифры и, помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.
3. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:
   а) на обеих костях появится одинаковое число очков;
   б) хотя бы на одной кости появится два очка;
   в) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение шести;
   г) сумма очков не превосходит 6;
   д) произведение числа очков не превосходит 6;
   е) произведение очков делится на 6.
4. Из 100 посаженых семян проросло 78.

а). Какова статистическая вероятность прорастания семян?

б). Каков процент всхожести семян?

5. Относительная частота (частость) работников предприятия, имеющих высшее образование, равна 0,15. Определить число работников, имеющих высшее образование, если всего на предприятии работает 40 человек.
6. В отрезке $AB$ длины 3 случайно появляется точка $C$. Определить вероятность того, что расстояние от точки $C$ до точки $B$ превосходит 1.
7. В круг радиуса 5 вписан треугольник наибольшей площади. Определить вероятность попадания в треугольник точки, случайно брошенной в круг.
8. Расстояние от пункта $M$ до пункта $N$ автобус проходит за 2 минуты, а пешеход за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени отправляется из $M$ в $N$ пешком. Найти вероятность того, что его в пути догонит автобус.
9. Какой толщины должна быть монета радиуса r, чтобы вероятность падения на ребро была 1/3.

*Указание*. Необходимо рассмотреть монету как прямой круговой цилиндр с радиусом основания $r$, вписанный в шар радиуса $R$. Монета бросается на клейкую поверхность. (Знаменитый математик фон Нейман, впервые услышав эту задачу, дал ответ с точностью трех знаков после запятой через 20 секунд в присутствии публики, которой потребовалось для решения значительно больше времени.)

10. *Задача Бюффона*. Игла длины $l$ бросается на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, разделенными расстояниями $L$ ($L>l$). Все положения центра иглы и все ее направления одинаково вероятны. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь из линий.
11. *Парадокс Бертрана.* Для некоторой окружности случайно выбирается хорда. Найти вероятность того, что эта хорда длиннее стороны правильного треугольника, вписанного в данную окружность, если:
    *а*) середина хорды равномерно распределена (имеет одинаковую возможность появиться) в круге;
    б) направление хорды задано, а ее середина равномерно распределена на диаметре, перпендикулярном направлению;
    в) один конец хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности. (Парадокс заключается в том, что вероятности для *а*), б), в) различны).
12. *Вероятность «черной пятницы».* Доказать, что тринадцатое число месяца с большей вероятностью приходится на пятницу, чем на другие дни недели.

## 1.3 Комбинаторика

### Вопросы для обсуждения

Правило суммы, произведения. Число размещений, сочитаний, перестановок. Повторный и бесповторный отбор.

### Контрольные задания

1. В сельскохозяйственном эксперименте проверяют влияние на урожайность трех различных факторов (например, применение удобрений, орошение, срок посева). Факторы имеют соответственно $k_1, k_2, k_3$ уровней. Сколько существует комбинаций или способов воздействия?
2. Сколько можно образовать различных инициалов, если каждый человек имеет одну фамилию, имя, отчество?
3. В азбуке Морзе буквы представляются последовательностями тире и точек с возможными повторениями. Сколько букв можно составить из 5 и менее символов?
4. Девять запечатанных пакетов с предложениями цены на аренду участков для бурения нефтяных скважин поступили в специальное агентство утренней почтой. Сколько существует различных способов очерёдности вскрытия конвертов с предложениями цены?
5. Компания имеет четыре отдела: производства продукции; снабжения, занимающийся обеспечением сырья; менеджмента; маркетинга. Численность персонала в каждом из отделов составляет 55, 30, 21 и 13 работников соответственно. Каждый отдел собирается послать одного представителя на ежегодную встречу с директором компании. Сколько различных групп для встречи можно составить из числа работников компании?

6. Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать пароль из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого кода. Сколько всевозможных комбинаций он может составить для набора пароля:
   *а*) если цифры в коде не повторяются;
   б) если цифры в коде повторяются?
7. Директор корпорации рассматривает заявления о приёме на работу 10 выпускников университета. На одном из предприятий корпорации имеются три различных вакансии. Сколькими способами директор может заполнить эти вакансии?
8. Имеется две урны. В первой – 10 красных и 6 черных шаров. Во второй – 4 красных и 6 черных шаров. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что: а) оба шара будут красными; б) из первой урны будет вынут красный шар, а из второй – черный; в) хотя бы один из вынутых шаров черный.
9. Из коробки, содержащей 8 пронумерованных жетонов, вынимают один за другим все находящиеся в ней жетоны и укладывают рядом. Найти вероятность того, что номера вынутых жетонов будут идти по порядку 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
10. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «книга».
11. В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты, колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.
12. На отдельных одинаковых карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все девять карточек перемешивают, после чего наугад берут четыре карточки и раскладывают в ряд в порядке появления. Какова вероятность получить при этом: а) четное число? б) число 1234?
13. Какова вероятность, что на трех карточках, вынутых по одной и положенных в порядке их появления, получим число 325, если всего карточек было шесть с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6?
14. Восемь различных книг расставляются наугад на полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.
15. Среди изготовленных 15 деталей имеется 5 нестандартных. Определить вероятность того, что взятые наугад три детали окажутся стандартными.
16. В партии готовой продукции из 10 изделий имеется 7 изделий повышенного качества. Наудачу отбираются шесть изделий. Какова вероятность того, что четыре из них будут повышенного качества?
17. Какова вероятность того, что два определенных студента будут посланы на практику в г. Лабинск, если предоставлено 6 мест в г. Лабинск, 10 – в г. Анапу и 4 – в г. Тимашевск?
18. В клетке содержится 18 кур. Из них 6 не вакцинированы. Партию делят на 2 равные части. Какова вероятность того, что не вакцинированные куры разделятся поровну?

19. Из 25 студентов группы 12 занимаются научной работой на кафедре бухгалтерского учета, 7 - экономического анализа, остальные – на кафедре статистики. Какова вероятность того, что два случайно отобранных студента занимаются научной работой на кафедре статистики?
20. Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из трех человек. Найти вероятность того, что в делегацию войдут: а) две женщины и один мужчина; б) все женщины.
21. Среди 20 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрываются 5 билетов в театр. Определить вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся три девушки.
22. Определить вероятность того, что участник лотереи «Спортлото – 5 из 36» угадает правильно: а) все 5 номеров; б) 3 номера.
23. Цифровой замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, отмеченных цифрами. Замок открывается в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Какова вероятность того, что замок откроется, если установить произвольную комбинацию цифр?
24. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включается случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.
25. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.
26. Имеются изделия четырех сортов, причем число изделий $i$-го сорта равно $n_i$: $n_1 = 5, n_2 = 5, n_3 = 5,\ n_4 = 5.$ Для контроля наудачу берутся $m = 10$ изделий. Определить вероятность того, что среди них $m_1 = 2,$ первосортных, $m_2 = 3,\ m_3 = 1$ и $m_4 = 4$ второго, третьего и четвертого сорта соответственно.
27. Среди $n = 100$ лотерейных билетов $k = 5$ выигрышных. Наудачу взяли $m = 10$ билетов. Определить вероятность того, что среди них $l = 2$ выигрышных.
28. В лифт $n = 22$-этажного дома сели $k = 5$ пассажиров. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере двое сошли на одном этаже.

## 1.4 Основные теоремы теории вероятностей

### Вопросы для обсуждения

Теорема сложения вероятностей. Условная частота, ее устойчивость. Условная вероятность события. Формула умножения вероятностей. Независимые события.

## Контрольные задания

1. Круговая мишень состоит из трех зон. Вероятности попадания в эти зоны при одном выстреле соответственно равны 0,1; 0,35 и 0,4. Найти вероятность: а) попадания в первую или третью зоны; б) промаха по мишени.
2. Вероятность поражения первой мишени для данного стрелка равна 0,6. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на следующий выстрел по второй мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,3. Определить вероятность поражения второй мишени.
3. В группе 25 студентов, из них 10 юношей и 15 девушек. Какова вероятность того, что из вызванных наудачу трех студентов: а) все три девушки; б) первые две девушки, третий – юноша; в) все три юноши?
4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Выстрелы производятся по одному до первого попадания. Определить вероятность того, что придется производить четвертый выстрел.
5. Вероятность безотказной работы автомобиля равна 0,9. Автомобиль перед выходом на линию осматривается двумя механиками. Вероятность того, что первый механик обнаружит неисправность в автомобиле равна 0,8, а второй – 0,9. Если хотя бы один механик обнаружит неисправность, то автомобиль отправляется на ремонт. Найти вероятность того, что: а) автомобиль будет выпущен на линию; б) автомобиль не будет выпущен на линию.
6. Вероятность одного попадания в цель при одновременном залпе из двух орудий равно 0,44. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если для второго орудия эта вероятность равна 0,8.
7. Из 40 деталей в ящике 5 бракованных. Какова вероятность того, что взятые одновременно две детали не будут бракованными?
8. В коробке 12 карандашей трех цветов, по четыре карандаша каждого цвета. Наудачу вынимают три карандаша. Найти вероятность того, что все карандаши окажутся разного цвета. Решить задачу при условии: а) карандаши возвращают в коробку; б) карандаши не возвращают в коробку.
9. Из урны, содержащей четыре красных и шесть черных шаров, вынимают два шара (без возвращения первого). Какова вероятность того, что будут вынуты: а) два шара черного цвета; б) красный и черный в любой последовательности; в) второй шар будет черным; г) оба шара одного цвета?
10. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Приобретено три билета. Какова вероятность выиграть хотя бы по одному из них?
11. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна 0,6. Производится по одному выстрелу одновременно из трех орудий. Цель будет поражена, если в нее попадут не менее двух орудий. Найти вероятность: а) поражения цели; б) промаха одним или двумя орудиями.
12. Слово «машина» составлено из букв разрезной азбуки. Какова вероятность того, что, перемешав все буквы и укладывая их в ряд по одной, получим слово: а) «машина»; б) «шина»; в) «маша»?
13. В магазин вошли три покупателя. Вероятность того, что каждый что-нибудь купит, равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) два из них совершат покуп-

ки; б) все три совершат покупки; в) ни один не совершит покупки; г) по крайней мере, два совершат покупки; д) хотя бы один купит товар.

14. Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии – 0,2, на втором – 0,35, на третьем – 0,15. Определить вероятность того, что акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды: а) на всех предприятиях; б) только на одном предприятии; в) хотя бы на одном предприятии.
15. Брошены две игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на пять.
16. Два игрока поочередно бросают 2 игральные кости. Выигрывает тот, у которого первым появится в сумме двенадцать очков. Найти вероятность выигрыша для каждого игрока.
17. Через автобусную остановку проходят автобусы семи маршрутов с равной частотой. Пассажир ожидает автобус одного из маршрутов №1, №5, №7. Какова вероятность, что нужный ему автобус будет одним из первых трех подошедших к остановке?
18. Читатель в поисках нужной книги обходит три библиотеки. Вероятность того, что она имеется в очередной библиотеке равна 0,3. Что вероятнее – найдет читатель книгу или нет?
19. В денежно-вещевой лотерее на каждые 1000 билетов приходится 12 денежных и 8 вещевых выигрышей. Какова вероятность выигрыша хотя бы на один из трех приобретенных билетов?
20. В урне 10 красных, 5 зеленых и 3 черных шара. Определить вероятность того, что взятые наудачу два шара будут: а) одного цвета; б) разных цветов.
21. На базу поступило 40 ящиков овощей, из них 30 первого сорта. Наудачу для проверки берут два ящика. Какова вероятность, что: а) оба содержат овощи первого сорта; б) разного сорта; в) одного сорта?
22. Читатель разыскивает книгу в трех библиотеках. Одинаково вероятно, есть или нет в фонде очередной библиотеки книга и также одинаково вероятно, выдана она или нет. Чему равна вероятность того, что читатель найдет нужную книгу?
23. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично» равна для первого студента 0,7, для второго - 0,6, для третьего – 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»: а) только одним студентов; б) двумя студентами; в) хотя бы одним; г) ни одним?
24. Первый студент из 20 вопросов программы выучил 17, второй – 12. Каждому студенту задают по одному вопросу. Определить вероятность того, что: а) оба студента правильно ответят на вопрос; б) хотя бы один ответит верно; в) правильно ответит только первый студент.
25. Студент из 40 экзаменационных вопросов выучил только 30. Каким выгодней ему зайти на экзамен, первым или вторым?
26. В первой бригаде 6 тракторов, во второй – 9. В каждой бригаде один трактор требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному тракто-

ру. Какова вероятность того, что: *а*) оба трактора исправны; б) один требует ремонта; в) трактор из второй бригады исправен.

27. На предприятии имеется три автомобиля. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,9, второго – 0,7, третьего – 0,8. Найти вероятности всех возможных значений числа автомобилей, работающих безотказно в течение определенного времени.
28. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,784. Найти вероятность одного промаха при трех выстрелах.
29. В круг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Чему равна вероятность того, что поставленные наудачу внутри круга две точки окажутся внутри заданного прямоугольника?
30. Сколько раз необходимо бросить игральную кость, чтобы с вероятностью 0,9 хотя бы один раз выпало не менее четырех очков?
31. Вероятность спортсменом взять в одной попытке высоту 1,8 м равна 0,6, высоту 2 м – 0,2, высоту 2 м 10 см – 0,1. Спортсмен, не взявший предыдущую высоту, выбывает из соревнований. Спортсмену на каждую высоту дается три попытки. Определить вероятность того, что спортсмен закончит соревнования, взяв высоту: а) 1,8 м; б) 2 м; в) 2 м 10 см.
32. В первой урне 5 красных, 3 белых и 2 черных шара. Во второй 3 белых и 2 черных шара. Из первой урны взято 2 шара, а из второй один. Определить вероятность того, что среди них: а) все шары одного цвета; б) все шары разного цвета.
33. Предположим, что 85% людей, которые интересуются возможными инвестициями (вложениями) в брокерскую фирму, не покупают акции, а 33 % не покупают облигации. Также известно, что 28% интересующихся прерывают покупку ценных бумаг – как акций, так и облигаций. Некто интересуется делами компании. Чему равна вероятность, что он будет покупать либо облигации, либо акции, либо и то и другое?
34. Консультационная фирма получила приглашение для выполнения двух работ от двух международных корпораций. Руководство фирмы оценивает вероятность получения заказа от фирмы $A$ (событие $A$) равной 0,45. Также, по мнению руководителей фирмы в случае, если фирма заключит договор с компанией $A$, то с вероятностью в 90 % компания $B$ даст фирме консультационную работу. С какой вероятностью компания получит оба заказа?
35. Урна содержит $N = 90$ занумерованных шаров лотареи «Русское лото» с номерами от 1 до $N$. Шары, извлекаются по одному без возвращения. Рассматриваются следующие события: А – номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1, 2, 3, …, $N$; В – хотя бы один раз совпадает номер шара и порядковый номер извлечения; С – нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. а) определить вероятности событий А, В, С; б) найти предельные значения вероятностей событий, если извлекаются все шары из урны, при $N \to +\infty$.

### 1.5 Формулы полной вероятности и вероятности гипотез

**Вопросы для обсуждения**

Формула полной вероятности и формула Байеса.

**Контрольные задания**

1. При исследовании жирности молока коров все стадо было разбито на три группы. В первой группе оказалось 70%, во второй 23% коров. Вероятность того, что молоко, полученное от отдельной коровы, имеет не менее 4% жирности, для каждой группы коров соответственно равна 0,6; 0,35 и 0,1. Определить вероятность того, что для взятой наудачу коровы жирность молока составит не менее 4%. Взятая наудачу корова дает молоко жирностью не менее 4%. Найти вероятность того, что эта корова из первой группы.
2. В первой урне 10 деталей, из них 8 стандартных. Во второй 6 деталей, из которых 5 стандартных. Из второй урны переложили в первую одну деталь. Какова вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из второй урны, нестандартная?
3. Имеются две урны. В первой – семь красных шаров и три черных, во второй – три красных и четыре черных. Из первой урны переложили во вторую один шар, затем, перемешав шары, из второй урны переложили в первую один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первой урны, окажется красным.
4. Перед посевом 90% всех семян было обработано ядохимикатами. Вероятность поражения вредителями для растений из обработанных семян равна 0,08, для растений из необработанных семян − 0,4. Взятое наудачу растение оказалось пораженным. Какова вероятность того, что оно выращено из партии обработанных семян?
5. В районе 24 человека обучаются на заочном факультете института, из них шесть – на мехфаке, двенадцать – на агрофаке и шесть – на экономфаке. Вероятность успешно сдать экзамены на предстоящей сессии для студентов мехфака равна 0,6, агрофака – 0,76 и экономфака – 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый студент, сдавший успешно экзамены, окажется студентом экономфака.
6. В первом ящике из 20 деталей 4 бракованных, во втором из 30 деталей 5 бракованных. Из первого во второй переложили две детали. Найти вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из второго ящика, бракованная.
7. Стрелковое отделение получило 10 винтовок, из которых 8 пристрелянных, две нет. Вероятность попадания в цель из пристрелянной винтовки равна 0,6, а из не пристрелянной 0,4. Стрелок поразил цель. Какова вероятность того, что он стрелял из пристрелянной винтовки?
8. Для посева заготовлены семена 4 сортов пшеницы. Причем, 20% всех семян 1-го сорта, 30% - 2-го сорта, 10% - 3-го сорта и 40% - 4-го сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 40 зерен, для первого сорта равна 0,5, для второго – 0,3, для третьего – 0,2, для четвертого

– 0,1. Найти вероятность того, что наудачу взятое зерно даст колос, содержащий не менее 40 зерен.

9. Из 25 студентов группы 5 студентов знают все 30 вопросов программы, 10 студентов выучили по 25 вопросов, 7 студентов по 20 вопросов, трое по 10 вопросов. Случайно вызванный студент ответил на два заданных вопроса. Какова вероятность, что он из тех трех студентов, которые подготовили только по 10 вопросов.
10. Запасная деталь может находиться в одной из трех партий с вероятностями $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}3$. Вероятности того, что деталь проработает положенное время без ремонта, равны соответственно 0,9; 0,8 и 0,7. Определить вероятность того, что: а) взятая наудачу деталь проработает положенное время; б) деталь, проработавшая положенное время, взята из второй или третьей партии.
11. Имеется 5 урн. В первой, второй и третьей находится по 4 белых и 6 черных шаров, в четвертой и пятой урнах по 2 белых и 3 черных шара. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова вероятность того, что была выбрана четвертая или пятая урна, если извлеченный шар оказался белым?
12. В первой бригаде производится в три раза больше продукции, чем во второй. Вероятность того, что производимая продукция окажется стандартной для первой бригады равна 0,7, для второй – 0,8. 1) Определить вероятность того, что взятая наугад единица продукции будет стандартной. 2) Взятая наугад единица продукции оказалась стандартной. Какова вероятность, что она из второй бригады?
13. Покупатель с равной вероятностью посещает 3 магазина. Вероятность того, что он купит товар в первом магазине равна 0,4, во втором 0,3, в третьем 0,2. Определить вероятность того, что покупатель купит товар только в одном магазине, если каждый магазин он посетил дважды.
14. Вероятность того, что клиент банка не вернёт заём в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнётся период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернёт полученный кредит?
15. Экономист-аналитик условно подразделяет экономическую ситуацию в стране на «хорошую», «посредственную» и «плохую» и оценивает их вероятности для данного момента времени как 0,15, 0,70 и 0,15 соответственно. Некоторый индекс экономического состояния возрастает: с вероятностью 0,6, когда ситуация «хорошая»; с вероятностью 0,3, когда ситуация «посредственная»; с вероятностью 0,1, когда ситуация «плохая». Пусть в настоящий момент индекс экономического состояния изменился. Какова вероятность того, что экономика страны на подъёме?
16. Согласно исследованиям аппаратных сбоев компьютерной компании *ABC* на одном миллионе компьютеров, более 30 суток работы *CPU* имеет вероятность сбоя 0,02. Если сбой произошел, то вероятность повторного сбоя каждые пять суток равна 0,3. Если сбоя первые 30 суток не было, то вероят-

ность сбоя 0,01 каждые 10 суток. Определить вероятность сбоя произвольного компьютера за 60 суток. Если компьютер работает без сбоя через 60 суток, то какова вероятность того, что у него не было сбоя первые 30 суток.

17. (*Задача Монти Холла*). Монти Холл вел известное шоу в котором указывал на три двери и говорил, что за одной из них находится автомобиль, а за другими менее ценные призы. Предлагалось угадать нужную дверь и выиграть главный приз. Прежде чем открыть выбранную участником шоу дверь, Монти увеличивал неопределенность, открывая одну из двух оставшихся дверей за которой не было автомобиля. Следует ли участнику шоу остановиться на выбранной двери, или указать на дверь, оставшуюся закрытой? (Возможное решение см. в гл. 19.)
18. (*Задача о поездах*). На железной дороге $N$ поездов с номерами 1, 2, …, $N$. Склько поездов на железной дороге, если: а) однажды Вам встретился поезд с номером 60, б) вы повстречали 5 поездов, причем номер 60 по прежему наибольший. (Мостеллер Ч.Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. М.: Наука, 1975. –112 с. Задача № 41.)
19. (*Задача о танках*). В годы второй мировой войны союзниками была захвачена техническая документация, связанная с ремоном танков. Проведенный анализ серийных номеров в каждой типичной группе танков показал, что в последовательности из 100 номеров наблюдаются пропуски. Поэтому внутри каждой группы задачу можно свести к задаче о поездах. Аналитики того времени опираясь на эти данные смогли дать более точную экономическую оценку производства техники (танков, машин, шин и т.д.), чем по данным из других источников.

## Тема 2 Повторные независимые испытания

### Вопросы для обсуждения

Схема Бернулли. Формула Бернулли. Навероятнейшее число успехов в схеме Бернулли.

### Контрольные задания

1. Найти вероятность того, что при четырех подбрасываниях игральной кости пять очков появится: а) два раза; б) хотя бы один раз.
2. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) пять семян; б) не менее четырех; в) не более одного.
3. Вероятность выбора отличника на факультете равна 1/7. Из 28 студентов группы наудачу вызываются три студента. Определить вероятности всех возможных значений числа отличников, которые могут оказаться среди вызванных трех студентов.
4. В семье пять детей. Считая вероятности рождений мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков.
5. Всхожесть клубней картофеля равна 80%. Сколько нужно посадить клубней, чтобы наивероятнейшее число взошедших из них было равно 100?
6. Сколько раз нужно подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадения 6 очков было равно 50?
7. Два равносильных противника играют в шахматы. Для каждого из них, что вероятнее выиграть: а) одну партию из двух или две из четырех; б) не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти. Ничьи во внимание не принимаются.
8. Бланк программированного опроса состоит из пяти вопросов. На каждый даны три ответа, среди которых один правильный. Какова вероятность, что методом угадывания студенту удастся выбрать, по крайней мере, четыре правильных ответа?
9. Вероятность появления события $A$ в каждом из 6 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие $A$ наступит хотя бы в одном испытании.
10. Событие $A$ появится в случае, если событие $B$ наступит не менее четырех раз. Найти вероятность наступления события $A$, если будет произведено 5 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события $B$ равна 0,8.
11. Два стрелка производят по n выстрелов, причём каждый стреляет по своей мишени. Определить вероятность того, что у них будет по одинаковому числу попаданий, если вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна 0,5.
12. Торговый агент в среднем контактирует с восемью потенциальными покупателями в день. Из опыта ему известно, что вероятность того, что потенци-

альный покупатель совершит покупку, равна 0,1. Чему равна для агента вероятность в течение одного дня:

а) двух продаж; б) хотя бы двух продаж; в) не совершить продаж?

13. Фирма предлагает в продажу со склада партию из 10 компьютеров, 4 из которых с дефектами. Покупатель приобретает 5 из них, не зная о возможных дефектах. Чему равна вероятность что, что все 5 компьютеров окажутся без дефектов?
14. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадает *5* раз. Определить вероятность того, что цифра выпадает *7* раз.
15. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна *0,01*. Куплено *100* билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.
16. На каждый лотерейный билет с вероятностью $p_1 = 0{,}0001$ может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью $p_3 = 0{,}01$ - мелкий выигрыш и с вероятностью $p_3$ билет может оказаться без выигрыша. Куплено *15* билетов. Определить вероятность получения 2 крупных выигрыша и *5* мелких.

### 2.2. Приближенные формулы в схеме Бернулли

**Вопросы для обсуждения**

Локальная и интегральная формула Муавра-Лапласа. Формула Пуассона.

**Контрольные задания**

1. Вероятность того, что при сортировке изделий одно из них будет разбито, равна 0,005. Найти вероятность того, что из 200 изделий окажутся разбитыми: а) три изделия; б) не более двух; в) не менее двух изделий.
2. Станок автомат делает детали. Вероятность того, что деталь окажется бракованной равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.
3. Установлено, что виноградник поражен вредителями в среднем на 10 %. Определить вероятность того, что из 10 проверенных кустов винограда один будет поражен. Вычислить вероятности по формулам Бернулли, Лапласа, Пуассона. Сравнить результаты, сделать выводы.
4. На факультете 900 студентов. Вероятность дня рождения каждого студента в данный день равна $\frac{1}{365}$. Найти вероятность того, что найдутся три студента с одним и тем же днем рождения.
5. Вероятность получения отличной оценки на экзамене равна 0,2. Найти наивероятнейшее число отличных оценок и вероятность этого числа, если сдают экзамен 50 студентов.
6. Вероятность того, что автомат при опускании одной монеты правильно сработает, равна 0,99. Найти наиболее вероятное число случаев неправильной работы автомата и вероятность этого числа случаев, если будет опущено 200 монет.

7. Численность работников предприятия составляет 500 человек. Вероятность невыхода на работу из-за болезни равна 0,01 для каждого работника предприятия. Определить вероятность того, что в ближайший день не выйдет на работу хотя бы один из работников.
8. В пчелиной семье 5000 пчел. Вероятность заболевания в течение дня равна 0,001 для каждой пчелы. Найти вероятность того, что в течение дня заболеет более чем одна пчела.
9. Известно, что 80 % специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек высшее образование имеет: а) не менее 70; б) от 65 до 90 человек.
10. Всхожесть семян составляет 80 %. Какова вероятность того, что из 1000 посеянных семян взойдут от 650 до 760?
11. Найти такое число $k$, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что среди 900 новорожденных более $k$ мальчиков, если вероятность рождения мальчика 0,515.
12. В автопарке 70 машин. Вероятность поломки машины равна 0,2. Найти наивероятнейшее число исправных автомобилей и вероятность этого числа.
13. Всхожесть зерна, хранящегося на складе равна 80%. Какова вероятность того, что среди 100 зерен: а) число всхожих составит от 68 до 90 шт.; б) доля (частость) всхожих зерен будет отличаться от вероятности 0,8 по абсолютной величине не более чем на 0,1?
14. Два стрелка одновременно делают выстрелы по мишени. Сколько нужно произвести залпов, если наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, равно 8, причем вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,5, а для второго – 0,8?
15. При проведении некоторого опыта вероятность появления ожидаемого результата равна 0,01. Сколько раз нужно провести опыт, чтобы с вероятностью 0,5 можно было бы ожидать хотя бы одного появления этого результата?
16. В автопарке имеется 400 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них равна 0,9. С вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля безотказно работавших машин в определенный момент времени.
17. Всхожесть зерна равна 90%. Определить вероятность того, что для отобранных случайным образом 100 зерен относительная частота всхожести по абсолютной величине будет отличаться от вероятности взойти $p = 0,9$ не более чем на 0,1.
18. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число $\varepsilon$, чтобы с вероятностью 0,9876 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности 0,8, не превысила.
19. Отдел контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. С вероятностью 0,9544 найти границы, в которых будет заключено число стандартных деталей.

20. Известно, что 10% делянок под овощами плохо обработаны. Сколько нужно проверить делянок, чтобы с вероятностью 0,9973 можно было утверждать, что относительная частота засоренных делянок будет отличаться от вероятности засоренности по модулю не более чем на 0,01?
21. Для определения степени поражения винограда вредителями было обследовано 400 кустов. Вероятность поражения куста виноградника равна 0,03. Определить границы, в которых с вероятностью 0,9545 будет заключено число кустов, не пораженных вредителями.
22. Проверяется всхожесть кукурузы. Сколько семян необходимо посеять с вероятностью всхожести 0,99, чтобы относительная частота всхожести отличалась от 0,95 меньше, чем на 0,01?
23. Вероятность того, что человек в период страхования будет травмирован, равна 0,006. Компанией застраховано 1000 человек. Годовой взнос с человека составляет 150 руб. В случае получения травмы застраховавшийся получает 12000 руб. Какова вероятность того, что выплата по страховкам превысит сумму страховых взносов?
24. Вероятнсть аппаратного сбоя сервера через восемь месяцев работы (ошибка памяти) 0,02. Поступило 1000 обращений к серверу. Определить вероятность 100 «сбоев».
25. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 200 независимых испытаний равна 0,3. Определить вероятность того, что число $m$ наступлений события удовлетворяет следующему неравенству:1) $10 \leq m \leq 50$, 2) $100 \leq m$, 3) $m \leq 150$.

## Тема 3 Дискретные случайные величины

### Вопросы для обсуждения

Понятие случайной величины. Дискретные случайные величины (ДСВ). Ряд распределения. Математическое ожидание ДСВ, его вероятностный смысл. Свойства математического ожидания случайной величины. Дисперсия случайной величины, ее свойства. Среднее квадратическое отклонение. Моменты случайных величин. Законы распределение случайных величин (биномиальный, геометрический, гипергеометрический, Пуассона).

### Контрольные задания

1. Вероятность работы каждого из четырех комбайнов без поломок в течение определенного времени равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа комбайнов, работавших безотказно. Построить график распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$.
2. Вероятность рождения в семье мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа мальчиков в семьях, имеющих четырех детей. Построить график распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.
3. Вероятность того, что покупатель совершит покупку в магазине 0,4. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа покупателей, совершивших покупку, если магазин посетило 3 покупателя. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$.
4. В группе из 10 спортсменов 6 мастеров спорта. Отбирают (по схеме без возвращения) 3−х спортсменов. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа мастеров спорта из отобранных спортсменов. Найти математическое ожидание случайной величины $X$.
5. В группе, состоящей из $(2N + 1)$ студентов, $N$ девушек. Составить закон распределения случайной величины X – числа девушек из случайно отобранных трех студентов ($N$ – номер студента в группе).
6. В партии из ($N$+5) изделий ($N$+1) изделие высокого качества. Случайно отбирается 3 изделия. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа изделий высокого качества среди отобранных.
7. Стрелок производит выстрелы по цели до первого попадания. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа выстрелов, сделанных стрелком. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле составляет 0,7. Найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.
8. Покупатель посещает магазины для приобретения нужного товара. Вероятность того, что товар имеется в определенном магазине составляет 0,4. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа магазинов, которые посетит покупатель из четырех возможных. Построить график распределения. Найти наиболее вероятное число магазинов, которые посетит покупатель.

9. Игрок поочередно покупает билеты двух разных лотерей до первого выигрыша. Вероятность выигрыша по одному билету первой лотереи составляет 0,2, а второй 0,3. Игрок вначале покупает билет первой лотереи. Составить закон распределения и найти математическое ожидание случайной величины $X$ – числа купленных билетов, если он имеет возможность купить: а) только 5 билетов; б) неограниченное число билетов.
10. На конноспортивных соревнованиях необходимо преодолеть четыре препятствия с вероятностями, равными соответственно 0,9; 0,8; 0,7; 0,6. При первой неудаче спортсмен в дальнейших состязаниях не участвует. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа взятых препятствий. Найти математическое ожидание случайной величины $X$.
11. В игре спортивной лотереи угадывается 5 номеров из 36. Игрок получает выигрыш, если угадает 5, 4 или 3 номера. За 5 угаданных номеров выигрыш составляет 1 млн. руб. Сумма выигрыша по одной карточке за 4 правильно угаданных номера в 9 раз больше, чем за 3. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа правильно угаданных номеров. Определить среднюю величину выигрыша, если известно, что карточек было выпущено 1 млн. шт. Стоимость одной карточки 100 руб. Выигрыши составляют 50 % общей суммы тиража, который был весь продан.
12. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,9, вторым − 0,8 и третьим − 0,7. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа попаданий в цель, если каждый стрелок производит по одному выстрелу. Определить математическое ожидание случайной величины X.
13. Вероятность успешной сдачи экзамена первым студентом составляет 0,7, а вторым − 0,8. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа студентов, успешно сдавших экзамен, если каждый из них может пересдать один раз экзамен, если он его первый раз не сдал. Найти математическое ожидание случайной величины $X$.
14. Дискретная случайная величина $X$ задана законом распределения:

| X | Значения вероятностей по вариантам | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 0,1 | 0,2 | 0,05 | 0,15 | 0,1 | 0,2 | 0,25 | 0,1 | 0,4 | 0,05 |
| 3 | 0,2 | 0,25 | 0,15 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,15 | 0,3 | 0,1 |
| 5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,25 | 0,2 | 0,15 |
| 7 | 0,2 | 0,15 | 0,4 | 0,25 | 0,2 | 0,05 | 0,15 | 0,35 | 0,08 | 0,25 |
| 9 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,15 | 0,1 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,02 | 0,45 |

По одному из 10 вариантов построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$.
15. Предприниматель рассматривает возможность покупки акций трех предприятий, по каждой из которых известна доходность, как отношение величины получаемого дохода за период времени к цене акции и вероятности возмож-

ных значений доходности. Акции какого предприятия следует считать более доходными, если руководствоваться средним значением (математическим ожиданием) доходности? Акции какого предприятия являются менее рискованными (считается, что чем выше колеблемость доходности акций, тем больше их рискованность)?

| Предприятие 1 | | Предприятие 2 | | Предприятие 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| Доходность (%), $X$ | Вероятность, $P_x$ | Доходность (%), $Y$ | Вероятность, $P_x$ | Доходность (%), $Z$ | Вероятность, $P_z$ |
| 5 | 0,2 | 3 | 0,1 | 1 | 0,1 |
| 7 | 0,3 | 7 | 0,4 | 6 | 0,4 |
| 9 | 0,4 | 10 | 0,3 | 10 | 0,25 |
| 11 | 0,1 | 15 | 0,2 | 20 | 0,25 |

16. Бросают 12 игральных костей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$ – суммы числа очков, которые могут появиться на всех выпавших гранях.
17. Математическое ожидание случайной величины $X$ равно 8. Найти математическое ожидание случайных величин: а) $\mathrm{X}-4$; б) $\mathrm{X}+6$; в) $3\mathrm{X}-4$; г) $4\mathrm{X}+3$.
18. Дисперсия случайной величины $X$ равна 8. Найти дисперсию следующих величин: а) $\mathrm{X}-2$; б) $\mathrm{X}+6$; в) $3\mathrm{X}-2$; г) $2\mathrm{X}+7$.
19. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин:
а) $Z=4\mathrm{X}-2Y$; б) $Z=2\mathrm{X}-4Y$; в) $Z=3\mathrm{X}+5Y$; если $\mathrm{M}(\mathrm{X})=5, \mathrm{M}(Y)=3, D(\mathrm{X})=4$,
$D(Y)=6$. Случайные величины $X$ и $Y$ независимы.
20. Случайные величины $X$ и $Y$ независимы. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин: а) $Z=4\mathrm{X}+2Y$; б) $Z=5\mathrm{X}-3Y$; в) $Z=3\mathrm{X}-Y$,
если $\mathrm{M}\,(\mathrm{X})=6, \mathrm{M}\,(Y)=5, D(\mathrm{X})=5, D(Y)=4$.
21. Вероятность изготовления бракованной детали автоматом равна 0,002. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$ - числа бракованных деталей, если деталей изготовлено 1000. Определить вероятность того, что из 1000 деталей будет изготовлено: а) не более двух бракованных; б) хотя бы одна бракованная.
22. Независимые случайные величины $X$ и $Y$ имеют следующие распределения:

| $x_i$ | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

| $y_j$ | 3 | 4 |
|---|---|---|
| $p_j$ | 0,4 | 0,6 |

Составить закон распределения случайных величин: а) $Z=X+Y$; б) $V=XY$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин $Z$ и $V$.

23. В бригаде имеется два звена тракторов. В первом звене − 3 трактора, причем вероятность безотказной работы каждого из них в течение смены равна 0,9. Во втором звене − 2 трактора, вероятность безотказной работы первого из них равна 0,8, а второго − 0,7. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа тракторов, работавших безотказно в бригаде. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$.
24. Два стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна $N/(N+5)$, вторым $N/(N+2)$. Составить закон распределения случайной величины $Z=X+Y$, где $X$ – число поражений мишени первым стрелком, $Y$ – число поражений мишени вторым стрелком. Найти числовые характеристики случайной величины $Z$.
25. Случайные величины $X$ – площадь посева овощей на хозяйство (га) и $Y$ – урожайность овощей с 1 га (т) имеют следующие распределения:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

| $y_j$ | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|
| $p_j$ | 0,2 | 0,5 | 0,3 |

Определить средний валовой сбор овощей на хозяйство, дисперсию и среднее квадратическое отклонение валового сбора овощей.
26. Дискретная случайная величина $X$ принимает три возможных значения: $x_1=1$ с вероятностью $p_1=0{,}2$; $x_3=5$ с вероятностью 0,3 и $x_2$ с вероятностью $p_2$. Найти $x_2$ и $p_2$, если известно, что $\text{M (X)} = 3$.
27. Вероятность сдать экзамен студентом на «отлично» равна 0,3, на «хорошо» – 0,4. Определить вероятности получения других оценок (2; 3), если известно, что $\text{M}(X) = 3{,}9$.
28. Вероятность выигрыша по лотерейному билету составляет 0,02. Найти M(X) и $\sigma$(X) числа выигравших билетов, если их было приобретено 100.
29. По одному тиражу лотереи куплено 100 билетов. Среднее квадратическое отклонение числа выигранных билетов равно трем. Найти вероятность выигрыша по одному билету лотереи.
30. Подброшены две игральные кости. Найти M(X), где случайная величина X – сумма числа очков, которые могут появиться на двух выпавших гранях.
31. Хозяйство продает крупный рогатый скот живым весом $x_1$ и $x_2$ $(x_1 > x_2)$. Вероятность того, что крупный рогатый скот будет продан весом $x_1$ равна 0,4. Найти закон распределения случайной величины X – веса крупного рогатого скота, если математическое ожидание составило 4,60 ц, а дисперсия 0,24.
32. Совокупность семей имеет следующее распределение по числу детей:

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | $p_2$ | 0,4 | 0,35 |

Определить $x_1$, $x_2$, $p_2$, если известно, что $\text{M(X)} = 2, D(\text{X}) = 0{,}9$.

33. Дискретная случайная величина $X$ задана законом распределения:

| $x_i$ | 1 | $x_2$ | $x_3$ | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | $p_2$ | 0,5 | 0,1 |

Найти $x_2$, $x_3$, $p_2$, если известно, что $M(X) = 4, M(X2) = 20{,}2$.

34. Совокупность студентов имеет следующее распределение по результатам сдачи сессии:

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |

Найти вероятности получения удовлетворительных, хороших и отличных оценок, если известно, что математическое ожидание (среднее значение) результатов сдачи экзаменов составило 3,7, а среднее квадратическое отклонение 0,9.

35. По данным задачи 14 определить модальное и медианное значения случайной величины $X$.

36. Для того чтобы проверить точность своих финансовых счетов, компания регулярно пользуется услугами аудиторов для проверки в бухгалтерских проводках счетов. Предположим, что служащие компании при обработке 100 входящих счетов допускают примерно 5 ошибок. Аудитор случайно отбирает 3 входящих документа.

    а) Найти закон распределения случайной величины $X$ – числа ошибок, выявленных аудитором.

    б) Построить функцию распределения и её график (вероятностную гистограмму).

    в) Определить вероятность того, что аудитор обнаружит более чем одну ошибку.

37. Фирма предлагает в продажу со склада партию из 10 компьютеров, 4 из которых – с дефектами. Покупатель приобретает 5 из них, не зная о возможных дефектах. Чему равна вероятность что, что все 5 компьютеров окажутся без дефектов? Ремонт одной дефектной машины будет стоить 3000 руб. Найдите математическое ожидание средней стоимости ремонта и его дисперсию.

## Тема 4 Непрерывные случайные величины

### Вопросы для обсуждения

Непрерывные случайные величины (НСВ). Функция распределения случайной величины, ее свойства. Плотность распределения вероятностей случайной величины, ее свойства. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение НСВ. Моменты НСВ.

### Контрольные задания

1. Даны законы распределения дискретной случайной величины:

а)

| $X$ | 1 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,2 |

б)

| $X$ | $-2$ | 5 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

Найти функцию распределения случайной величины $X$ и построить ее график.

2. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $X$ – числа попаданий в цель, если произведено три выстрела с вероятностью попадания в цель при каждом выстреле 0,8.
3. Вероятность сдачи первого экзамена студентом составляет 0,7, второго 0,6 и третьего 0,8. Найти функцию распределения случайной величины $X$ – числа экзаменов, сданных студентом. Определить $M(X)$.
4. Случайная величина $X$ задана функцией распределения:

$$F(x)\begin{cases} 0, \text{при } x < -2, \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, \text{при} -2 \le x \le 2, \\ 1, \text{при } x \ge 2 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина $X$ примет значение: *а*) меньше 0; б) меньше 1; в) не меньше 1; г) заключенное в интервале (0;2).

5. Дана функция распределения случайной величины $X$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0, \\ \dfrac{x^6}{4}, \text{при } 0 \le x < \sqrt[3]{2}, \\ 1, \text{при } x \ge \sqrt[3]{2}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате шести испытаний случайная величина $X$ два раза примет значение, принадлежащее интервалу (0;1).

6. Случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<1,\\ \dfrac{x^2}{8}-\dfrac{1}{8}, \text{при } 1\le x<3,\\ 1, \text{при } x\ge 3.\end{cases}$$

Найти: *а*) плотность распределения вероятностей случайной величины *X*; б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (1;2).

7. Дана функция распределения случайной величины *X*:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<-2a,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{a}{2}, \text{при} -2a\le x<(4-2a),\\ 1, \text{при } x\ge (4-2a).\end{cases}$$

*а*) Определить вероятность попадания случайной величины в интервал (-*а; а*).

б) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

8. Случайная величина *X* задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<A,\\ \dfrac{x^3}{8}, \text{при } A\le x<B,\\ 1, \text{при } x\ge B.\end{cases}$$

Найти значения *A* и *B*, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

9. Случайная величина *X* задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<1,\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}, \text{при } 1\le x<2,\\ 1, \text{при } x\ge 2.\end{cases}$$

Найти: *а*) функцию плотности распределения вероятностей случайной величины *X*; б) вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний случайная величина *X* хотя бы один раз примет значение, принадлежащее интервалу (1;1,5) ; в) начертить графики функций.

10. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<2,\\ \dfrac{x^3-8}{19}, \text{при } 2\le x<3,\\ 1, \text{при } x\ge 3.\end{cases}$$

Найти: *а*) функцию плотности вероятностей; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (2,5; 3); в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*; г) моду и медиану величины *X*. Построить графики функций.

11. Случайная величина *X* задана функцией плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0, \\ \dfrac{4a - 2x}{3a^2}, \text{при } 0 \le x < a, \\ 0, \text{при } x \ge a. \end{cases}$$

Найти: *а*) функцию распределения случайной величины; б) вероятность попадания случайной величины в интервал $(\frac{a}{6}; \frac{a}{3})$.

12. Случайная величина *X* задана функцией плотности вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0, \\ x^3 + x, \text{при } 0 \le x < \sqrt{\sqrt{5} - 1}, \\ 0, \text{при } x \ge \sqrt{\sqrt{5} - 1}. \end{cases}$$

Определить: *а*) функцию распределения случайной величины *X*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (1;1,1). Начертить графики функций.

13. Случайная величина *X* задана функцией плотности вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 1, \\ \dfrac{1}{16}, \text{при } 1 \le x < 17, \\ 0, \text{при } x \ge 17. \end{cases}$$

Определить: *а*) функцию распределения вероятностей случайной величины *X*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (9;12); в) начертить графики функции.

14. Случайная величина *X* задана функцией плотности вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0, \\ \dfrac{4}{a^2}x^3, \text{при } 0 \le x < \sqrt{a}, \\ 0, \text{при } x \ge \sqrt{a}. \end{cases}$$

Найти: *а*) функцию распределения $F(x)$; б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина *X* примет значение, заключенное в интервале $(\sqrt{0{,}25a};\ \sqrt{0{,}5a})$; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

15. Случайная величина *X* задана функцией плотности вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<0,\\ 3e^{-3x}, \text{при } x\geq 0.\end{cases}$$

Найти: *а*) функцию распределения случайной величины *X* и начертить её график; б) вероятность попадания случайной величины *X* в интервал $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$.

в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

16. Случайная величина *X* задана функцией распределения *F*(*x*):

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<1,\\ a(x-1)^2, \text{при } 1\leq x<3,\\ 1, \text{при } x\geq 3.\end{cases}$$

Определить: *а*) значение *а*; б) математическое ожидание; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (1;2); г) построить графики функций *F*(x) и *f*(x).

17. Дана функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<-\frac{\pi}{2},\\ 0{,}5(1+\sin x), \text{при } -\frac{\pi}{2}\leq x<\frac{\pi}{2},\\ 1, \text{при } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

18. Случайная величина задана функцией плотности вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<1,\\ \dfrac{3x^2-2x}{c}, \text{при } 1\leq x<4,\\ 0, \text{при } x\geq 4.\end{cases}$$

Найти: *а*) постоянную *с*; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

19. Случайная величина *X* задана функцией

$$f(x)=\frac{2c}{e^x+e^{-x}},$$

при $-\infty<X<+\infty$. Найти постоянную *с*.

## Тема 5 Основные законы распределения непрерывных случайных величин

### Вопросы для обсуждения

Равномерное распределение. Показательное распределение. Нормальное распределение, правило трех сигм. Мода, медиана, асимметрия, эксцесс.

### Контрольные задания

1. Случайная величина $X$ равномерно распределена в интервале $(-2;\ N)$. Найти:
   $a$) функцию плотности вероятностей случайной величины $X$; б) функцию распределения; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $(-1; 0{,}5N)$; г) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$. В задаче $N$ – номер варианта.
2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределенной в интервале: $a$) (5; 11); б) (–3; 5). Начертить графики этих функций.
3. Равномерно распределенная случайная величина $X$ задана плотностью распределения $f(x) = 0{,}125$ в интервале $(a-4; a+4)$, вне интервала $f(x) = 0$. Найти $\text{M}(X), D(X), \sigma(X)$.
4. Случайная величина $X$ распределена по закону прямоугольного треугольника (рисунок 5.7) в интервале (0; $a$). Найти: а) плотность вероятности случайной величины $X$; б) функцию распределения; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (0,25$a$; 0,5$a$); г) математическое ожидание (использовать стандартный подход и физический смысл), дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$.

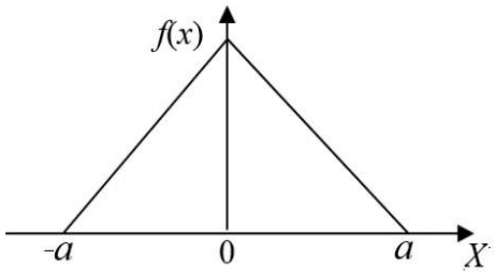


Рисунок 5.1 – Плотность распределения закона прямоугольного треугольника

5. Случайная величина $X$ распределена по закону Симпсона («закону равнобедренного треугольника») (рисунок 5.8) на интервале $(-a; a)$. Найти: $a$) плотность распределения вероятностей случайной величины $X$; б) функцию распределения и построить ее график; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $(-0{,}5a; 0{,}5a)$; г) математическое ожидание (использовать стандартный подход и физический смысл), дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$.

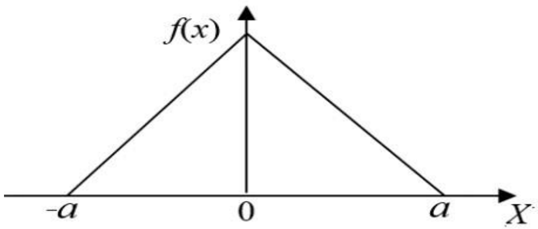

Рисунок 5.2 – Плотность распределения Симпсона

6. Для исследования продуктивности определенной породы домашней птицы измеряют диаметр яиц. Наибольший поперечный диаметр яиц представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, со средним значением 5 см и средним квадратическим отклонением 0,3 см. Найти вероятность того, что: $a$) диаметр взятого наудачу яйца будет заключен в границах от 4,7 до 6,2 см; б) отклонение диаметра от среднего не превзойдет по абсолютной величине 0,6 см.
7. Вес вылавливаемых в пруду рыб подчиняется нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 150 г и математическим ожиданием, $a$ = 1000 г. Найти вероятность того, что вес пойманной рыбы будет: $a$) от 900 до 1300 г; б) не более 1500 г; в) не менее 800 г; г) отличаться от среднего веса по модулю не более чем на 200 г; д) начертить график плотности вероятностей случайной величины $X$.
8. Урожайность озимой пшеницы по совокупности участков распределяется по нормальному закону с параметрами: $a = 50$ ц/га, σ = 10 ц/га. Определить: $a$) какой процент участков будет иметь урожайность свыше 40 ц/га; б) процент участков с урожайностью от 45 до 60 ц/га.
9. Выборочным методом измеряется засоренность зерна, случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 0,2 г и математическим ожиданием, $a = 0$. Найти вероятность того, что из четырех независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 0,3 г.
10. Количество зерна, собранного с каждой делянки опытного поля, есть нормально распределенная случайная величина $X$, имеющая математическое ожидание $m = 60$ кг и среднее квадратическое отклонение равное 1,5 кг. Найти симметричный относительно m интервал, в котором с вероятностью 0,9906 будет заключена величина $X$. Написать функцию плотности вероятности этой случайной величины.
11. С вероятностью 0,9973 было установлено, что абсолютное отклонение живого веса случайно взятой особи крупного рогатого скота от среднего веса животного по всему стаду не превосходит 30 кг. Найти среднее квадратическое отклонение живого веса скота, считая, что распределение скота по живому весу подчиняется нормальному закону.
12. Урожайность овощей по участкам является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 300 ц/га и средним квадратическим отклонением 30 ц/га. С вероятностью 0,9545 определить границы, в которых будет находиться средняя урожайность овощей на участках.

13. Нормально распределенная случайная величина $X$ задана функцией:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-5)^2}{32}}.$$

Определить: а) вероятность попадания случайной величины в интервал (3; 9);
б) моду и медиану случайной величины $X$.

14. Нормально распределенная случайная величина $X$ задана плотностью распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Найти интервал, в который с вероятностью 0,9545 попадет случайная величина $X$ в результате испытаний.

15. Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, $a = 20$. Вероятность попадания ее в интервал (20; 30) равна 0,4772. Определить вероятность попадания случайной величины в интервал (10; 25).
16. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если: а) параметр λ=2; б) λ=5; в) λ=0,5.
17. Случайная величина $X$ распределена по показательному закону, причем $\lambda = 2$. Найти вероятность попадания случайной величины $X$ в интервал: а) (0; 1); б) (2; 4).
18. Найти $M(X), D(X), \sigma(X)$. показательного закона распределения случайной величины $X$ заданной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

если: *а*) λ=0,4; б) λ=3; в) λ=4.

19. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность безотказной работы первого имеет распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0,1t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью 20 часов: *а*) оба элемента будут работать; б) откажет только один элемент; в) откажет хотя бы один элемент; г) оба элемента откажут.
20. Вероятность того, что оба независимых элемента будут работать в течение 10 суток, равна 0,64. Определить функцию надежности для каждого элемента, если функции одинаковы
21. Среднее число ошибок, которые делает оператор в течение часа работы равно 2. Найти вероятность того, что за 3 часа работы оператор сделает: *а*) 4 ошибки; б) не менее двух ошибок; в) хотя бы одну ошибку.
22. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: *а*) 4 вызова; б) не менее трех вызовов.
23. Случайная величина $X$ распределена по закону Коши:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Определить: *а*) функцию распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$; б) вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(-\sqrt{\mathbf{3}}; \sqrt{\mathbf{3}}\right)$.

24. Случайная величина $X$ распределена по закону Релея:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Найти: *а*) функцию плотности вероятностей случайной величины $X$; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 2), если, *а*=1; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$.

25. Функция распределения годовых доходов лиц, облагаемых налогом, имеет вид закона Парето:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a, \\ 1 - a\left(\frac{a}{x}\right)^{\beta}, & \text{при } x \geq a, \beta > 0. \end{cases}$$

Определить: *а*) размер годового дохода, который для случайно взятого лица будет превышен с вероятностью 0,8; б) плотность вероятностей случайной величины $X$; в) математическое ожидание случайной величины $X$ при $\beta > 1$.

26. Фирма, занимающаяся продажей товаров по каталогу, ежемесячно получает по почте заказы. Число этих заказов – нормально распределённая случайная величина со средним квадратическим отклонением $\sigma = 560$ и неизвестным математическим ожиданием $a$. В 90% случаев число ежемесячных заказов превышает 12 439. Найдите среднее число заказов, получаемых фирмой за месяц.

27. Масса товаров, помещаемых в контейнер определённого размера – нормально распределённая случайная величина. Известно, что 65% контейнеров имеют чистую массу меньшую, чем 4,2 т. Найдите среднее значение и среднее квадратическое отклонение чистой массы контейнера.

28. Служащий рекламного агентства утверждает, что время, в течение которого телезрители помнят содержание коммерческого рекламного ролика, подчиняется экспоненциальному закону с $\lambda = 0{,}25$ дня. Найдите долю зрителей, способных вспомнить рекламу спустя 7 дней.

29. Крестьянские (фермерские) хозяйства и индивидуальные предприниматели региона по численности работников распределяются по логарифмически нормальному закону с параметрами а = 1,677, $\sigma^2 = 0{,}4076$, $\overline{lnx} = 0{,}7336$. Определить: а) среднюю численность работников на одно хозяйство (математическое ожидание); б) дисперсию и среднее квадратическое отклонение; в) медианное и модальное значения; г) какой процент крестьянских (фермерских) хозяйств и индивидуальных предпринимателей имеют численность работников от 3 до 6 человек.

## Тема 6 Система двух случайных величин

### Вопросы для обсуждения

Закон распределения двумерной случайной величины условные и мангинальные распределения. Числовые характеристики двумерных случайных величин (математическое ожидание; дисперсия; ковариация; начальные, центральные и основные моменты; коэффициент корреляции).

### Контрольные задания

Задана двумерная дискретная случайная величина:

| $Y \backslash X$ | 2 | 4 |
|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 0,3 |
| 5 | 0,2 | 0,15 |
| 10 | 0,15 | 0,1 |

Найти законы распределения составляющих случайных величин.

1. Задана двумерная дискретная случайная величина:

| $Y \backslash X$ | 0 | 5 | 20 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,15 | 0,2 | 0,10 |
| 10 | 0,10 | 0,3 | 0,15 |

Найти математическое ожидание и дисперсию составляющих случайных величин $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$.

2. Задана функция распределения двумерной случайной величины:

$$\boldsymbol{F(x,y)} = \begin{cases} \boldsymbol{1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}}, & \text{при } \boldsymbol{x \ge 0, y \ge 0}, \\ \boldsymbol{0}, & \text{при } \boldsymbol{x < 0, y < 0}. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

3. Функция распределения случайной двумерной величины задана в задании 3. Найти вероятность попадания случайной точки $(\mathrm{X}, \boldsymbol{Y})$ в прямоугольник, ограниченный прямыми $\boldsymbol{x = 0}, \boldsymbol{x = 2}, \mathrm{y} = \boldsymbol{1}, \mathrm{y} = \boldsymbol{5}$.
4. Найти вероятность попадания случайной точки $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ в прямоугольник, ограниченный прямыми $\mathbf{x} = \boldsymbol{1}, \mathbf{x} = \boldsymbol{2}, \mathrm{y} = \boldsymbol{3}, \mathrm{y} = \boldsymbol{5}$, если известна функция распределения:

$$\boldsymbol{F(x,y)} = \begin{cases} \boldsymbol{1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}}, & \text{при } \boldsymbol{x \ge 0, y \ge 0}, \\ \boldsymbol{0}, & \text{при } \boldsymbol{x < 0, y < 0}. \end{cases}$$

5. Задана функция распределения двумерной случайной величины:

$$\boldsymbol{F(x,y)} = \begin{cases} \boldsymbol{(1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y})}, & \text{при } \boldsymbol{x \ge 0, y \ge 0}, \\ \boldsymbol{0}, & \text{при } \boldsymbol{x < 0, y < 0}. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

6. Распределение 100 студентов по количеству пропущенных часов занятий и экзаменационной оценке представлено в следующей таблице. Найти безусловные и условные законы распределения случайных величин: количества пропущенных часов (X) и экзаменационной оценки $(\boldsymbol{Y})$.

| Количество пропущенных часов | Оценка на экзамене | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 0 | 5 | 10 | 10 |
| 4 | 5 | 15 | 20 | 15 |
| 10 | 10 | 5 | 5 | 0 |

7. Распределение хозяйств по дозам внесения удобрений и урожайности озимой пшеницы приведено в следующей таблице:

| Внесено удобрений на 1 га, ц д. в. | Урожайность, ц с 1 га | | | |
|---|---|---|---|---|
| | до 40 | 40–50 | 50–60 | Свыше 60 |
| до 1 | 18 | $a$ | 5 | - |
| 1–2 | $a$ | 15 | 20 | 10 |
| свыше 2 | - | $a$ | 12 | 20 |

Найти безусловные и условные законы распределения случайных величин урожайности (X) и доз внесения удобрений $(Y)$ ($a$ – число, заданное преподавателем).

8. Система случайных величин $(\mathrm{X}, Y)$подчинена закону распределения с плотностью $f(x,y) = a\sin{(x+y)}$ в квадрате $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$; и $f(x,y) = 0$ вне квадрата. Определить: $a$) коэффициент $a$; б) $M(X), M(Y)$; в) $D(X), D(Y)$.

9. Дана дискретная двумерная величина $(\mathrm{X}, \mathbf{Y})$:

*а*)

| $Y$ \ $X$ | 2 | 4 |
|---|---|---|
| 10 | 0,15 | 0,10 |
| 15 | 0,3 | 0,05 |
| 20 | 0,15 | 0,25 |

б)

| $Y$ \ $X$ | 100 | 200 |
|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 0,25 |
| 5 | 0,05 | 0,2 |
| 10 | 0,1 | 0,3 |

Найти: а) условный закон распределения $X$ при условии, что $\mathrm{y} = 20$; б) условный закон распределения $Y$ при условии, что $\mathrm{x} = 200$.

11. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $f(x,y) = \cos x \cos y$ в квадрате $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$. $f(x,y) = 0$, вне квадрата. Доказать, что составляющие $X$ и $Y$ независимы.

12. Непрерывная двумерная случайная величина $(\mathrm{X}, Y)$ распределена равномерно внутри треугольника с вершинами O(0,0), $A$(0,6) и $B$(6,0). Найти: $a$) дву-

мерную плотность вероятности системы; б) плотности и условные плотности составляющих системы.

13. Система случайных величин $(\mathrm{X}, Y)$ распределена равномерно внутри квадрата со стороной $a$, диагонали которого совпадают с осями координат. Найти: $a$) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности и условные плотности составляющих системы.

14. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $(\mathrm{X}, Y)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, \text{при } x > 0, y > 0, \\ 0, \text{при } x \le 0, y \le 0. \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

15. Система случайных величин $(\mathrm{X}, Y)$равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0, y = 0, x + y = a$ $(a > 0)$. Определить: $a$) математические ожидания и дисперсии случайных величин $X$ и $Y$, б) корреляционный момент.

16. Заданы плотности распределения независимых составляющих непрерывной случайной величины $(\mathrm{X}, Y)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ 2e^{-2x}, \text{при } x > 0, \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} 0, \text{при } y \le 0, \\ 5e^{-5y}, \text{при } y > 0. \end{cases}$$

Найти: $a$) плотность совместного распределения системы; б) функцию распределения системы.

## Тема 7 Функции случайных величин

### Вопросы для обсуждения

Закон распредления функции случаных величин. Числовые характеричтики функции случайных величин.

### Контрольные задания

1. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

| $X$ | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

Найти закон распределения случайной величины $Y$, где: $\boldsymbol{a}$) $\boldsymbol{Y} = \mathbf{2}\mathrm{X} - \mathbf{1}$; б) $Y$=$X$+$5$; в) $\boldsymbol{Y} = \mathrm{X}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}$; г) $\boldsymbol{Y} = \sqrt{\mathrm{X}}$ .

2. Дискретная случайная величина $X$ задана законом распределения:

| $X$ | –2 | –1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,2 | 0,4 | 0,1 | 0,3 |

Найти закон распределения случайной величины $Y$, где: $\boldsymbol{a}$) $\boldsymbol{Y} = \mathbf{2}\mathrm{X} + \mathbf{1}$; б) $\boldsymbol{Y} = \mathrm{X}^{\mathbf{3}} - \mathbf{1}$; в) $\boldsymbol{Y} = \mathrm{X}^{2}$; г) $\boldsymbol{Y} = \sqrt{\boldsymbol{X} + \mathbf{2}}$.

3. Дискретная случайная величина $X$ задана законом распределения:

| $X$ | 1 | 2 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,4 |

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Y$, если: $\boldsymbol{a}$) $\boldsymbol{Y} = \mathbf{4}\mathrm{X} - \mathbf{4}$; б) $\boldsymbol{Y} = \mathrm{X}^{\mathbf{2}}$.

4. Дискретная случайная величина $X$ задана законом распределения:

| $X$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0,2 | 0,7 | 0,1 |

Найти: $\boldsymbol{a}$) закон распределения случайной величины $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{sin^2 X}$; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $\boldsymbol{Y}$.

5. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ равномерно распределена в интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Найти плотность распределения случайной величины: $\boldsymbol{a}$) $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{sin\,X}$; б) $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{cos\,X}$.

6. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ распределена нормально с параметрами $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1}$. Найти плотность распределения случайной величины: $\boldsymbol{a}$) $\boldsymbol{Y} = \mathbf{2}\mathrm{X} + \mathbf{6}$; б) $\boldsymbol{Y} = \mathrm{X}^{\mathbf{3}}$.
7. Сторона квадрата $\boldsymbol{X}$ имеет равномерное распределение на отрезке [1;2]. Найти функцию плотности распределения площади квадрата.
8. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ распределена по закону Коши:

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\pi(1 + x^2)}}.$$

Найти плотность распределения случайной величины: $\boldsymbol{a)}$ $\boldsymbol{Y} = X^{\mathbf{3}}$; б) $\boldsymbol{Y} = \mathbf{3}X$.

9. Независимые случайные величины $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ распределены равномерно. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ распределена в интервале (0; 2), а случайная величина $\boldsymbol{Y}$ в интервале (0; 10). Найти функцию и плотность распределения случайной величины $\boldsymbol{Z = X + Y}$. Построить графики функций случайной величины $\boldsymbol{Z}$.
10. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ равномерно распределена в интервале $(\mathbf{-4};\ \mathbf{1})$, а случайная величина $\boldsymbol{Y}$ равномерно распределена в интервале $(\mathbf{1};\ \mathbf{6})$. Найти плотность распределения случайной величины $\boldsymbol{Z = X + Y}$ и начертить ее график.
11. Независимые случайные величины $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ заданы функциями:

$$\boldsymbol{f_1(x) = e^{-x}} \qquad \text{при } \mathbf{0} \le \boldsymbol{x} < \infty,$$
$$\boldsymbol{f_2(x) = 0{,}5e^{-0{,}5y}} \ \text{при } \mathbf{0} \le \boldsymbol{y} < \infty.$$

Найти плотность распределения случайной величины $\boldsymbol{Z = X + Y}$.

12. Независимые случайные величины $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ распределены по нормальному закону:

$$\boldsymbol{f_1(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma\sqrt{2\pi}}}\ \boldsymbol{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \boldsymbol{f_2(y)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma\sqrt{2\pi}}}\ \boldsymbol{e}^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $\boldsymbol{Z = X + Y}$. Показать, что случайная величина $\boldsymbol{Z}$ распределяется по нормальному закону.

13. Натуральный логарифм некоторой случайной величины $X$ распределен по нормальному закону с центром рассеивания $\alpha$ и средним квадратическим отклонением $\sigma$. Найти плотность распределения случайной величины $X$.
14. По заданной плотности распределения $f(x_1,\ x_2)$ двумерной случайной величины $(X_1, X_2)$ найти плотность распределения $f(y_1,\ y_2)$ двумерной случайной величины$(Y_1, Y_2)$ связанной взаимно однозначно с $(X_1, X_2)$ указанными ниже соотношениями.

1) $f(X_1, X_2) = \frac{1}{12\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X_1^2}{4} + \frac{X_2^2}{9}\right)}$, где

$X_1 = 2Y_1 cos\ 2Y_2,\ X_2 = 3Y_1 sin\ 2Y_2, 0 \le Y_1 < \infty, 0 \le Y_2 < \pi.$

2) $f(X_1, X_2) = \frac{6}{\pi^2(x_1^2+4)(x_2^2+9)}$, где

$X_1 = 2tg\ 2Y_1,\ X_2 = 3Y_1 tg\ 2Y_2, |Y_1| < \frac{\pi}{4},\ |Y_2| < \frac{\pi}{4}.$

15. Пусть случайные величины $Y_1, Y_2$ независимы и равномерно распределены на

(0; 1). Показать, что если рассмотреть преобразование

$$X_1 = \sqrt{-2lnY_1}\cos(2\pi Y_2), X_2 = \sqrt{-2lnY_1}\sin(2\pi Y_2),$$

то случайные величины $(X_1, X_2)$ независимы и подчиняются стандартному нормальному закону распределения: $X_1, X_2 \to\ N(0, 1)$.

## Тема 8 Закон больших чисел

### Вопросы для обсуждения

Неравенство Маркова (лемма Чебышева). Неравенства Чебышева. Центральная предельная теорема (теорема Линденберга –Леви).

### Контрольные задания

1. Количество кормов, расходуемых на ферме крупного рогатого скота в сутки, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 6 т. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход кормов на ферме превысит 10 т.
2. Количество электроэнергии, потребляемой поселком в течение суток, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 4 тыс. кВт.-ч. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки потребление энергии: а) превысит 8 тыс. кВт.-ч.; б) не превысит 6 тыс. кВт.-ч.
3. Пользуясь неравенством Чебышёва, оценить вероятность того, что из посеянных 5000 семян число взошедших окажется от 3750 до 4250, если известно, что M(X) = 4000. Определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.
4. Вероятность вызревания семян овощной культуры в данной местности составляет 0,8. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что из 1000 растений число растений с вызревшими семенами составит от 750 до 850. Определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.
5. В хозяйстве имеется 100 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них в течение определенного периода составляет 0,9. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что отклонение числа безотказно работавших автомобилей за определенный период от его математического ожидания не превзойдет по модулю 5.
6. Дискретная случайная величина $X$ задана законом распределения:

| $X$ | 2 | 3 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |

   Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| > 3$.

7. Величина $X$ задана законом распределения:

| $X$ | -1 | 0 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

   Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 2{,}5$.

8. Всхожесть семян некоторого растения составляет 90 %. Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что из посеянных 5000 семян: а) отклонение доли взошедших семян от постоянной вероятности взойти каждому из них не превзойдет по модулю 0,03; б) отклонение числа взошедших семян от математического ожидания не превзойдет по модулю 100.

9. Случайная величина задана функцией распределения:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\boldsymbol{0}, & \text{при } \boldsymbol{x}\le \boldsymbol{a},\\ \dfrac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2}{\boldsymbol{a}^2}, & \text{при } \boldsymbol{a}<\boldsymbol{x}\le 2\boldsymbol{a},\\ \boldsymbol{1}, & \text{при } \boldsymbol{x}>2\boldsymbol{a}.\end{cases}$$

*а*) С помощью неравенства Чебышёва, оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<\frac{a}{2}$. б) Определить вероятность того, что $|X-M(X)|<\frac{a}{2}$.

10. Случайная величина задана функцией распределения:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\boldsymbol{0}, & \text{при } \boldsymbol{x}\le \boldsymbol{0},\\ \dfrac{\boldsymbol{x}^2}{4\boldsymbol{a}^2}, & \text{при } \boldsymbol{0}<\boldsymbol{x}\le 2\boldsymbol{a},\\ \boldsymbol{1}, & \text{при } \boldsymbol{x}>2\boldsymbol{a}.\end{cases}$$

*а*) используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что $|\boldsymbol{X}<\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})|<\boldsymbol{a}$; б) определить вероятность того, что $|\boldsymbol{X}<\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})|<\boldsymbol{a}$.

11. Выборочным способом определяют вес колосьев ячменя. Сколько необходимо отобрать колосьев, чтобы с вероятностью не меньшей 0,99, можно было утверждать, что средний вес случайно отобранных колосьев будет отличаться от среднего веса колосьев во всей партии (принимаемого за математическое ожидание) не более чем на 0,1 г? Установлено, что среднее квадратическое отклонение веса не превышает 0,2 г.

12. Сколько человек необходимо отобрать для определения удельного веса лиц со специальным образованием, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что отклонение относительной частоты лиц со специальным образованием от их доли, принимаемой за постоянную вероятность, не превышало по модулю 0,04?

13. В результате анализа торговой деятельности некоторого магазина установлено, что среднемесячные издержки обращения составляют 300 усл. ден. ед. Оцените вероятность того, что в очередном месяце издержки не выйдут за пределы 280-320 денежных единиц. Известно, что дисперсия издержек равна 16 ден. ед.

14. Для определения средней урожайности на площади 100000 га взято на выборку по одному гектару от каждого участка размером 100 га. Определите вероятность того, что средняя выборочная вероятность будет отличаться от действительной средней по всей площади не более чем на 0,5 ц, если дисперсия урожайности на отдельных участках (по 100 га) не превышает 2 ц.

15. На отрезке [0; 1] случайным образом выбрано 100 чисел, точнее рассматриваются 100 независимых средних $\mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2,\dots,\mathrm{X}_n$, равномерно распределенных на отрезке [0; 1]. Найти вероятность того, что их сумма заключена между 21 и 51, т.е.
$P(21\le\sum X_i\le 51)$.

## Тема 9 Цепи Маркова

### Вопросы для обсуждения

Дискретные цепи Маркова. Однородные цепи Маркова. Вероятности состояний цепи Маркова через 1, 2, …, n шагов. Стационарные цепи Маркова.

### Контрольные задания

1. Вероятности перехода за один шаг в цепи Маркова задаются матрицей:

$$a)\ P=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix} \qquad б)\ P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Найти число состояний системы. Построить граф, соответствующий матрице $P$.

2. Задана матрица вероятностей переходов

$$\begin{bmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ 1-\beta & \beta\end{bmatrix}.$$

Каковы пределы изменений $\alpha$ и $\beta$.

3. В урне имеется 5 белых и черных шаров. Из урны случайно извлекаются один шар, а обратно в урну возвращается один шар другого цвета. Опыт повторяется неоднократно. Найти матрицу переходных вероятностей, состояниями которой является количество белых шаров в урне. Найти вероятности перехода за два шага.
4. Построить матрицу вероятностей перехода для марковской цепи, описывающей варианты получения образования в Краснодарском крае. 90% детей выпускников КубГАУ поступают в КубГАУ, а остальные в КубГТУ. 50 % детей выпускников КГУ поступают в КГУ, остальные распределяются поровну между КубГАУ и КубГТУ. 70% детей выпускников КубГТУ поступают в КубГТУ, 20% поступают в КубГАУ, 10% в КГУ. Построить вероятностное дерево и найти матрицу оценки состояний для внука выпускника КубГАУ.
5. Игральная кость перекладывается многократно с равной вероятностью случайным образом с одной грани на любую из соседних четырех граней, независимо от исхода предыдущего испытания. К какому пределу стремится при $t \to \infty$ вероятность того, что в момент времени $t$ игральная кость лежит на грани «5», если в момент времени $t = 0$, она находится в этом же положении?
6. Имеется пять стульев, расположенных один после другого. Человек пересаживается с одного стула на рядом стоящий, причем эти перемещения определяются бросанием правильной игральной кости. Стулья обозначены буквами *A, B, C, D, E.* Вначале он сидит на среднем стуле *C*. Если человек си-

дит на крайнем стуле, то: возвращается на стул *C*, когда выпадет четное число очков; остается на том же месте при выпадении нечетного числа очков. Если он сидит не на крайнем стуле, то: перемещается налево при выпадении одного или двух очков; перемещается направо при выпадении трех или четырех очков; остается на том же месте при выпадении пяти или шести очков. Найти: а) матрицу вероятностей переходов за один шаг; б) вероятности следующих последовательностей: *C, D, E, C, D, A, C;* *C, B, D, E, E, A;* *C, B, A, A, C, D;* *C, D, E ,C, E, C;* *A, A, C, D, E, E*.

7. Студент, для получения профессионального образования, обучается в колледже в течение трех лет. Ежегодно он сдает комплексный экзамен. Если студент успешно сдаст экзамен, то он переводится на следующий курс или заканчивает колледж с дипломом специалиста. Если студент экзамен не сдает, то он остается на соответствующем курсе второй год. Вероятность успешной сдачи экзамена на первом году обучения составляет 0,7; втором – 0,8; третьем – 0,9. а) Указать подходящее число состояний системы. б) Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг для ежегодных передвижений студента по курсам (первый, второй, третий год обучения, окончание колледжа). в) Определить вероятность, что студент будет обучаться на третьем курсе после сдачи второго экзамена. г) Определить среднее число лет, которые студент проводит в колледже.
8. (*Задача для исследования*.) Изучение клиентской базы компании позволило выделить шесть основных групп клиентов[1]:

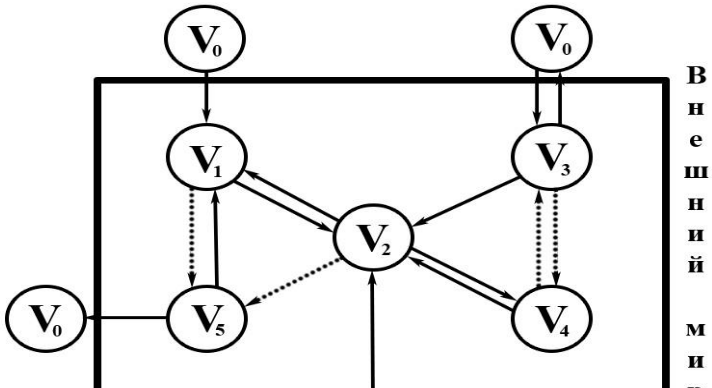


Рисунок 9.1

$V_1$ – «рядовые покупатели», покупатели профильных товаров и услуг (32,6 %), $V_2$ – «плательщики», покупатели с высокой частотой использования услуг (6,2 %), $V_3$ – «средний класс», пассивные покупатели, появляющиеся в среднем раз в год (1,3 %), $V_4$ – «приверженцы», покупатели, пользующиеся услугами компании два раза в неделю (0,8 %), $V_5$ – «спящие», обращающиеся примерно раз в три года (20,2 %), $V_6$ – «случайные прохожие» (без повторных покупок) (38,9 %).

[1] По результатам диссертационного исследования А.В. Андреевой: «Динамическая модель управления клиентской базой компании на основе Марковских цепей». https://www.hse.ru/sci/diss/89849345

Кроме того, регулярно происходит обновление базы компании за счет $V_0$ – клиентов «внешнего мира» – часть клиентов приходит, а часть уходит во внешний мир.

Какой может быть матрица еженедельных переходов, если известно, что все клиенты уходят в течение одного квартала. Предложите, опираясь на собственные субъективные оценки, вариант матрицы переходов и исследуйте его, например, с использованием *Mathcad*.

9. Пусть фирма регулярно оценивает положение сбыта продукции и дает ему удовлетворительную (состояние 1) или неудовлетворительную оценку (состояние 2). Требуется принять решение о необходимости рекламы для улучшения сбыта. Имеются матрицы переходных вероятностей с рекламой ($P_1$)и без ($P_2$) и соответствующие матрицы доходов ($R_1$)и ($R_2$) в течение:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix},$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти оптимальные решения на три месяца вперед.

## Тема 10 Приложения теории вероятностей в компьютерных науках (computer science)

### Вопросы для обсуждения

Производящие функцииидискретных случайных величин и их свойства. Генерация закона распределения (сэмплирование случайных величини из закона распределения известного вида). Энтропия. Неравенство Йенсена. Байсовские цепи.

### Контрольные задания

1. Два стрелка сделали по n выстрелов, по разным мишеням. Какова вероятность одинакового числа попаданий, если вероятность попадания каждого стрелка равна 0,5.
2. Найти производящие функции случайных величин для следующих зако-нов распределения дискретных случайных величин: Бернулли, биномиального, геометрического, геометрического +1, отрицательного биномиального, Пуассона, гипергеометрического.
3. Игрок поочередно покупает билеты двух разных лотерей до первого выигрыша. Вероятность выигрыша по одному билету первой лотереи составляет 0,2, а второй 0,3. Игрок вначале покупает билет первой лотереи. Составить закон рас-пределения и найти математическое ожидание случайной величины X– числа купленных билетов, если он имеет возможность купить: а) только 5 билетов; б) неограниченное число билетов.
4. Алгоритм M (нахождение максимума). Для данных $n$ элементов $x[1],x[2],\dots,x[n]$ необходимо найти такие величины $m$ и $j$, что $m=x(j)=\max 1\leq i\leq n x[i]$, где $j$ – наибольший индекс, удовлетворяющий этому со-от-ношению (символ ← означает операцию присвоения, $j\leftarrow n$ означает, что пе-ре-менной j присвоено значение n).

M 1. (Инициализация). Положим $j\leftarrow n$, $k\leftarrow n-1, m\leftarrow x[n]$
(Во время выполнения алгоритма будем иметь
$m=[j]=\max k\leq i\leq n x[i]$).
M 2. (Все проверено?) Если $k=0$, то работа алгоритма заканчивается.
M 3. (Сравнение). Если $x[k]\leq m$, перейти к шагу M 5.
M 4. (Замена $m$). Положим $j\leftarrow k, m\leftarrow x[k]$. (Это значение $m$ является новым текущим максимумом).
M 5. (Уменьшение $k$). Уменьшим $k$ на единицу и вернемся к шагу M 2.

Оценить время выполнения алгоритма на конкретном компьютере.

5. Доказать, что 13 число месяца с большей вероятностью приходится на пятницу, чем на другие дни недели.
6. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x^2dx$ методом Монте-Карло.
7. Рассмотрим алгоритм вычисления двух независимых нормально распреде-лен-ных случайных величин $X1$, $X2$.

1. Сгенерируем случайные величины $Z1$, $Z2$, подчиняющиеся равномерному закону распределения на [0;1]. Тогда случайные величины $Y1=2Z1-1$, $Y2=2Z2-1$

равномерно распределены на $[-1;1]$.

2. Присвоим $S$ значение суммы квадратов $Y1$,$Y2$.

$S:=Y12+Y22$.

3. Если $S\geq 1$, то возврат на предидущие этапы (1, 2).

4. Присвоим $X1$ и $X2$ значения:

$X1:=Y1\surd-2ln(S)S$, $X2:=Y2\surd-2ln(S)S$.

Доказать, что $X1$ и $X2$ – нормально распределенные случайные величины.

5. Доказать, что на промежутках $(0,1);(0,+\infty);(-\infty,+\infty)$ законы распределения с наибольшей энтропией соответственно: равномерный, показательный ($M(X)=1$) и нормальный ($M(X)=0$, $D(X)=1$).

6. Имеется три взаимно независимые состояния фирмы. Гипотезы:

Н1 – «средняя надежность фирмы»,

Н2 – «высокая надежность фирмы»,

Н3 – «низкая надежность фирмы».

Имеется два условно независимых свидетельства, подтверждающих в разной степени исходные гипотезы.

| | $i = 1$ | $i = 2$ | $i = 3$ |
|---|---|---|---|
| $P(H_i)$ | 0,6 | 0,3 | 0,1 |
| $P(E_1/H_i)$ | 0,3 | 0,7 | 0,2 |
| $P(E_2/H_i)$ | 0,6 | 0,8 | 0,0 |

Условно независимые свидетельства, поддерживающие исходные гипотезы:

$E_1$ – «наличие прибыли у фирмы»,

$E_2$ – «своевременный расчет с бюджетом».

Найти вероятности гипотез после последовательного наступления свидетельств.

# Часть II Математическая статистика

## Тема 11. Вариационные ряды распределения

### Вопросы для обсуждения

Дискретный и интервальный вариационный ряд. Полигон частот, гитрограмма, кумулята. Числовые характеристик вариационных радов.

### Контрольные задания

1. По списку на предприятии числится 105 рабочих, которые имеют следующие разряды:
   1,5,2,4,3,4,6,4,5,1,2,2,3,4,5,3,4,5,2,1,4,5,5,4,3,4,6,1,2,4,4,3,5,6,4,3,3,1,3,4,3,1,2, 4,4,5,6,1,3,4,5,3,4,4,3,2,6,1,2,4,5,3,3,2,3,6,4,3,4,5,4,3,3,2,6,3,3,4,5,4,4,3,3,2,1,2, 1,6,5,4,3,2,3,4,4,3,5,6,1,5,3 4, 2,1,5.
   Составить ряд распределения рабочих по разрядам. Найти накопленные частоты и частости. Вариационный ряд изобразить графически.
   Определить средний разряд рабочего, модальный и медианный разряд, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.
2. Имеются следующие данные о числе производственных подразделений на каждом из 95 сельскохозяйственных предприятий:
   2,4,5,3,4,6,7,4,5,3,3,4,2,6,5,4,7,2,3,4,4,5,4,3,4,6,6,5,2,3,4,3,5,6,7,2,4,3,4,5,4,6,7, 2,5,3,5,4,3,7,2,4,3,4,5,4,3,2,6,7,6,4,3,2,3,4,5,4,3,5,4,3,2,6,4,5,7,5,4,3,4,5,7,4,3,4, 5,6,5,3,4,2,2,4,3.
   Составить ряд распределения сельскохозяйственных предприятий по числу производственных подразделений на одно хозяйство. Найти накопленные частоты и частости. Вариационный ряд изобразить графически.
   Определить среднее число производственных подразделений на одно хозяйство, модальное и медианное значения числа подразделений, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.
3. В задачах (1-25) по данным приложения 6, составить статистический ряд распределения по одному признаку. Найти накопленные частоты и частости. Ряд распределения изобразить графически. Определить моду, медиану, среднее значение, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, показатели асимметрии и эксцесса. Сделать выводы по результатам расчетов.
   1) Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.
   2) Валовая продукция на среднегодового работника, тыс. руб.
   3) Валовая продукция на 100 руб. основных средств, руб.
   4) Валовая продукция на 100 руб. производственных затрат, руб.
   5) Реализованная продукция на 100 руб. основных средств, руб.
   6) Реализованная продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.
   7) Реализованная продукция на среднегодового работника, тыс. руб.
   8) Реализованная продукция на 100 руб. затрат, руб.
   9) Производственные затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.
   10) Производственные затраты на среднегодового работника, тыс. руб.

11) Затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.
12) Основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.
13) Основные средства на среднегодового работника, тыс. руб.
14) Площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника, га.
15) Среднегодовая численность работников на одно хозяйство, чел.
16) Площадь сельскохозяйственных угодий на одно хозяйство, га.
17) Валовая продукция на одну организацию, млн. руб.
18) Выручка от реализации на одну организацию, млн. руб.
19) Заработная плата на одного работника, тыс. руб.
20) Оборотные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.
21) Оборотные средства на одно хозяйство, тыс. руб.
22) Выручка от реализации на 100 руб. оборотных средств, руб.
23) Валовая продукция на 100 руб. оборотных средств, руб.
24) Оборотные средства на 100 руб. основных средств, руб.
25) Материальные затраты на 1 га сельхозугодий, тыс. руб.

4. Определить абсолютную и относительную плотность распределения работников предприятия по стажу их работы на данном предприятии.
По распределению работников по стажу работы найти средний стаж работы, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

Таблица 11.1 – Распределение работников по стажу работы

| Стаж работы, лет | До 1 | 1-5 | 5-10 | 10-20 | 20-40 | Всего |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Число работников | 8 | 12 | 16 | 14 | 10 | 60 |

5. Имеются следующие данные о площади посева овощей в хозяйствах совокупности районов.

Таблица 11.2 – Площадь посева овощей на хозяйство

| Район | Номер хозяйства | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 8 | 10 | 12 | 6 | 15 | 30 | 21 |
| 2 | 32 | 16 | 26 | 41 | 44 | 38 | - |
| 3 | 101 | 165 | 230 | 144 | 184 | 176 | 260 |
| 4 | 22 | 30 | 44 | 18 | 16 | 31 | - |
| 5 | 10 | 7 | 4 | 3 | 12 | 7 | 6 |
| 6 | 255 | 366 | 384 | 273 | 450 | 510 | - |
| 7 | 121 | 84 | 96 | 110 | 161 | 143 | - |
| 8 | 34 | 16 | 84 | 71 | 36 | 8 | 17 |
| 9 | 46 | 41 | 48 | 52 | 50 | 58 | - |
| 10 | 15 | 24 | 57 | 44 | 34 | 14 | 24 |

Дать сравнительную оценку колеблемости площади посева овощей в хозяйствах двух районов.

6. Путем устного опроса изучалось качество продукции, выпускаемой фирмой и реализуемой в магазине этой фирмы. Посетители давали оценку качества по десятибалльной шкале. Были получены сводные данные.

Таблица 11.3 – Бальная оценка продукции предприятия

| Оценка качества продукции, балл | 1-2 | 3-4 | 5-6 | 7-8 | 9-10 |
|---|---|---|---|---|---|
| Число случаев | 3 | 8 | 36 | 89 | 45 |

Определить средний балл качества продукции, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, показатели асимметрии и эксцесса.

7. По данным распределения студентов по результатам сдачи экзаменов определить: средний бал успеваемости студентов по каждому предмету и по всем предметам; дисперсии балла успеваемости по предмету и в целом по всем предметам; межгрупповую дисперсию. Найти общую дисперсию успеваемости, используя правило сложения дисперсий.

Таблица 11.4 – Распределение студентов по результатам сдачи экзаменов

| Оценка на экзамене | Число студентов, получивших оценку по предметам | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 6 | 10 | 8 | 8 |
| 4 | 10 | 8 | 9 | 9 |
| 5 | 7 | 6 | 4 | 5 |

8. Работники предприятия сгруппированы по возрасту.

Таблица 11.5– Распределение работников предприятия по возрасту

| Категории работников | Возраст работников, лет | | | | | Всего Работников |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | До 30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | свыше 60 | |
| Рабочие | 43 | 141 | 216 | 127 | 118 | 645 |
| Руководители | 2 | 4 | 6 | 8 | 4 | 24 |
| Специалисты | 3 | 18 | 30 | 34 | 22 | 107 |
| Всего работников | 48 | 163 | 252 | 169 | 144 | 776 |

Определить: средний возраст работников, предприятия в целом и по отмеченным категориям; модальное и медианное значения возраста работников по категориям и предприятию; дисперсию и среднее квадратическое отклонение возраста по категориям работников и предприятию; межгрупповую дисперсию возраста работников. Найти общую дисперсию возраста работников, используя правило сложения дисперсий.

9. Администрацию универсама интересует оптимальный уровень запасов продуктов в торговом зале, а также среднемесячный объём покупок товаров, которые не являются предметом ежедневного потребления в семье (например, таких, как сода). Для выяснения этого вопроса менеджер универсама в течение января регистрировал частоту покупок 100-граммовых пакетов с содой и собрал следующие данные: 4,4,9,3,3,1,2,0,4,2,3,5,7,10,6,5,7,3,2,9,8,1,4,6,5,4,2,1,0,8.
   Построить вариационный ряд, определить его числовые характеристики. Какие рекомендации Вы бы дали администрации универсама?

## Тема 12 Выборочный метод

### Вопросы для обсуждения

Сущность выборочного метода. Точетные и интервальные оценки параметров распределения. Несмещенность, состоятельность и эффективность точечных оценок. Выборочные оценки математического ожидания, дисперсии генеральной совокупности. Интервальное оценивание.

### Контрольные задания

1. Для определения потерь зерна при уборке случайным способом проведено 100 измерений. Средняя величина потерь составила 1,8 ц с одного гектара посевов, при среднем квадратическом отклонении 0,5 ц с га. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средняя величина потерь зерна с 1 га и возможная величина потерь, если площадь уборки зерновых составила 640 га.
2. С помощью случайной выборки изучалось время выполнения производственной операции рабочими бригады. На основании 60 наблюдений установлено, что в среднем на выполнение производственной операции затрачивалось 0,5 часа, при среднем квадратическом отклонении 0,12 часа. Считая время выполнения производственной операции нормально распределенной случайной величиной, определить границы, в которых находится среднее время выполнения производственной операции всех рабочих с доверительной вероятностью: а) 0,9; б) 0,95.
3. Случайным бесповторным способом изучались остатки горюче-смазочных материалов на складе предприятий. Обследовано 110 предприятий из 750. Средние остатки составили 150 т, при среднем квадратическом отклонении 42 т. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будут находиться средние остатки горюче-смазочных материалов на одно предприятие и общие остатки горюче-смазочных материалов.
4. Считая данные задачи 1 контрольных заданий к главе 11 результатом 20% выборки, определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения разряда рабочих; б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95; в) вероятность того, что интервал (0,95 $\overline{X}_в$; 1,05 $\overline{X}_в$) покроет математическое ожидание разряда рабочего; г) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,95 предельная ошибка выборки уменьшится в 1,5 раза, при сохранении уровня остальных характеристик.
5. Считая данные задачи 2 контрольных заданий к главе 11 результатом 20% выборки, определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения числа производственных подразделений в расчете на одно сельскохозяйственное предприятие; б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,9; в) объем выборки, при котором с доверительной вероятно-

стью 0,9 предельная ошибка выборки уменьшится в 2 раза, при сохранении уровня остальных характеристик.

6. Считая данные задачи 3 контрольных заданий к главе 11 результатом 20% случайной бесповторной выборки, определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения изучаемого параметра; б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95; в) вероятность того, что интервал ($0{,}95\bar{x}_в$; $1{,}05\bar{x}_в$) покроет математическое ожидание изучаемого параметра; г) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,95 предельная ошибка выборки уменьшится в 2 раза, при сохранении уровня остальных характеристик.
7. В районе имеется 10000 дачных участков населения. В результате выборочного обследования 300 дачных участков оказалось, что средняя выборочная урожайность овощей составила 250 ц с гектара при среднем квадратическом отклонении 60 ц с га. Известно, что 40% общей площади посевов овощей занимали помидоры. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средняя урожайность овощей на всех дачных участках и удельный вес посевов помидор. Сколько необходимо обследовать дачных участков, чтобы предельная ошибка выборки по признакам уменьшилась в 1,5 раза?
8. Для определения влажности зерна случайным способом было взято 25 проб. Средний процент влажности зерна составил 16%, а выборочное среднее квадратическое отклонение 2,5%. Определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения; б) интервал, который покроет математическое ожидание с доверительной вероятностью, 0,95.
9. Вероятность изготовления продукции высшего качества фирмой составляет 0,9. Сколько необходимо обследовать единиц продукции, чтобы с доверительной вероятностью 0,95 можно было утверждать, что доля продукции высшего качества по выборке будет отклоняться от постоянной вероятности по модулю не более чем на 0,03?
10. Случайным бесповторным способом проведено выборочное обследование семей района. Из 1000 семей обследовано 80, по которым определен душевой доход на одного члена семьи, представленный в виде интервального вариационного ряда.

11. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средний месячный доход на одного члена семьи по району, а также доля семей с доходами, менее 20 руб. на одного члена семьи.

Таблица 12.1 – Распределение семей по величине месячного дохода на одного члена семьи

| Группы семей по месячному доходу на одного члена семьи, тыс. руб. | До 10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | Свыше 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| Число семей | 6 | 15 | 30 | 19 | 10 |

12. На фирме проведен выборочный опрос 10% работников по вопросам изменения условий труда. Из 90 работников основного производства за изменение условий труда высказалось 65 человек, из 30 работников вспомогательного производства – 20, а из 25 работников, занятых управлением фирмой – 21. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля работников фирмы, поддерживающих изменение условий труда.

13. Для определения влияния микроэлементов на результаты откорма свиней проведен опыт на 8 группах животных. Рационы отличаются набором и дозами микроэлементов (таблица 12.3).

Таблица 12.2 – Результаты откорма свиней в опыте

| Рацион | Поголовье свиней, гол. | Среднесуточный прирост живой массы, г | Среднее квадратическое отклонение, г |
|---|---|---|---|
| 1 | 90 | 500 | 40 |
| 2 | 75 | 575 | 45 |
| 3 | 100 | 610 | 54 |
| 4 | 50 | 450 | 52 |
| 5 | 70 | 590 | 65 |
| 6 | 60 | 650 | 70 |
| 7 | 110 | 490 | 48 |
| 8 | 80 | 540 | 62 |

С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться среднесуточный прирост свиней по каждому рациону и по опыту в целом.

14. Взято 16 проб молока, поступившего на реализацию из акционерного сельскохозяйственного предприятия. Средняя жирность молока составила 3,7%, при среднем квадратическом отклонении 0,5%. Какова вероятность того, что средняя жирность молока всех партий не выйдет за границы от 3,6% до 3,8%?

14. Тридцать восемь студентов университета сдали экзамен по статистике на отличные и хорошие отметки. Чему равна вероятность того, что в случайной выборке из 100 студентов по крайней мере 30 окажутся с хорошими и отличными оценками по статистике?

15. Автотранспортная компания желает оценить среднее время транзита грузов из столицы в регионы страны. Случайная выборка 20 партий товаров дала $\overline{X}$ =2,6 дней, s=0,4 дня. Постройте 99%-ый доверительный интервал для среднего времени транзита товаров.
16. Предположим, что среднее время пребывания в очереди к кассиру универмага составляет 12 мин со средним квадратическим отклонением 3 мин. Если вы отобрали случайным образом 5 покупателей, то чему равна вероятность того, что их время пребывания в очереди составит, по крайней мере, 10 мин? Чему равна средняя выборочная времени ожидания в очереди? Чему равно среднее квадратическое отклонение выборочной средней?
17. Из 500 выпускников средних школ города 72% собираются поступать в университет. Чему равна вероятность того, что среди случайно отобранных выпускников доля желающих поступить в вуз окажется выше 80%?

## Тема 13. Проверка статистических гипотез

### Вопросы для обсуждения

Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая гипотеза. Критерий проверки статистической гипотезы, критическая область. Ошибки первого и второго рода, уроень значимости, мощность критерия. Проверка гипотезы о среднем значении при известной и неизвестной дисперсии. Гипотеза о равенстве генеральных средних, долей. Гипотеза о равенстве генеральных дисперсий. Понятие о критерии согласия. Критерий согласия Пирсона. Критерий согласия Колмогорова.

### Контрольные задания

1. По данным приложения 6 по одному показателю случайным способом провести 30% выборку. По генеральной и выборочной совокупности определить средние значения. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве выборочного параметра среднему значению по всей совокупности.
2. Проверить гипотезу о равенстве средних урожайностей овощей в двух совокупностях хозяйств, если по случайной выборке получены следующие результаты:

| 1 совокупность | | 2 совокупность | |
|---|---|---|---|
| Урожайность, т с 1 га | Число хозяйств | Урожайность, т с 1 га | Число хозяйств |
| $x_i$ | $n_i$ | $y_i$ | $m_i$ |
| 25-35 | 15 | 15-25 | 22 |
| 35-45 | 30 | 25-35 | 30 |
| 45-55 | 24 | 35-45 | 41 |
| | $n$=69 | 45-55 | 17 |
| | | | $m$=110 |

3. По двум независимым выборкам объема $n_1$ и $n_2$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, проверить гипотезу о равенстве средних, при уровне значимости α=0,01, если:
   $a)$ $\bar{x} = 50, \bar{y} = 45, D(X) = 1200, D(Y) = 2025, n_1 = 35, n_2 = 45;$
   б) $\bar{x} = 70, \bar{y} = 60, D(X) = 1470, D(Y) = 1320, n_1 = 60, n_2 = 40.$
4. Провести две случайные выборки по одному из показателей приложения 6, объемами $n_1$ и $n_2$. Проверить нулевую гипотезу о равенстве выборочных средних при уровне значимости 0,05 (предполагается, что дисперсии неизвестны и одинаковы): а) $n_1$=$n_2$=20; б) $n_1$=20; $n_2$=10.
   Проводилось испытание 8 сортов озимой пшеницы. Каждый сорт высевался на 6 делянках одинаковой площади. При 5% уровне значимости проверить гипотезу о существенности различий в средней урожайности двух сортов озимой пшеницы (номера сортов даются студенту преподавателем). Урожайность озимой пшеницы, ц/га:

| Повторения | Сорт | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| I | 75 | 51 | 60 | 49 | 63 | 44 | 55 | 60 |
| II | 74 | 50 | 62 | 52 | 61 | 40 | 53 | 55 |
| III | 76 | 56 | 61 | 45 | 62 | 41 | 51 | 53 |
| IV | 71 | 52 | 56 | 48 | 56 | 43 | 58 | 57 |
| V | 77 | 54 | 61 | 47 | 62 | 45 | 54 | 54 |
| VI | 75 | 52 | 59 | 46 | 61 | 41 | 53 | 56 |

5. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве результатов сдачи экзамена по теории вероятностей и математике.

| Предмет | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Теория вероятностей | 4 | 5 | 3 | 4 | 5 | 3 | 5 | 2 | 4 | 4 | 3 | 2 | 4 | 4 | 5 | 3 |
| Математика | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 | 3 | 5 | 2 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 5 | 2 |

6. Результаты выступлений спортсменов оценивались двумя судьями по десятибалльной шкале.

| Номер спортсмена | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка судьи | 1 | 8,5 | 9 | 7,4 | 9,4 | 9,7 | 6,5 | 7,1 | 8,3 | 9,1 | 8,0 |
| | 2 | 8,3 | 9,1 | 7,7 | 9,3 | 9,2 | 6,0 | 7,3 | 8,1 | 9,1 | 7,9 |

При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о значимости различий в оценке выступлений спортсменов двумя судьями.

7. При уровне значимости 0,05 по двум районам проверить гипотезы о равенстве: дисперсий, средних выборочных урожайностей, долей посевов овощей в площади приусадебных участков. Если произведено выборочное обследование 10% приусадебных участков восьми районов случайным бесповторным способом и получены следующие результаты об урожайности овощей.

| № п/п | Урожайность, ц/га | Среднее квадратическое отклонение, ц/га | Доля овощей в площади участков, % | Число обследованных участков |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 215 | 30 | 30 | 100 |
| 2 | 246 | 35 | 35 | 80 |
| 3 | 305 | 32 | 40 | 150 |
| 4 | 220 | 24 | 50 | 120 |
| 5 | 164 | 20 | 36 | 60 |
| 6 | 280 | 23 | 65 | 70 |
| 7 | 340 | 40 | 45 | 90 |
| 8 | 316 | 36 | 53 | 100 |

8. По результатам задачи 1 контрольных заданий главы 11 проверить гипотезу о нормальном распределении рабочих предприятия по разрядам.
9. По результатам задачи 2 контрольных заданий главы 11 проверить гипотезу о том, что число производственных подразделений на предприятиях распределяется по нормальному закону.
10. По результатам задачи 3 контрольных заданий главы 11 проверить гипотезу о нормальном распределении совокупности хозяйств по изучаемому признаку.
12. Изучаются колебания $X_j$ (денежные единицы) курсов ценных бумаг (тип *N1*, *N*2, *N*3, *N*4), принадлежащих разным группам риска (риск оценивается величиной дисперсии) и в различные периоды времени. Исследования ведутся двумя независимыми аналитическими центрами *A* и *B*. Банк, заинтересованный в результатах анализа, в целях формирования «портфеля ценных бумаг», желает знать результаты классификации по группам. Сделав случайную выборку информации о колебании курсов, аналитики получили следующие данные (табл. 13.1 – 13.6). $X_j$ – цена одного пакета ценных бумаг. Сформулируйте и проверьте статистические гипотезы, необходимые для ответа на вопросы:
 – какие бумаги можно отнести к бумагам одинаковой группы риска?
 – отличаются ли арифметические средние колебания курса?
 – различны ли выводы аналитических центров *A* и *B*?
 – какой тип бумаг Вы предпочтете купить, если Ваши средства ограничены суммой не более *C* денежных единиц за один пакет ценных бумаг?
 Уровень значимости $\alpha$=0,05. Допустимая цена одного пакета ЦБ С=1200.
 Анализу можно подвергать не все типы бумаг (по личному выбору).

Таблица 13.1 – Бумаги *N*1, центр *A*; $n_1$ = 190

| $X_j \cdot 10^2$ | 2 | 3 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 | 16 | 17 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 5 | 5 | 5 | 10 | 25 | 30 | 40 | 30 | 20 | 10 | 5 | 5 |

Таблица 13.2 – Бумаги *N*2, центр *A*; $n_2$ =132

| $X_j \cdot 10^2$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 5 | 5 | 10 | 25 | 20 | 25 | 20 | 15 | 5 | 1 |

Таблица 13.3 – Бумаги *N*2, центр *B*; $n_3$ = 93

| $X_j \cdot 10^2$ | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 2 | 3 | 15 | 20 | 30 | 15 | 5 | 2 | 1 |

Таблица 13.4 – Бумаги *N*3, центр *A*; $n_4$ = 175

| $X_j \cdot 10^2$ | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 35 | 15 | 10 | 5 | 3 | 1 |

Таблица 13.5 – Бумаги $N4$, центр $B$; $n_5 = 90$

| $X_j \cdot 10^2$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 2 | 10 | 25 | 30 | 15 | 5 | 2 |

Таблица 13.6 – Бумаги $N4$, центр $A$; $n_6 = 22$

| $X_j \cdot 10^2$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 5 | 10 | 3 | 2 | 1 |

11. (*Задача инвестирования.*) Инвестиционная компания $N1$ объявила средний годовой доход по акциям от определенного производства равным 11,2%. Инвестор желает проверить, действительно ли это так, и делает случайные выборки объемом N акций интересующей его отрасли индустрии. Попутно инвестор проводит анализ годового дохода по акциям инвестиционной компании $N2$, по которым объявлен средний годовой доход 12,0%. Имеет ли инвестор достаточно оснований, чтобы отказаться от инвестирования в компанию $N1$?
Необходимые статистические данные представлены таблицами 13.7 - 13.10.

Таблица 13.7 – Компания $N1$, 1-ый год; $n_1 = 115$

| $X_j$, % | 9,7 | 10,1 | 10,4 | 10,6 | 10,9 | 11,0 | 11,2 | 11,3 | 11,4 | 11,6 | 12,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 3 | 10 | 18 | 29 | 25 | 15 | 8 | 3 | 2 | 1 |

Таблица 13.8 – Компания $N2$, 1-ый год; $n_2 = 70$

| $X_j$, % | 10,3 | 10,6 | 10,8 | 10,9 | 11,1 | 11,4 | 11,7 | 12,2 | 12,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 3 | 5 | 10 | 20 | 18 | 8 | 3 | 2 |

Таблица 13.9 – Компания $N1$, 2-ой год; $n_3 = 25$

| $X_j$, % | 10,7 | 10,9 | 11,0 | 11,1 | 11,4 | 11,7 | 12,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 1 | 5 | 10 | 5 | 2 | 1 |

Таблица 13.10 – Компания $N2$, 2-ой год; $n_4 = 25$

| $X_j$, % | 10,6 | 11,0 | 11,2 | 11,5 | 11,6 | 11,8 | 11,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 3 | 5 | 8 | 5 | 2 | 1 |

Сформулируйте и проверьте статистические гипотезы, необходимые для ответа на вопросы:
– отличаются ли результаты анализа за 1-ый и 2-ой года?
– существенно ли различие средних годовых доходов компаний $N1$, $N2$?
– отличаются ли наблюдаемые средние годовые доходы от объявленных инвестиционными компаниями?
– акции какой компании Вы предпочтете, учитывая риск (измеряемый дисперсией) от приобретения этих акций? Если уровень риска: ограничен, неограничен? Можно ли пользоваться результатами анализа по малым выборкам? Уровень значимости $\alpha$=0,05. Допустимая доля риска 0,01.

## Тема 14. Дисперсионный анализ

### Вопросы для обсуждения

Постановка задачи дисперсионного анализа. Однофакторный дисперсионный анализ. Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями и без повторений.

### Контрольные задания

1. Оценить существенность различий в успеваемости студентов по четырем предметам и четырем группам. Численность студентов в каждой группе составляет 25 человек.

Таблица 14.1 – Уровень успеваемости студентов, балл

| Предмет | Группа студентов | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 4,3 | 4,1 | 4,1 | 4,2 | 4,4 | 4,5 | 4,0 | 4,3 |
| 2 | 4,2 | 4,0 | 3,9 | 4,0 | 4,3 | 4,3 | 3,7 | 3,9 |
| 3 | 4,4 | 4,5 | 4,2 | 4,2 | 4,3 | 4,3 | 4,4 | 4,4 |
| 4 | 3,9 | 3,9 | 4,0 | 4,1 | 4,2 | 4,4 | 4,1 | 4,2 |
| 5 | 3,6 | 3,7 | 3,5 | 3,8 | 4,0 | 3,7 | 3,4 | 3,9 |

2. Доказывает ли опыт влияние различных доз удобрений на урожайность озимой пшеницы

Таблица 14.2 – Урожайность озимой пшеницы с 1 га по участкам равной площади, ц

| Доза удобрений | Повторения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 39 | 39 | 37 | 41 | 36 | 38 | 43 | 40 |
| 2 | 41 | 40 | 39 | 40 | 38 | 38 | 41 | 42 |
| 3 | 42 | 40 | 39 | 42 | 40 | 39 | 43 | 45 |
| 4 | 47 | 45 | 43 | 42 | 40 | 41 | 45 | 50 |
| 5 | 55 | 50 | 60 | 48 | 54 | 53 | 61 | 53 |
| 6 | 67 | 60 | 64 | 66 | 63 | 70 | 72 | 67 |
| 7 | 73 | 70 | 77 | 79 | 76 | 65 | 64 | 68 |
| 8 | 62 | 60 | 57 | 63 | 49 | 51 | 61 | 56 |
| 9 | 81 | 86 | 74 | 78 | 83 | 80 | 79 | 85 |

3. Оценить различия в среднемесячной начисленной заработной плате механизаторов различной квалификации.

Таблица 14.3 – Средняя месячная заработная плата механизаторов, тыс. руб.

| Класс механизаторов | Бригада | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| I | 48,5 | 43,8 | 45,4 | 42,9 | 41,8 | 45,4 | 43,7 | 44,9 | 42,8 | 46,8 |
| II | 39,1 | 36,8 | 37,2 | 36,9 | 38,3 | 35,0 | 36,5 | 37,0 | 35,4 | 40,1 |
| III | 34,1 | 35,1 | 31,2 | 29,2 | 35,1 | 34,0 | 28,5 | 34,3 | 27,8 | 29,8 |

4. По четырем сортам, трем дозам удобрений и пяти повторениям, оценить существенность влияния различных сортов, доз удобрений и их взаимодействий на урожайность риса.

Таблица 14.4 – Урожайность риса с 1га, ц

| Сорт | Доза удобрений | Повторение | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 1 | 42 | 39 | 44 | 41 | 38 | 39 | 37 | 42 |
| | 2 | 44 | 47 | 46 | 45 | 43 | 42 | 41 | 44 |
| | 3 | 58 | 55 | 53 | 50 | 56 | 57 | 54 | 53 |
| 2 | 1 | 45 | 42 | 44 | 40 | 44 | 43 | 46 | 45 |
| | 2 | 49 | 47 | 49 | 47 | 45 | 47 | 48 | 47 |
| | 3 | 57 | 56 | 55 | 50 | 47 | 45 | 47 | 47 |
| 3 | 1 | 59 | 42 | 44 | 41 | 42 | 40 | 42 | 40 |
| | 2 | 68 | 51 | 55 | 53 | 51 | 54 | 53 | 49 |
| | 3 | 67 | 59 | 65 | 63 | 62 | 60 | 64 | 60 |
| 4 | 1 | 41 | 44 | 39 | 40 | 43 | 1 | 43 | 45 |
| | 2 | 48 | 49 | 46 | 51 | 52 | 49 | 46 | 51 |
| | 3 | 52 | 49 | 47 | 50 | 50 | 48 | 47 | 50 |
| 5 | 1 | 38 | 40 | 39 | 42 | 44 | 43 | 40 | 41 |
| | 2 | 49 | 52 | 50 | 52 | 48 | 49 | 50 | 54 |
| | 3 | 53 | 58 | 49 | 50 | 50 | 53 | 49 | 50 |
| 6 | 1 | 42 | 41 | 43 | 41 | 39 | 40 | 44 | 42 |
| | 2 | 49 | 52 | 53 | 53 | 50 | 54 | 53 | 53 |
| | 3 | 68 | 66 | 65 | 69 | 70 | 72 | 73 | 76 |
| 7 | 1 | 64 | 61 | 66 | 64 | 68 | 67 | 61 | 63 |
| | 2 | 72 | 74 | 70 | 69 | 73 | 69 | 72 | 71 |
| | 3 | 88 | 85 | 89 | 80 | 79 | 78 | 83 | 86 |

5. Оценить существенность различий уровня производительности механизаторов при культивации в различных хозяйствах по пропашным культурам и стажу работы механизаторов.

Таблица 14.5 – Объем выполненных работ механизаторами за 1 час работы, эт. га

| Культура | Стаж работы, лет | Хозяйство | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Кукуруза на зерно | до 5 | 0,75 | 0,9 | 0,95 | 1,00 |
| | от 5 до 10 | 1,40 | 1,55 | 1,35 | 1,50 |
| | от 10 до 15 | 1,25 | 1,35 | 1,35 | 1,40 |
| Кукуруза на силос | до 5 | 0,85 | 0,95 | 0,85 | 1,10 |
| | от 5 до 10 | 1,50 | 1,40 | 1,55 | 1,45 |
| | от 10 до 15 | 1,35 | 1,40 | 1,55 | 1,50 |
| Подсолнечник | до 5 | 0,80 | 0,90 | 0,75 | 0,85 |
| | от 5 до 10 | 1,35 | 1,45 | 1,35 | 1,40 |
| | от 10 до 15 | 1,45 | 1,40 | 1,30 | 1,30 |

## Тема 15. Корреляционно-регрессионный анализ

### Вопросы для обсуждения

Парный коэффициент корреляции и его свойтсва.Частный и множественный коэффициент корреляции. Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции. Однофакторный регрессионный анализ. Метод наименьших квадратов. Дисперсионный анализ уровнения регрессии.

### Контрольные задания[2].

1. Данные опыта приведены в таблице:

| $X_i$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_i$ | 4,5 | 7,0 | 8,0 | 7,5 | 9,0 | 8,5 | 9,5 |

Полагая, что X и Y связаны зависимостью вида $\boldsymbol{y = a + bx}$, найти коэффициенты $a$ и $b$ способом наименьших квадратов.

2. Дана таблица результатов наблюдений:

| $X_i$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_i$ | 3,5 | 6,0 | 7,0 | 6,0 | 7,5 | 8,5 | 10 |

Найти выборочный коэффициент корреляции и определить его значимость. Определить параметры линейного уравнения регрессии.

3. В «Основах химии Д. И. Менделеева (1906) приводятся данные о растворимости азотно-кислого натрия $NaNO_3$ в зависимости от температуры воды. В 100 частях воды растворяется следующее число условных частей $NaNO_3$ при соответствующих температурах:

| $x,\ ^\circ C$ | *0* | *4* | *10* | *15* | *21* | *29* | *36* | *51* | *68* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | *66,7* | *77,0* | *76,3* | *80,6* | *85,7* | *92,9* | *99,4* | *113,6* | *125,1* |

С помощью МНК получить линейную зависимость $x$ от $y$ (ответ был указан Д. И. Менделеевым в 1881 г.).

4. При изучении движения уличного транспорта были получены данные о пройденном расстоянии автомобиля до остановки после торможения в зависимости от скорости (данные переведены из английской системы мер в метрическую), рассматривалось 50 наблюдений:

| Скорость, км/ч | Пройденное расстояние, м |
|---|---|
| 6,44 | 0,61; 3,05 |
| 11,26 | 1,22; 6,71 |
| 12,87 | 4,88 |
| 14,48 | 3,05 |
| 16,09 | 7,93; 5,49; 10,37 |
| 17,70 | 8,54; 5,18 |

[2] Задачи 3-5 сформулированы по материалам книги Ю. В. Линника «Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений» [62]

| Скорость, км/ч | Пройденное расстояние, м |
|---|---|
| 19,31 | 6,10; 4,27; 7,32; 8,54 |
| 20,92 | 10,37; 7,93; 10,37; 14,03 |
| 22,53 | 10,98; 7,93; 18,30; 24,40 |
| 24,14 | 16,47; 7,93; 6,10 |
| 25,74 | 9,76; 12,20 |
| 27,35 | 15,25; 12,20; 9,76 |
| 28,96 | 17,08; 25,62; 23,18; 12,81 |
| 30,57 | 20,74; 14,03; 10,98 |
| 32,18 | 14,64; 17,08; 19,52; 15,86; 9,76 |
| 35,40 | 20,13 |
| 37,01 | 16,47 |
| 38,62 | 28,36; 21,35; 36,60; 28,06 |
| 40,23 | 25,92 |

Рассмотреть линейную и параболическую зависимости.

5. Производится наблюдение над двумя переменными – содержанием протеина $x$ в зернах пшеницы и процентным содержанием $y$ «темных стеклянистых ядрышек в тех же зернах:

| N п/п | Содержание протеина, % | Содержание стеклянистых ядрышек, % |
|---|---|---|
| 1 | 10,3 | 6 |
| 2 | 12,2 | 75 |
| 3 | 14,5 | 87 |
| 4 | 11,1 | 55 |
| 5 | 10,9 | 34 |
| 6 | 18,1 | 98 |
| 7 | 14,0 | 91 |
| 8 | 10,8 | 45 |
| 9 | 11,4 | 51 |
| 10 | 11,0 | 17 |
| 11 | 10,2 | 36 |
| 12 | 17,0 | 97 |
| 13 | 13,8 | 74 |
| 14 | 10,1 | 24 |
| 15 | 14,4 | 85 |
| 16 | 15,8 | 96 |
| 17 | 15,6 | 92 |
| 18 | 15,0 | 94 |
| 19 | 13,3 | 84 |
| 20 | 19,0 | 99 |

Обе переменные характеризуют качество пшеницы, но определение $x$ требует сложного химического анализа, а определение $y$ может быть сделано гораздо проще без приборов. Произведите выравнивание этих наблюдений по параболе второго порядка.

6. Рейтинг 9 банков был оценен тремя экспертами. С помощью коэффициента ранговой корреляции найти пары экспертов, оценки которых наиболее близко соответствуют друг другу. Оценить значимость различий в оценке рейтинга банков экспертами.

Рейтинг банков (номер предпочтительности)

| Эксперт | Номер банка | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 2 | 3 | 1 | 4 | 7 | 9 | 8 | 5 | 6 |
| 3 | 1 | 2 | 5 | 3 | 4 | 6 | 9 | 7 | 8 |

6. По 20 сельскохозяйственным организациям имеются данные по расходу кормов на корову и надоем молока от коровы. На основании имеющихся данных определить параметры линейного уравнения регрессии между уровнем кормления и продуктивностью коров, рассчитать коэффициенты корреляции и детерминации. Оценить существенность величины коэффициентов корреляции и регрессии при уровне значимости 0,05.

| № п/п | Надой молока на корову, ц | Расход кормов на корову, ц корм. ед. | № п/п | Надой молока на корову, ц | Расход кормов на корову, ц корм. ед. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 50,1 | 60,9 | 11 | 75,9 | 80,0 |
| 2 | 83,8 | 76,9 | 12 | 71,0 | 76,3 |
| 3 | 63,7 | 67,0 | 13 | 62,2 | 73,2 |
| 4 | 72,1 | 62,4 | 14 | 69,1 | 65,2 |
| 5 | 46,5 | 41,5 | 15 | 63,5 | 51,7 |
| 6 | 54,6 | 64,8 | 16 | 47,9 | 55,1 |
| 7 | 40,7 | 45,8 | 17 | 68,0 | 61,4 |
| 8 | 71,7 | 65,6 | 18 | 51,6 | 60,6 |
| 9 | 58,6 | 56,2 | 19 | 39,9 | 35,8 |
| 10 | 46,2 | 43,5 | 20 | 55,7 | 58,2 |

8. По данным приложения 6 по 25 организациям требуется:

1. Построить график зависимости между переменными, по которому необходимо подобрать модель уравнения регрессии.
2. Рассчитать параметры уравнения регрессии методом наименьших квадратов.
3. Оценить качество уравнения с помощью средней ошибки аппроксимации.
4. Найти коэффициент эластичности.
5. Оценить тесноту связи между переменными с помощью показателей корреляции и детерминации.
6. Оценить значимость коэффициентов корреляции и регрессии по −критерию Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

7. Охарактеризовать статистическую надежность результатов регрессионного анализа с использованием критерия F – Фишера при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.
8. Определить прогнозное значение результативного признака, если возможное значение факторного признака составит 1.2 от его среднего уровня по совокупности.

Изучить зависимость и выявить влияние факторов на изменение результативных признаков по следующим парам признаков:

1) численность работников на 1 га сельскохозяйственных угодий (чел.) и валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);
2) основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);
3) затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);
4) основные средства на одного работника (тыс. руб.) и численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);
5) оборотные средства на 1 работника (тыс. руб) и валовая продукция на 1 работника (тыс. руб.);
6) затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);
7) материальные затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);
8) заработная плата на 1 работника (тыс. руб.) и валовая продукция на 1 работника (тыс. руб.);
9) заработная плата на 1 работника (тыс. руб.) и выручка от реализации на 1 работника (тыс. руб.),
10) основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);
11) численность работников на 1 га сельскохозяйственных угодий (чел.) и выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);
11) оборотные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);
12) материальные затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);
13) численность работников (чел.) и валовая продукция на одно хозяйство (млн. руб.);
14) площадь сельскохозяйственных угодий (га) и валовая продукция на хозяйство (млн. руб.);
15) основные средства (млн. руб.) и валовая продукция на одно хозяйство (млн. руб.);

16) затраты на производство валовой продукции (млн. руб.) и валовая продукция на одно хозяйство (млн. руб.);
17) среднегодовая численность работников (чел.) и выручка от реализации продукции на одно хозяйство (млн. руб.);
19) площадь сельскохозяйственных угодий (га) и выручка от реализации продукции на хозяйство (млн. руб.);
20) оборотные средства (млн. руб.) и валовая продукция (млн. руб.);
21) основные средства (млн. руб.) и выручка от реализации продукции на одно хозяйство (млн. руб.).

9. По данным приложения 6 по совокупности организаций исследовать влияние 3 – 4 факторов на изменение следующих результативных признаков:

1) валовая продукция, млн. руб.;
2) выручка от реализации, млн. руб.;
3) выручка на 1га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;
4) выручка на 1 работника, тыс. руб.;
5) валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;
6) валовая продукция на 1 работника, тыс. руб.

1. Рассчитать параметры множественного уравнения регрессии методом наименьших квадратов. 2. Оценить качество уравнения с помощью средней ошибки аппроксимации. 3. Найти коэффициенты эластичности и $\beta -$ коэффициенты. 4. Оценить тесноту связи между переменными с помощью показателей корреляции и детерминации. 5. Охарактеризовать статистическую надежность результатов регрессионного анализа с использованием F – критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

## Тема 16. Анализ временных рядов

### Вопросы для обсуждения

Дискретный временной ряд как частный случай случайного процесса. Стационарные и нестационарные временные ряды. Основный подходы к анализу временных рядом (детерминистский, стохастический, спектральный). Модели стационарных временных рядов.

### Контрольные задания

1. На основании данных об урожайности одной сельскохозяйственной культуры: а) построить график динамики урожайности; б) определить параметры тренда урожайности, использовав приемы линейного и нелинейного сглаживания; в) найти выровненные значения урожайности и доверительные интервалы для этих значений; г) определить прогнозные значения урожайности на период до 2022 года.

| Год | Пшеница озимая | Кукуруза | Картофель | Сахарная свекла | Подсолнечник | Овощи |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1994 | 31,1 | 26,4 | 70 | 237 | 18,9 | 109 |
| 1995 | 32,4 | 24,9 | 79 | 175 | 18,6 | 102 |
| 1996 | 33,1 | 32,2 | 83 | 324 | 20,4 | 115 |
| 1997 | 31,6 | 33,5 | 85 | 264 | 19,9 | 117 |
| 1998 | 37,6 | 38,0 | 68 | 316 | 13,4 | 112 |
| 1999 | 28,8 | 34,8 | 71 | 271 | 22,1 | 111 |
| 2000 | 33,2 | 27,8 | 81 | 225 | 22,3 | 105 |
| 2001 | 39,5 | 30,2 | 77 | 289 | 20,1 | 129 |
| 2002 | 37,5 | 39,4 | 83 | 307 | 15,6 | 99 |
| 2003 | 43,2 | 30,9 | 76 | 380 | 18,2 | 113 |
| 2004 | 36,4 | 35,3 | 81 | 336 | 23,5 | 105 |
| 2005 | 44,1 | 36,3 | 86 | 298 | 20,4 | 109 |
| 2006 | 39,8 | 33,3 | 70 | 250 | 17,8 | 90 |
| 2007 | 42,0 | 35,4 | 92 | 278 | 16,9 | 92 |
| 2008 | 36,2 | 36,4 | 70 | 187 | 16,0 | 89 |
| 2009 | 32,9 | 31,3 | 83 | 259 | 17,5 | 82 |
| 2010 | 49,7 | 33,8 | 89 | 361 | 20,8 | 93 |
| 2011 | 44,5 | 35,1 | 95 | 336 | 18,6 | 58 |
| 2012 | 39,8 | 41,9 | 98 | 442 | 21,4 | 105 |
| 2013 | 50,1 | 53,0 | 100 | 517 | 25,7 | 107 |
| 2014 | 54,7 | 53,2 | 107 | 490 | 24,3 | 112 |
| 2015 | 57,5 | 53,5 | 108 | 461 | 24,1 | 121 |
| 2016 | 58,4 | 55,0 | 112 | 534 | 25,1 | 117 |
| 2017 | 62,0 | 50,4 | 118 | 493 | 25,4 | 124 |
| 2018 | 61,2 | 33,5 | 122 | 385 | 21,7 | 114 |
| 2019 | 59,6 | 46,4 | 118 | 461 | 23,4 | 119 |

2. Имеются следующие данные об объеме подрядных работ строительной организации:

Объем подрядных работ, млн. руб.

| Месяцы | 2014г. | 2015г. | 2016г. | 2017г. |
|---|---|---|---|---|
| Январь | 125 | 158 | 146 | 181 |
| Февраль | 188 | 196 | 232 | 220 |
| Март | 232 | 264 | 289 | 263 |
| Апрель | 441 | 487 | 466 | 466 |
| Май | 410 | 405 | 434 | 448 |
| Июнь | 421 | 458 | 411 | 464 |
| Июль | 503 | 594 | 603 | 668 |
| Август | 541 | 605 | 574 | 631 |
| Сентябрь | 487 | 511 | 534 | 540 |
| Октябрь | 317 | 407 | 485 | 391 |
| Ноябрь | 246 | 386 | 423 | 378 |
| Декабрь | 328 | 315 | 398 | 408 |

Построить график динамики объема подрядных работ. Определить параметры тренда объема подрядных работ, включающего общую закономерность изменения объема работ и периодическую составляющую, используя периодическую функцию ряда Фурье.

3. На основании данных приложения 9, об урожайности одной сельскохозяйственной культуры: а) построить графики динамики урожайности; б) определить параметры трендов урожайности, использовав приемы: линейного, нелинейного, экспоненциального сглаживания и т.д.; в) найти выровненные значения урожайности и доверительные интервалы для этих значений; г) определить прогнозные значения урожайности на период до 2022 года.

## Вопросы к экзамену

1. Предмет и основные понятия теории вероятностей. Алгебра событий.
2. Определения вероятности события.
3. Комбинаторика.
4. Основные теоремы теории вероятностей.
5. Формулы полной вероятности и гипотез.
6. Повторные независимые испытания (формула Бернулли). Наивероятнейшее число наступления события в независимых испытаниях.
7. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
8. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.
9. Пуассоновское приближение.
10. Случайные величины и их виды.
11. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.
12. Основные законы распределения дискретных случайных величин.
13. Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства.
14. Математические ожидания основных законов распределения ДСВ.
15. Дисперсия дискретной случайной величины и ее свойства.
16. Дисперсия основных законов распределения ДСВ
17. Производящие функции дискретных случайных величин.
18. Вероятностный анализ алгоритмов.
19. Одинаково распределенные взаимно-независимые случайные величины.
20. Интегральная функция распределения вероятностей и ее свойства. Дифференциальная функция распределения вероятностей и ее свойства.
21. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
22. Равномерное распределение.
23. Показательное распределение.
24. Нормальное распределение. Вероятность заданного отклонения. Правило трех сигм.
25. Понятие многомерной случайной величины и способы ее задания на примере двумерной дискретной величины.
26. Интегральная функция многомерной случайной величины. Вероятность попадания двумерной случайной величины в полуполосу и прямоугольник.
27. Независимость случайных величин и их числовые характеристики. Коэффициент корреляции и его свойства.
28. Закон распределения функции случайных величин.
29. Композиция распределений.
30. Распределения хи-квадрат Пирсона, t – Стьюдента, F – Фишера.
31. Сущность закона больших чисел.
32. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева.
33. Характеристическая функция. Понятие о центральной предельной теореме.
34. Цепи Маркова. Понятие о случайных процессах.

35. Приложения теории вероятностей в компьютерных науках.
36. Случайные числа, генераторы случайных чисел.
37. Вероятностный подход к понятию информации.
38. Предмет и основные задачи математической статистики.
39. Определение и виды вариационных рядов. Графическое изображение вариационных рядов распределения.
40. Средняя арифметическая ряда распределения и ее свойства.
41. Дисперсия ряда распределения и ее свойства.
42. Моменты ряда распределения и связь между ними. Асимметрия и эксцесс ряда распределения.
43. Сущность выборочного метода. Статистические оценки выборочной совокупности и их свойства.
44. Определение доверительного интервала для средней и доли при случайном и типическом отборе. Определение необходимой численности выборки.
45. Понятие и виды статистических гипотез. Статистические критерии проверки гипотез. Уровень значимости и мощность критерия.
46. Проверка гипотезы о равенстве средней определенному значению.
47. Проверка гипотезы о равенстве двух выборочных средних и долей независимых выборок.
48. Оценка средней разности двух зависимых выборок.
49. Проверка статистических гипотез об однородности выборочной совокупности.
50. Критерии согласия.
51. Понятие и модели дисперсионного анализа. Однофакторный дисперсионный анализ. Понятие о многофакторном дисперсионном анализе. Дисперсионный анализ в *Excel*.
52. Понятие корреляционной зависимости.
53. Оценка методом наименьших квадратов коэффициентов регрессии.
54. Проверка адекватности модели парной регрессии. Корреляционно-регрессионный анализ в *Excel*.
55. Понятие экономического временного ряда и его составляющие. Тренд динамического ряда. Способы выявления тренда. Построение моделей временных рядов в *Excel*.
56. Введение в методы анализа данных.
57. Понятие о современных технологиях анализа данных (*OLAP, Data Mining, Big Data*, *интернет вещей, интернет всего*).
58. Системный подход как идеология анализа данных, тенденции перехода к киберфизическим системам.
59. Элементы анализа данных на современном этапе.
60. Анализ данных в контексте процесса формирования знаний.

## Контрольные задания

## I Теория вероятностей

(Исходные данные находятся в приложении 5)

1. Для проверки результатов геодезических работ назначена группа экспертов, состоящая из трех подгрупп. В первой подгруппе - $n_1$ человек, во второй − $n_2$ и в третьей − $n_3$. Эксперты первой подгруппы принимают верное решение с вероятностью $p_1$ эксперты второй подгруппы − $p_2$ эксперты третьей подгруппы − $p_3$. Наудачу вызванный эксперт принимает $k$ независимых решений. Найти вероятность того, что: а) ровно 3 решения приняты, верно; в) принимал решения эксперт из первой подгруппы, если 3 решения приняты, верно.
2. Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит $N$; б) произведение числа очков не превосходит $N$; в) произведение числа очков делится на $N$.
3. Имеются изделия четырех сортов, причем число изделий $i$-го сорта равно $n_i$, $i$=1, 2, 3, 4. Для контроля наудачу берутся $m$ изделий. Определить вероятность того, что среди них $m_1$ первосортных, $m_2$, $m_3$ и $m_4$ второго, третьего и четвертого сорта соответственно $\left(\sum_{i=1}^{4} m = m\right)$.
4. Среди n лотерейных билетов $k$ выигрышных. Наудачу взяли $m$ билетов. Определить вероятность того, что среди них $l$ выигрышных.
5. В лифт $k$-этажного дома сели $n$ пассажиров ($n < k$).Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере, двое сошли на одном этаже.
6. В отрезке единичной длины наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит величину $1/k$.
7. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времена от $T_1$ до $T_2$. Одно из событий длится 10 мин., другое - $t$ мин. Определить вероятность того, что: а) события «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».
8. В круге радиуса $R$ наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны $S_1$ и $S_2$.
9. В двух партиях процент доброкачественных изделий $k_1$ и $k_2$ - соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) хотя бы одно бракованное; б) два бракованных; в) одно доброкачественное и одно бракованное?
10. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком равна $p_1$, вторым − $p_2$. Первый сделал $n_1$, второй − $n_2$ выстрелов. Определить вероятность того, что цель не поражена.

11. Два игрока $A$ и $B$ поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадает герб. Первый бросок делает игрок $A$, второй − $B$, третий − $A$ и т. д.

    1. Найти вероятность указанного ниже события.

       Варианты 1-8. Выиграл $A$ до $k$-го броска.

       Варианты 9-15. Выиграл $A$ не позднее $k$-го броска.

       Варианты 16-23. Выиграл $B$ до $k$-го броска.

       Варианты 24—31. Выиграл $B$ не позднее $k$-го броска.

    2. Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре?

12. Урна содержит $M$ занумерованных шаров с номерами от 1 до $M$. Шары, извлекаются по одному без возвращения. Рассматриваются следующие события: $A$ - номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1,2,... $M$; $B$ - хотя бы один раз совпадает номер шара и порядковый номер извлечения; $C$ - нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. Определить вероятности событий $A$, $B$, $C$. Найти предельные значения вероятностей при $M \to \infty$.
13. Из 1000 ламп $n_i$, принадлежат $i$-й партии, $i$=1, 2, 3, $\sum_{i=1}^{3} n_i = 1000$. В первой партии 6%, во второй 5%, в третьей 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа - бракованная.
14. В первой урне − $N_1$ белых и $M_1$ черных шаров, во второй − $N_2$ белых и $M_2$ черных. Из первой во вторую переложено $K$ шаров, затем из второй урны извлечен один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар - белый.
15. В альбоме $k$ чистых и $l$ гашеных марок. Из них наудачу извлекаются m марок (среди которых могут быть и чистые, и гашеные), подвергаются спецгашению и возвращаются в альбом. После этого вновь наудачу извлекается n марок. Определить вероятность того, что все $n$ марок чистые.
16. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем $i$ - й завод поставляет $m_i$% изделий ($i$=1, 2, 3). Среди изделий $i$-го завода $n_i$% первосортных. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено $i$-м заводом.
17. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадает $n$ раз. Определить вероятность того, что цифра выпадает $m$ раз.
18. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна $p$. Куплено $n$ билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.
19. На каждый лотерейный билет с вероятностью $p_1$ может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью $p_2$ - мелкий выигрыш и с вероятностью $p_3$ билет может оказаться без выигрыша. Куплено $n$ билетов. Определить вероятность получения $n_1$ крупных выигрышей и $n_2$ мелких.

20. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна $p$. Поступило $n$ вызовов. Определить вероятность $m$ «сбоев».
21. Вероятность наступления некоторого события в каждом из $n$ независимых испытаний равна $p$. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет следующему неравенству.

Варианты 1-11: $k_1 \le m \le k_2$.

Варианты 12—21: $k_1 \le m$.

Варианты 22—31: $m \le k_2$

## II Математическая статистика

(Исходные данные находятся в приложении 7)

**В задачах 1-20** по данным приложения 7, составить вариационный ряд распределения сельскохозяйственных по одному признаку. Построенный интервальный ряд изобразить графически с помощью полигона, гистограммы и кумуляты. Определить среднее значение признака, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

1. Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.
2. Валовая продукция на 1 га пашни, тыс. руб.
3. Валовая продукция на среднегодового работника, тыс. руб.
4. Валовая продукция на 100 руб. основных средств, руб.
5. Валовая продукция на 100 руб. затрат, руб.
6. Выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.
7. Выручка на 1 га пашни, тыс. руб.
8. Выручка на 100 руб. затрат, руб.
9. Выручка на среднегодового работника, тыс. руб.
10. Основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.
11. Основные средства на 1 га пашни, тыс. руб.
12. Основные средства на среднегодового работника, тыс. руб.
13. Численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий, чел.
14. Численность работников на 100 га пашни, чел.
15. Годовая заработная плата на среднегодового работника, тыс. руб.
16. Затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.
17. Затраты на реализованную продукцию на 1 га пашни, тыс. руб.
18. Площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника, га
19. Площадь пашни на среднегодового работника, га
20. Затраты на 100 руб. выручки, руб.

**Задачи 21-40.** Рассматривая данные приложения 7 как результаты случайной бесповторной 20% выборки и, используя результаты решения задач 1-20, определить: а) доверительный интервал для среднего значения признака в генеральной совокупности с доверительной вероятностью 0,95; б) необходимый объем выборки, обеспечивающий уменьшение предельной ошибки выборки в 2 раза, сохранив остальные характеристики на прежнем уровне. Условие задачи 21 соответствует данным задачи 1, задачи 22 данным задачи 2 и т. д.

**Задачи 41-60.** Дать количественную оценку связи между двумя признаками. Построить график корреляционной зависимости между признаками. По графику определить тип уравнения связи. Методом наименьших квадратов найти параметры уравнения регрессии. Полученное уравнение нанести на график связи. Рассчитать коэффициенты корреляции и детерминации. Оценить значимость выборочного коэффициента корреляции при уровне значимости 0,05. Для выполнения задач использовать данные приложения 1 по первым 20 предприятиям, по указанным в соответствующем варианте двум признакам.

Выявить влияние на изменение результативных признаков одного из указанных факторов.

41. Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);
42. Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий (чел.);
43. Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника (га);
44. Валовая продукция на 1 га пашни (тыс. руб.) и основные средства на 1 га пашни (тыс. руб.);
45. Валовая продукция на 1 га пашни (тыс. руб.) и численность работников на 100 га пашни (чел.);
46. Валовая продукция на 1 га пашни (тыс. руб.) и площадь пашни на среднегодового работника (га);
47. Валовая продукция на среднегодового работника (тыс. руб.) и основные средства на среднегодового работника (тыс. руб.);
48. Валовая продукция на среднегодового работника (тыс. руб.) и годовая заработная плата на среднегодового работника (тыс. руб.);
49. Валовая продукция на среднегодового работника (тыс. руб.) и площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника (га);
50. Выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий, (тыс. руб.) и основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);
51. Выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий (чел.);
52. Выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);
53. Выручка на 1 га пашни (тыс. руб.) и основные средства на 1 га пашни (тыс. руб.);
54. Выручка на 1 га пашни (тыс. руб.) и численность работников на 100 га пашни (чел.);
55. Выручка на 1 га пашни (тыс. руб.) и площадь пашни на среднегодового работника (га);
56. Выручка на среднегодового работника (тыс. руб.) и основные средства на среднегодового работника (тыс. руб.);

57. Выручка на среднегодового работника (тыс. руб.) и годовая заработная плата на среднегодового работника (тыс. руб.);
58. Выручка на среднегодового работника (тыс. руб.) и площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника (га);
59. Выручка на среднегодового работника (тыс. руб.) и площадь пашни на среднегодового работника (га);
60. Валовая продукция на среднегодового работника (тыс. руб.) и площадь пашни на среднегодового работника (га).

## Литература


1. Бондаренко П. С. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров / П. С. Бондаренко, Г. В. Горелова, И. А. Кацко. Краснодар, КубГАУ, 2013.- 340 с.
2. Бондаренко П. С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / П. С. Бондаренко, Г. В. Горелова, И. А. Кацко; под ред И. А. Кацко, А. И. Трубилина. - М.: КНОРУС,2019. – 390 с. – Режим доступа: -https://www.book.ru/view3/930219/1
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. для прикл. бакалавриата / Гмурман В.Е. - 12-е изд. - М.: Юрайт, 2016. - 479 с. - (Бакалавр. Приклад. курс)
4. Горелова Г.В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel / Г.В. Горелова, И.А. Кацко. – Изд. 4-е. –Ростов н/Д : Феникс, 2006. – 475, [1] с.: ил. – (Высшее образование).
5. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие для прикладного бакалавриата. Изд.- 11-е. / В. Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2016. – 404 с.
6. Карасев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Математическая статистика [Электронный ресурс]: практикум / В.А. Карасев, Г.Д. Лёвшина. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательский Дом МИСиС, 2016. — 120 с. — 978-5-906846-01-3. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/64203.html
7. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебник для вузов / В.А. Колемаев, В.Н. Калинина. — 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. — 352 с. — 5-238-00560-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/71075.html

## Ответы

### Часть I

Контрольные задания 1.1

1. *а*) да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) нет.
2. *а*) да; б) нет; в) нет; г) да.
3. *а*) нет; б) да; в) нет.

Контрольные задания 1.2

1. *а*) 1/6; б) 1/2 в) 1/2; г) 1/3.
2. 1/90.
3. *а*) 1/6; б) 11/36; в) 1/18.
4. *а*) 0,78; б) 78%.
5. 6.
8. 13/25.
9. 0,708г.
10. $(2l)/(\pi L)$.
11. *а*) 1/4, б) 1/2, в) 1/3.

Контрольные задания 1.3

4. 362880
5. 450450
7. 720
8. *а*) 0,25; б) 0,375; в) 0,75.
9. 1/40320.
10. 1/120.
11. 0,25.
12. *а*) 4/9; б) 0,00033.
13. 1/120.
14. 0,25.
15. 0,26.
16. 0,5.
17. 0,079.
18. 0,38.
19. 0,05.
20. *а*) 0,087; б) 0,0043.
21. 0,348.
22. *а*) 1/376992; б) 0,0123.
23. 0,00077.
24. 0,3.
25. *а*) 0,6; б) 0,3; в) 0,9.

Контрольные задания 1.4

1. *а*) 0,5; б) 0,15.
2. 0,5.
3. *а*) 91/460; б) 7/46; в) 6/115.
4. 0,027.
5. *а*) 0,902; б) 0,098.
6. 0,6.
7. 0,763.
8. *а*) 0,222; б) 0,291.
9. *а*) 1/3; б) 8/15; в) 3/5; г) 7/15.
10. 0,271.
11. *а*) 0,648; б) 0,72.
12. *а*) 1/360; б) 1/180; в) 1/180.
13. *а*) 0,189; б) 0,027; в) 0,343; г) 0,216; д) 0,657.
14. *а*) 0,0105; б) 0,4265; в) 0,558.
15. 1/7.
16. 36/71 и 35/71.
17. 31/35.
18. Найдет.
19. 0,059.
20. а) 0,379; б) 0,621.
21. *а*) 0,558; б) 0,385; в) 0,615.
22. 37/64.
23. *а*) 0,392; б) 0,428; в) 0,904; г) 0,096.
24. *а*) 0,51; б) 0,94; в) 0,34.
26. *а*) 0,741; б) 0,241; в) 0,88(8).
27. 0,006; 0,092; 0,398; 0,504.
28. 0,288.
29. 0,4053.
30. 4.
31. *а*) 0,479; б) 0,333; в) 0,124.
32. *а*) 0,049; б) 0,267.
33. 0,72
34. 0,405
35. 0,2

Контрольные задания 1.5

1. *а*) 0,5075; б) 0,8276.
2. 1/6.
3. 0,676.
4. 0,643.
5. 0,27.
6. 0,1688.
7. *а*) 0,56; б) 0,857.
8. 0,25.
9. 0,02.
10. *а*) 0,79; б) 0,772.
11. 0,4.
12. *а*) 0,725; б) 0,276.
14. 0,0715
15. 0,2857

Контрольные задания 2.1

1. *а*) 0,116; б) 0,52.
2. *а*) 0,328; б) 0,738; в) 0,0067.
3. 0,630; 0,315; 0,052; 0,003.
4. *а*) 0,31; б) 0,5; в) 0,5; г) 0,625.
5. 124 или 125.
6. От 299 до 305.
7. *а*) Одну из двух; б) не менее двух из четырех.
8. 0,045.
9. 0,999.
10. 0,737
11. $(1/4^n)C_{2n}^n$
12. *а*) 0,1488 б) 0,1869 в) 0,43
13. 0,0777

Контрольные задания 2.2

1. *а*) 0,061; б) 0,92; в) 0,264.
2. 0,09.
3. 0,387; 0,42; 0,368.
4. 0,212.
5. 15; 0,115.
6. 2;0,271.
7. 0,993.
9. *а*) 0,9938; б) 0,9937.
10. 0,0007.
11. 444.
12. 56; 0,119.
13. *а*) 0,992; б) 0,988.
14. От 19 до 21.
15. 69.
17. 0,999.
19. От 792 до 828.
20. 8100.
21. От 382 до 394.
22. 3162.
23. 0,002.

Контрольные задания 3.1 – 3.4

1. $\mathrm{M(X)} = 3{,}6;\ D(\mathrm{X}) = 0{,}36;\ \sigma(\mathrm{X}) = 0{,}6.$
2. $\mathrm{M(X)} = 2{,}06;\ D(\mathrm{X}) = 0{,}999;\ \sigma(\mathrm{X}) = 1{,}0.$
3. $\mathrm{M(X)} = 1{,}2;\ D(\mathrm{X}) = 0{,}72;\ \sigma(\mathrm{X}) = 0{,}85.$
4. $\mathrm{M(X)} = 1{,}8.$
7. $x_0 = 1.$
8. $x_0 = 1.$
9. а) $\mathrm{M(X)} = 3{,}1216;$ б) $\mathrm{M(X)} = 4{,}091.$
10. $\mathrm{M(X)} = 2{,}4264.$
11. $\mathrm{M(X)} = 39{,}221.$
12. $\mathrm{M(X)} = 2{,}4.$
13. $\mathrm{M(X)} = 1{,}87.$
15. Третьего; второго.
16. $\mathrm{M(X)} = 42;\ D(\mathrm{X}) = 35;\ \sigma(\mathrm{X}) = 5{,}92.$
17. *а*) 4; б)14; в) 20; г) 35.
18. *а*) 8; б)8; в) 72; г) 32.
19. *а*) 14 и 88; б)-2 и 112; в) 30 и 186.
20. *а*) 34 и 96; б)15 и 161; в) 13 и 49.
21. *а*) 0,6768; б)0,8647.
22. M(Z)=7,4; D(Z)=2,2; σ(Z)=1,48; M(V)=13,68; D(V)=29,3376;
23. $\mathrm{M(X)} = 4{,}2;\ D(\mathrm{X}) = 0{,}64;\ \sigma(\mathrm{X}) = 0{,}8.$

$\sigma(V)$=5,4164.

25. 34,1;150,19; 12,26.
26. $x_2$=2,6.
27. $p(x = 2) = 0{,}1;\ p(x = 3) = 0{,}2.$
28. $M(X)$=2; σ(x)=1,4.
29. $p = 0{,}1.$
30. $M(X)$=7.
31. $x_1 = 4;\ p_1 = 0{,}4;\ x_2 = 5;\ p_2 = 0{,}6.$
32. $x_1 = 0;\ x_2 = 1; p_2 = 0{,}15.$
33. $x_2 = 2;\ x_3 = 5; p_2 = 0{,}3.$
34. $p_2 = 0{,}3;\ p_3 = 0{,}4;\ p_4 = 0{,}2.$
36. *а*) 0,857375;0,1355375;0,007125;0,000125; в) 0,00725
37. 0,0238095 $M(X) = 100\$, D(X) = 16667\$$

Контрольные задания 4.1 – 4.3

3. $M(X)$=2,1.
4. *а*) 0,5; б) 0,75; в) 0,25;г) 0,5.
5. 0,29663.
6. б) $M(X)=2\frac{1}{6}$; $D(X)=\frac{11}{36}$; $\sigma(X)=\frac{\sqrt{11}}{6} \approx 0{,}553$; в) $\frac{3}{8}$.
7. *а*)0,5*а*; б) $M(X)=2-2a$; $D(X)=\frac{4}{3}$; $\sigma(X)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
8. $A$=0; $B$=2; $M(X)$=1,5; $D(X)$=0,15; $\sigma(X)$=0,387.
9. б) 0,847.
10. б) 0,599; в) $M(X)$=2,566; $D(X)$=0,079; $\sigma(X)$=0,28.
11. б) 7/36.
12. б) 0,221.
13. б) 0,1875.
14. б) 3/16; в) $M(X)=0{,}8\sqrt{a}$; $D(X)=\frac{2}{75}a$; $\sigma(X)=\frac{\sqrt{6}}{15}a$.
15. б) 0,6321 ; в) $M(X)$=1/3; $D(X)$=1/9; $\sigma(X)$=1/3.
16. *а*) $a$=0,25; б) $M(X)=2\frac{1}{3}$; в) 0,25.
17. $M(X)$=0; $D(X)=\frac{\pi^2}{4}-2$.
18. *а*) $c$=48; б) $M(X)$=199/64; $D(X)$=0,463.
19. $c=1/2\pi$.

Контрольные задания 5.1–5.3

2. *а*) $M(X) = 8;\ D(X) = 3;$ б) $M(X) = 1;$ $D(X) = 5\frac{1}{3}$.
3. $M(X)=a$; $D(X)=5\frac{1}{3}$; $\sigma(X)=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
4. в) $\frac{5}{16}$; г) $M(X) = \frac{a}{3};\ D(X) = \frac{a^2}{18}; \sigma(X) = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.
5. в) 0,75; г) $M(X)=0$; $D(X) = \frac{a^2}{6}; \sigma(X) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$
6. *а*) 0,8413; б) 0,9544.
7. *а*) 0,7258; б) 0,9995; в) 0,9082; г) 0,8164.
8. *а*) 0,8413; б) 0,5328.
9. 0,9997.

10. (56,1; 63,9).

11. 10,0.

12. (240; 360).

13. *а*) 0,5328; б) $\mathrm{M}_0 = 5;\ \mathrm{Me} = 5$.

14. (–2; 2).

15. 0,8185.

17. *а*) 0,865; б) 0,018.

19. *а*) 0,5465; б) 0,4036; в) 0,9502; г) 0,0498.

21. *а*) 0,134; б) 0,9826; в) 0,9975.

22. *а*) 0,134; б) 0,9379.

23. $а) \frac{1}{\pi} arctg\, x + \frac{1}{2}$; б)$\frac{2}{3}$.

24. б) 0,4712.

в) $M(X) = a \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}; D(X) = a^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$;

$\sigma(X) = a \cdot \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}$.

25. $а)\ x_0 = 1{,}25^{\frac{1}{\beta}} a$;

в) $M(X) = \frac{\beta a}{\beta - 1}$ при $\beta > 1$.

26. 13158,6

27. 5,83 и 2,41

28. 13158,6

Контрольные задания 6.1 – 6.4

2. $M(X)$=7,5; $D(X)$=56,25; $M(Y)$=5,5; $D(Y)$=24,75.

3. $f(x,y)=\begin{cases} \ln^2 3 \cdot 3^{-x-y} & при\ x \ge 0,\ y \ge 0 \\ 0 & при\ x < 0,\ y < 0 \end{cases}$.

4. 0,2926.

5. $\frac{3}{128}$

6. $f(x)=8 \cdot e^{-4x-2y}\quad при\ x \ge 0,\ y \ge 0$;

$f(x)=0\quad при\ x < 0,\ y < 0$.

$a$=0,5; $M(X)=M(y)=\frac{\pi}{4}$;

$D(X)=D(Y)=(\pi^2+8\pi-32)/16$.

9.

12. *а*) $f(x,y)=\frac{1}{18}$ внутри треугольника,

$f(x,y)$=0 вне треугольника;

б) $f_1(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{18}x,\ 0 < x < 6;$

$f_2(y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{18}y,\ 0 < y < 6;$

$f(x/y) = \frac{1}{6-y},\ 0 < y < 6;$

$f(y/x) = \frac{1}{6-x},\ 0 < x < 6$.

13. *а*) $f(x,y)=\frac{1}{a^2}$ внутри квадрата;

$f(x,y)$=0 вне квадрата;

б) $f(x)=\begin{cases} \frac{a\sqrt{2} - 2|x|}{a^2} & при\ |x| \le \frac{a\sqrt{2}}{2}, \\ 0 & при |x| > \frac{a\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$

$f(y)=\begin{cases} \frac{a\sqrt{2} - 2|y|}{a^2} & при\ |y| \le \frac{a\sqrt{2}}{2}, \\ 0 & при |y| > \frac{a\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$

$f(x/y)=\begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{2} - 2|y|} & при\ |x \pm y| \le \frac{a\sqrt{2}}{2}, \\ 0 & при |x \pm y| > \frac{a\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$

$f(y/x)=\begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{2} - 2|x|} & при\ |x \pm y| \le \frac{a\sqrt{2}}{2}, \\ 0 & при |x \pm y| > \frac{a\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

14. $M(X)=M(Y)=\frac{\sqrt{3\pi}}{6}$; $D(X)=D(Y)=\frac{4-\pi}{12}$.

15. $M(X)=M(Y)=\frac{a}{3}$; $D(X)=D(Y)=\frac{a^2}{18}$; $K(X,Y)=-\frac{a^2}{36}$.

16. а) $f(x)=\begin{cases} 0 & при\; x\le 0,\ y\le 0, \\ 10e^{-(2x+5y)} & при\quad x>0,\ y>0; \end{cases}$

б) $F(x,y)=\begin{cases} 0 & при\; x\le 0,\ y\le 0, \\ (1-e^{-2x})\cdot(1-e^{-5y}) & при\quad x>0,\ y>0. \end{cases}$

Контрольные задания 7.1–7.3

3. а) $M(Y)$=10; $D(Y)$=36; $\sigma(y)$=6; б) $M(Y)$=14,5; $D(Y)$=95,85; $\sigma(Y)$=9,8.

5. а) $g(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ при $y\in(-1;1)$; б) $g(y)=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ при $y\in(0;1)$.

6. а) $g(y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-10)^2}{8}}$,

б) $g(y)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt[3]{y^2}}e^{\frac{-(\sqrt[3]{y}-2)^2}{2}}$.

7. $g(S)$=-$\ln S$, где $0<S<1$.

8. а) $g(y)=\frac{3}{\pi(9+y^2)}$

б) $g(y)=\frac{1}{3\pi(y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}})}$.

9. $g(z)=\begin{cases} 0 & \text{при } z<0, \\ \frac{z}{20} & \text{при } 0<z\le 2, \\ \frac{1}{10} & \text{при } 2<z\le 10, \\ \frac{12-z}{20} & \text{при } 10<z\le 12, \\ 0 & \text{при } z>12. \end{cases}$

10. $g(z)=\begin{cases} 0 & \text{при } z\le -3, \\ \frac{z+3}{25} & \text{при } -3<z\le 2, \\ \frac{7-z}{25} & \text{при } 2<z\le 7, \\ 0 & \text{при } z>7. \end{cases}$

11. $g(z)=\begin{cases} 0 & \text{при } z\le 0, \\ e^{-\frac{z}{2}}(1-e^{-\frac{z}{2}}) & \text{при } z>0 \end{cases}$

12. $M(Z)$=0, $D(Z)$=2,

$g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\cdot e^{-\frac{z^2}{4}}$.

13. $g(x)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}$ при $x>0$.

Контрольные задания 8.1–8.3

1. $P(x>10)\le\frac{6}{10}$.

2. а) $P(x>8)\le\frac{1}{2}$, б) $P(x\le 6)\ge\frac{1}{3}$.

3. $P\ge 0{,}9872$.

4. $P_1\ge 0{,}936,\ P_2=0{,}99996$.

5. $P \geq 0{,}64$.

6. $P \leq \frac{2}{3}$.

7. $P \geq 0{,}5456$.

8. *а*) $P \geq 0{,}98$, б) $P \geq 0{,}955$.

9. *а*) $P \geq \frac{7}{9}$, б) $\frac{35}{36}$.

10. *а*) $P \geq \frac{7}{9}$, б) $\frac{35}{36}$.

11. 400.

12. 3125.

13. *P*>0,96

14. $P \geq 0{,}92$

Контрольные задания 9

2. $0 \leq P \leq 1, \quad 0 \leq S \leq 1$.

3. $Pi, \quad i+1 = \frac{5-i}{5}; \quad Pi, \quad i-1 = \frac{i}{5}$,

$Pij = 0$, для остальных $i, j$;

$Pij(2) = \frac{5+10i-2i^2}{25}$, $P_{i,\,i-2}(2) = \frac{i(i-1)}{25}$,

$P_{i,i+2}(2) = \frac{(5-i)(4-i)}{25}$,

остальные $Pij = 0$.

4. 1/6.

5. б) 0; 0;

$(\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{108}$; 0;

$(\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{72}$.

## Часть II

Контрольные задания 11.1–11.3

1. $\overline{X} = 3{,}48; \quad Mo = 4; \quad Me = 4;$
$\sigma^2 = 2{,}079; \sigma = 1{,}442.$

2. $\overline{X} = 4{,}18; \quad Mo = 4; \quad Me = 4;$
$\sigma^2 = 2{,}063; \sigma = 1{,}436.$

4. $\overline{X} = 11{,}167; \quad \sigma = 9{,}728; \ V = 87{,}1\%.$

6. $\overline{X} = 7{,}323; \quad \sigma = 1{,}750; \ V = 23{,}9\%;$
$Ka = -0{,}817; \quad Ex = 0{,}868.$

Контрольные задания 12.1–12.4

1. (1,702; 1,898); (1089;1215).

2. *а*) (0,474; 0,526); б) (0,47; 0,53).

3. (142,75; 157,25); (107062,1; 117937,9).

4. *а*) 3,49; 2,030; 1,4;
б) (3,24; 3,74); в) 0,8294; г) 180.

5. *а*) 4,24; 2,083; 1,443;
б) (4,027; 4,453); в) 250.

7. (243,3; 256,7), (34,5; 45,5), 651.

8. *а*) 16%; 6,5%; 2,55%;
б) (15; 17).

9. 385.

10. (17,1; 19,4); (17; 35,5).

11. (0,662; 0,799).

14. 0,9503.

15. (2.34; 2,86)

16. 0,9319.

Контрольные задания 15.1–15.3

1. *y*=0,339 *x* + 5;
*r* = 0,886; $r^2$ = 0,785.

2. *y*= 0,446*x*+3,357;
*r* = 0,932.

3. $y = 0{,}87x + 67{,}5$

4. $y = 0{,}7454x - 5{,}362$

5. $y = -1{,}5875x^2 + 54{,}414x - 366{,}08$,
$R^2 = 0{,}8999$;
$x = 0{,}0014y^2 - 0{,}0879y + 11{,}56$, $R^2 = 0{,}9011$.

6. *y*=0,7614 *x* + 14,01;
*r* = 0,744; $r^2$ = 0,553.

Приложение 1

Значения функций

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{и} \quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt.$$

| $x$ | $\varphi(x)$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,3989 | 0,0000 | 0,40 | 0,3683 | 0,1554 | 0,80 | 0,2897 | 0,2881 |
| 01 | 3989 | 0040 | 41 | 3668 | 1591 | 81 | 2874 | 2910 |
| 02 | 3989 | 0080 | 42 | 3652 | 1628 | 82 | 2850 | 2939 |
| 03 | 3988 | 0120 | 43 | 3637 | 1664 | 83 | 2827 | 2967 |
| 04 | 3986 | 0160 | 44 | 3621 | 1700 | 84 | 2803 | 2995 |
| 05 | 3984 | 0199 | 45 | 3605 | 1736 | 85 | 2780 | 3023 |
| 06 | 3982 | 0239 | 46 | 3589 | 1772 | 86 | 2756 | 3051 |
| 07 | 3980 | 0279 | 47 | 3572 | 1808 | 87 | 2732 | 3078 |
| 08 | 3977 | 0319 | 48 | 3555 | 1844 | 88 | 2709 | 3106 |
| 09 | 3973 | 0359 | 49 | 3538 | 1879 | 89 | 2685 | 3133 |
| 0,10 | 0,3970 | 0,0398 | 0,50 | 0,3521 | 0,1915 | 0,90 | 0,2661 | 0,3159 |
| 11 | 3965 | 0438 | 51 | 3503 | 1950 | 91 | 2637 | 3186 |
| 12 | 3961 | 0478 | 52 | 3485 | 1985 | 92 | 2613 | 3212 |
| 13 | 3956 | 0517 | 53 | 3467 | 2019 | 93 | 2589 | 3238 |
| 14 | 3951 | 0557 | 54 | 3448 | 2054 | 94 | 2565 | 3264 |
| 15 | 3945 | 0596 | 55 | 3429 | 2088 | 95 | 2541 | 3289 |
| 16 | 3939 | 0636 | 56 | 3410 | 2123 | 96 | 2516 | 3315 |
| 17 | 3932 | 0675 | 57 | 3391 | 2157 | 97 | 2492 | 3340 |
| 18 | 3925 | 0714 | 58 | 3372 | 2190 | 98 | 2468 | 3365 |
| 19 | 3918 | 0753 | 59 | 3352 | 2224 | 99 | 2444 | 3389 |
| 0,20 | 0,3910 | 0,0793 | 0,60 | 0,3332 | 0,2257 | 1,00 | 0,2420 | 0,3413 |
| 21 | 3902 | 0832 | 61 | 3312 | 2291 | 01 | 2396 | 3438 |
| 22 | 3894 | 0871 | 62 | 3292 | 2324 | 02 | 2371 | 3461 |
| 23 | 3885 | 0910 | 63 | 3271 | 2357 | 03 | 2347 | 3485 |
| 24 | 3876 | 0948 | 64 | 3251 | 2389 | 04 | 2323 | 3508 |
| 25 | 3867 | 0987 | 65 | 3230 | 2422 | 05 | 2299 | 3531 |
| 26 | 3857 | 1026 | 66 | 3209 | 2454 | 06 | 2275 | 3554 |
| 27 | 3847 | 1064 | 67 | 3187 | 2486 | 07 | 2251 | 3577 |
| 28 | 3836 | 1103 | 68 | 3166 | 2517 | 08 | 2227 | 3599 |
| 29 | 3825 | 1141 | 69 | 3144 | 2549 | 09 | 2203 | 3621 |
| 0,30 | 0,3814 | 0,1179 | 0,70 | 0,3123 | 0,2580 | 1,10 | 0,2179 | 0,3643 |
| 31 | 3802 | 1217 | 71 | 3101 | 2611 | 11 | 2155 | 3665 |
| 32 | 3790 | 1255 | 72 | 3079 | 2642 | 12 | 2131 | 3686 |
| 33 | 3778 | 1293 | 73 | 3056 | 2673 | 13 | 2107 | 3708 |
| 34 | 3765 | 1331 | 74 | 3034 | 2703 | 14 | 2083 | 3729 |
| 35 | 3752 | 1368 | 75 | 3011 | 2734 | 15 | 2059 | 3749 |
| 36 | 3739 | 1406 | 76 | 2989 | 2764 | 16 | 2036 | 3770 |
| 37 | 3726 | 1443 | 77 | 2966 | 2794 | 17 | 2012 | 3790 |
| 38 | 3712 | 1480 | 78 | 2943 | 2823 | 18 | 1989 | 3810 |
| 39 | 3697 | 1517 | 79 | 2920 | 2852 | 19 | 1965 | 3830 |

| $x$ | $\varphi(x)$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,20 | 0,1942 | 0,3849 | 1,70 | 0,0940 | 0,4554 | 2,40 | 0,0224 | 0,4918 |
| 21 | 1919 | 3869 | 71 | 0925 | 4564 | 42 | 0213 | 4922 |
| 22 | 1895 | 3883 | 72 | 0909 | 4573 | 44 | 0203 | 4927 |
| 23 | 1872 | 3907 | 73 | 0893 | 4582 | 46 | 0194 | 4931 |
| 24 | 1849 | 3925 | 74 | 0878 | 4591 | 48 | 0184 | 4934 |
| 25 | 1826 | 3944 | 75 | 0863 | 4599 | 50 | 0175 | 4938 |
| 26 | 1804 | 3962 | 76 | 0848 | 4608 | 52 | 0167 | 4941 |
| 27 | 1781 | 3980 | 77 | 0833 | 4616 | 54 | 0158 | 4945 |
| 28 | 1758 | 3997 | 78 | 0818 | 4625 | 56 | 0151 | 4948 |
| 29 | 1736 | 4015 | 79 | 0804 | 4633 | 58 | 0143 | 4951 |
| 1,30 | 0,1714 | 0,4032 | 1,80 | 0,0790 | 0,4641 | 2,60 | 0,0136 | 0,4953 |
| 31 | 1691 | 4049 | 81 | 0775 | 4649 | 62 | 0129 | 4956 |
| 32 | 1669 | 4066 | 82 | 0761 | 4656 | 64 | 0122 | 4959 |
| 33 | 1647 | 4082 | 83 | 0748 | 4664 | 66 | 0116 | 4961 |
| 34 | 1626 | 4099 | 84 | 0734 | 4671 | 68 | 0110 | 4963 |
| 35 | 1604 | 4115 | 85 | 0721 | 4678 | 70 | 0104 | 4965 |
| 36 | 1582 | 4131 | 86 | 0707 | 4686 | 72 | 0099 | 4967 |
| 37 | 1561 | 4147 | 87 | 0694 | 4693 | 74 | 0093 | 4969 |
| 38 | 1539 | 4162 | 88 | 0681 | 4699 | 76 | 0088 | 4971 |
| 39 | 1518 | 4177 | 89 | 0669 | 4706 | 78 | 0084 | 4973 |
| 1,40 | 0,1497 | 0,4192 | 1,90 | 0,0656 | 0,4713 | 2,80 | 0,0079 | 0,4974 |
| 41 | 1476 | 4207 | 91 | 0644 | 4719 | 82 | 0075 | 4976 |
| 42 | 1456 | 4222 | 92 | 0632 | 4726 | 84 | 0071 | 4977 |
| 43 | 1435 | 4236 | 93 | 0620 | 4732 | 86 | 0067 | 4979 |
| 44 | 1415 | 4251 | 94 | 0608 | 4738 | 88 | 0063 | 4980 |
| 45 | 1394 | 4265 | 95 | 0596 | 4744 | 90 | 0060 | 4981 |
| 46 | 1374 | 4279 | 96 | 0584 | 4750 | 92 | 0056 | 4982 |
| 47 | 1354 | 4292 | 97 | 0573 | 4756 | 94 | 0053 | 4984 |
| 48 | 1334 | 4306 | 98 | 0562 | 4761 | 96 | 0050 | 4985 |
| 49 | 1315 | 4319 | 99 | 0551 | 4767 | 98 | 0047 | 4986 |
| 1,50 | 0,1295 | 0,4332 | 2,00 | 0,0540 | 0,4772 | 3,00 | 0,00443 | 0,49865 |
| 51 | 1276 | 4345 | 02 | 0519 | 4783 | | | |
| 52 | 1257 | 4357 | 04 | 0498 | 4793 | 3,10 | 00327 | 49903 |
| 53 | 1238 | 4370 | 06 | 0478 | 4803 | 3,20 | 00238 | 49931 |
| 54 | 1219 | 4382 | 08 | 0459 | 4812 | | | |
| 55 | 1200 | 4394 | 10 | 0440 | 4821 | 3,30 | 00172 | 49952 |
| 56 | 1182 | 4406 | 12 | 0422 | 4830 | 3,40 | 00123 | 49966 |
| 57 | 1163 | 4418 | 14 | 0404 | 4838 | | | |
| 58 | 1145 | 4429 | 16 | 0387 | 4846 | 3,50 | 00087 | 49977 |
| 59 | 1127 | 4441 | 18 | 0371 | 4854 | | | |
| 1,60 | 0,1109 | 0,4452 | 2,20 | 0,0355 | 0,4861 | 3,60 | 00061 | 499841 |
| 61 | 1092 | 4463 | 22 | 0339 | 4868 | 3,70 | 00042 | 49989 |
| 62 | 1074 | 4474 | 24 | 0325 | 4875 | 3,80 | 00029 | 499928 |
| 63 | 1057 | 4484 | 26 | 0310 | 4881 | | | |
| 64 | 1040 | 4495 | 28 | 0297 | 4887 | 3,90 | 00020 | 49995 |
| 65 | 1023 | 4505 | 30 | 0283 | 4893 | 4,00 | 0,0001338 | 499968 |
| 66 | 1006 | 4515 | 32 | 0270 | 4898 | | | |
| 67 | 0989 | 4525 | 34 | 0258 | 4904 | 4,50 | 0000160 | 499997 |
| 68 | 0973 | 4535 | 36 | 0246 | 4909 | 5,00 | 0000015 | 49999997 |
| 69 | 0957 | 4545 | 38 | 0235 | 4913 | | | |

Приложение 2

Критические точки $\chi^2$ -распределения Пирсона

| $\alpha$ / $\nu$ | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,642 | 2,706 | 3,841 | 5,412 | 6,635 | 10,827 |
| 2 | 3,219 | 4,605 | 5,991 | 7,824 | 9,210 | 13,815 |
| 3 | 4,642 | 6,251 | 7,815 | 9,837 | 11,345 | 16,266 |
| 4 | 5,989 | 7,779 | 9,488 | 11,668 | 13,277 | 18,467 |
| 5 | 7,289 | 9,236 | 11,070 | 13,388 | 15,086 | 20,515 |
| 6 | 8,558 | 10,645 | 12,592 | 15,033 | 16,812 | 22,457 |
| 7 | 9,803 | 12,017 | 14,067 | 16,622 | 18,475 | 24,322 |
| 8 | 11,030 | 13,362 | 15,507 | 18,168 | 20,090 | 26,125 |
| 9 | 12,242 | 14,684 | 16,919 | 19.679 | 21,666 | 27,877 |
| 10 | 13,442 | 15,987 | 18,307 | 21,161 | 23,209 | 29,588 |
| 11 | 14,631 | 17,275 | 19,675 | 22,618 | 24,725 | 31,264 |
| 12 | 15,812 | 18,549 | 21,026 | 24,054 | 26,217 | 32,909 |
| 13 | 16,985 | 19,812 | 22,362 | 25,472 | 27,688 | 34,528 |
| 14 | 18,151 | 21,064 | 23,685 | 26,783 | 29,141 | 36,123 |
| 15 | 19,311 | 22,307 | 24,996 | 28,259 | 30,578 | 37,697 |
| 16 | 20,465 | 23,542 | 26,296 | 29,633 | 32,000 | 39,252 |
| 17 | 21,615 | 24,769 | 27,587 | 30,995 | 33,409 | 40,790 |
| 18 | 22,760 | 25,989 | 28,869 | 32,346 | 34,805 | 42,312 |
| 19 | 23,900 | 27,204 | 30,144 | 33,687 | 36,191 | 43,820 |
| 20 | 25,038 | 28,412 | 31,410 | 35,020 | 37,566 | 45.315 |
| 21 | 26,171 | 29,615 | 32,671 | 36,343 | 38,932 | 46,797 |
| 22 | 27,301 | 30,813 | 33,924 | 37,659 | 40,289 | 48,268 |
| 23 | 28,429 | 32,007 | 35,172 | 38,968 | 41,638 | 49,728 |
| 24 | 29,553 | 33,196 | 36,415 | 40,270 | 42,980 | 51,179 |
| 25 | 30,675 | 34,382 | 37,652 | 41,566 | 44,314 | 52,620 |
| 26 | 31,795 | 35,563 | 38,885 | 42,856 | 45,642 | 54,052 |
| 27 | 32,912 | 36,741 | 40,113 | 44,140 | 46,963 | 55,476 |
| 28 | 34,027 | 37,916 | 41,337 | 45,419 | 48,278 | 56,893 |
| 29 | 35,139 | 39,087 | 42,557 | 46,693 | 49,588 | 58,302 |
| 30 | 36,250 | 40,256 | 43,773 | 47,962 | 50,892 | 59,703 |

*Приложение 3*

*Критические точки* t - *распределения Стьюдента*

| Число степеней свободы *k* | Уровень значимости α (двусторонняя критическая область) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,002 | 0,001 |
| 1 | 6,31 | 12,71 | 31,82 | 63,66 | 318,31 | 636,62 |
| 2 | 2,92 | 4,30 | 6,97 | 9,93 | 22,33 | 31,60 |
| 3 | 2,35 | 3,18 | 4,54 | 5,84 | 10,22 | 12,92 |
| 4 | 2,13 | 2,78 | 3,75 | 4,60 | 7,17 | 8,61 |
| 5 | 2,01 | 2,57 | 3,37 | 4,03 | 5,89 | 6,87 |
| 6 | 1,94 | 2,45 | 3,14 | 3,71 | 5,21 | 5,96 |
| 7 | 1,90 | 2,37 | 3,00 | 3,50 | 4,79 | 5,41 |
| 8 | 1,86 | 2,31 | 2,90 | 3,36 | 4,50 | 5,04 |
| 9 | 1,83 | 2,26 | 2,82 | 3,25 | 4,30 | 4,78 |
| 10 | 1,81 | 2,23 | 2,76 | 3,17 | 4,14 | 4,59 |
| 11 | 1,80 | 2,20 | 2,72 | 3,11 | 4,03 | 4,44 |
| 12 | 1,78 | 2,18 | 2,68 | 3,06 | 3,93 | 4,32 |
| 13 | 1,77 | 2,16 | 2,65 | 3,01 | 3,85 | 4,22 |
| 14 | 1,76 | 2,15 | 2,62 | 2,98 | 3,79 | 4,14 |
| 15 | 1,75 | 2,13 | 2,60 | 2,95 | 3,73 | 4,07 |
| 16 | 1,75 | 2,12 | 2,58 | 2,92 | 3,69 | 4,02 |
| 17 | 1,74 | 2,11 | 2,57 | 2,90 | 3,65 | 3,97 |
| 18 | 1,73 | 2,10 | 2,55 | 2,88 | 3,61 | 3,92 |
| 19 | 1,73 | 2,09 | 2,54 | 2,86 | 3,58 | 3,88 |
| 20 | 1,73 | 2,09 | 2,53 | 2,85 | 3,55 | 3,85 |
| 21 | 1,72 | 2,08 | 2,52 | 2,83 | 3,53 | 3,82 |
| 22 | 1,72 | 2,07 | 2,51 | 2,82 | 3,51 | 3,79 |
| 23 | 1,71 | 2,07 | 2,50 | 2,81 | 3,49 | 3,77 |
| 24 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,80 | 3,47 | 3,75 |
| 25 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,79 | 3,45 | 3,73 |
| 26 | 1,71 | 2,06 | 2,48 | 2,78 | 3,44 | 3,71 |
| 27 | 1,70 | 2,05 | 2,47 | 2,77 | 3,42 | 3,69 |
| 28 | 1,70 | 2,05 | 2,47 | 2,76 | 3,41 | 3,67 |
| 29 | 1,70 | 2,05 | 2,46 | 2,76 | 3,40 | 3,66 |
| 30 | 1,70 | 2,04 | 2,46 | 2,75 | 3,39 | 3,65 |
| 40 | 1,68 | 2,02 | 2,42 | 2,70 | 3,31 | 3,55 |
| 60 | 1,67 | 2,00 | 2,39 | 2,66 | 3,23 | 3,46 |
| 120 | 1,66 | 1,98 | 2,36 | 2,62 | 3,16 | 3,37 |
| $\infty$ | 1,65 | 1,96 | 2,33 | 2,58 | 3,09 | 3,29 |
| | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 | 0,001 | 0,0005 |
| | Уровень значимости α (односторонняя критическая область) | | | | | |

Приложение 4

Критические точки распределения $F$ Фишера – Снедекора

($k_1$ – число степеней свободы большей дисперсии, $k_2$ – число степеней свободы меньшей дисперсии), уровень значимости $\alpha$=0,05

| $k_2$ \ $k_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 16 | 20 | 24 | 30 | 50 | 100 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 | 244 | 246 | 248 | 249 | 250 | 252 | 253 | 254 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,36 | 19,37 | 19,38 | 19,39 | 19,41 | 19,43 | 19,44 | 19,45 | 19,46 | 19,47 | 19,49 | 19,50 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,88 | 8,84 | 8,81 | 8,78 | 8,74 | 8,69 | 8,66 | 8,64 | 8,62 | 8,58 | 8,56 | 8,53 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,91 | 5,84 | 5,80 | 5,77 | 5,74 | 5,70 | 5,66 | 5,63 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,78 | 4,74 | 4,68 | 4,60 | 4,56 | 4,53 | 4,50 | 4,44 | 4,40 | 4,36 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 | 4,00 | 3,92 | 3,87 | 3,84 | 3,81 | 3,75 | 3,71 | 3,67 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,63 | 3,57 | 3,49 | 3,44 | 3,41 | 3,38 | 3,32 | 3,28 | 3,23 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,34 | 3,28 | 3,20 | 3,15 | 3,12 | 3,08 | 3,03 | 2,98 | 2,93 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,13 | 3,07 | 2,98 | 2,93 | 2,90 | 2,86 | 2,80 | 2,76 | 2,71 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,97 | 2,91 | 2,82 | 2,77 | 2,74 | 2,70 | 2,64 | 2,59 | 2,54 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,86 | 2,79 | 2,70 | 2,65 | 2,61 | 2,57 | 2,50 | 2,45 | 2,40 |
| 12 | 4,75 | 3,88 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,92 | 2,85 | 2,80 | 2,76 | 2,69 | 2,60 | 2,54 | 2,50 | 2,46 | 2,40 | 2,35 | 2,30 |
| 13 | 4,67 | 3,80 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,92 | 2,84 | 2,77 | 2,72 | 2,67 | 2,60 | 2,51 | 2,46 | 2,42 | 2,38 | 2,32 | 2,26 | 2,21 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,77 | 2,70 | 2,65 | 2,60 | 2,53 | 2,44 | 2,39 | 2,35 | 2,31 | 2,24 | 2,19 | 2,13 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,70 | 2,64 | 2,59 | 2,55 | 2,48 | 2,39 | 2,33 | 2,29 | 2,25 | 2,18 | 2,12 | 2,67 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 | 2,42 | 2,33 | 2,28 | 2,24 | 2,20 | 2,13 | 2,07 | 2,01 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,62 | 2,55 | 2,50 | 2,45 | 2,38 | 2,29 | 2,23 | 2,19 | 2,15 | 2,08 | 2,02 | 1,96 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,51 | 2,46 | 2,41 | 2,34 | 2,25 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,04 | 1,98 | 1,92 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,55 | 2,48 | 2,43 | 2,38 | 2,31 | 2,21 | 2,15 | 2.11 | 2,07 | 2,00 | 1,94 | 1,88 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,52 | 2,45 | 2,40 | 2,35 | 2,28 | 2,18 | 2,12 | 2,08 | 2,04 | 1,96 | 1,90 | 1,84 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,47 | 2,40 | 2,35 | 2,30 | 2,23 | 2,13 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,91 | 1,84 | 1,78 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,43 | 2,36 | 2,30 | 2,26 | 2,18 | 2,09 | 2,02 | 1,98 | 1,94 | 1,86 | 1,80 | 1,73 |
| 26 | 4,22 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,39 | 2,32 | 2,27 | 2,22 | 2,15 | 2,05 | 1,99 | 1,95 | 1,90 | 1,82 | 1,76 | 1,69 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,44 | 2,36 | 2,29 | 2,24 | 2,19 | 2,12 | 2,02 | 1,96 | 1,91 | 1,87 | 1,78 | 1,72 | 1,65 |
| 32 | 4,15 | 3,30 | 2,90 | 2,67 | 2,51 | 2,40 | 2,32 | 2,25 | 2,19 | 2,14 | 2,07 | 1,97 | 1,91 | 1,86 | 1,82 | 1,74 | 1,67 | 1,59 |
| 36 | 4,11 | 3,26 | 2,86 | 2.63 | 2,48 | 2,36 | 2,28 | 2,21 | 2,15 | 2,10 | 2,03 | 1,93 | 1,87 | 1,82 | 1,78 | 1,69 | 1,62 | 1,55 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,25 | 2,18 | 2,12 | 2,07 | 2,00 | 1,90 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,66 | 1,59 | 1,51 |
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2.76 | 2,52 | 2,37 | 2,25 | 2,17 | 2,10 | 2,04 | 1,99 | 1,92 | 1,81 | 1,75 | 1,70 | 1,65 | 1,56 | 1,48 | 1,39 |
| 100 | 3,94 | 3,09 | 2,70 | 2,46 | 2,30 | 2,19 | 2,10 | 2,03 | 1,97 | 1,92 | 1,85 | 1,75 | 1,68 | 1,63 | 1,57 | 1,48 | 1,39 | 1,28 |
| 200 | 3,89 | 3,04 | 2,65 | 2,41 | 2.26 | 2,14 | 2,05 | 1,98 | 1,92 | 1,87 | 1,80 | 1,69 | 1,62 | 1,57 | 1,52 | 1,42 | 1,32 | 1,19 |
| ∞ | 3,84 | 2,99 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,09 | 2,01 | 1,94 | 1,88 | 1,83 | 1,75 | 1,64 | 1,57 | 1,52 | 1,46 | 1,35 | 1,24 | 1,00 |

Приложение 5

Исходные данные к контрольным заданиям

| 1 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № варианта | *n1* | *n2* | *n3* | *p1* | *p2* | *p3* | *k* |
| 1 | 1 | 4 | 5 | 0,8 | 0,6 | 0,5 | 3 |
| 2 | 2 | 5 | 3 | 0,7 | 0,8 | 0,6 | 4 |
| 3 | 4 | 3 | 2 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 5 |
| 4 | 6 | 2 | 2 | 0,5 | 0,4 | 0,8 | 6 |
| 5 | 3 | 5 | 2 | 0,7 | 0,9 | 0,4 | 5 |
| 6 | 1 | 2 | 7 | 0,8 | 0,3 | 0,5 | 4 |
| 7 | 2 | 3 | 5 | 0,4 | 0,8 | 0,4 | 7 |
| 8 | 3 | 1 | 6 | 0,5 | 0,8 | 0,7 | 6 |
| 9 | 1 | 3 | 6 | 0,7 | 0,4 | 0,4 | 5 |
| 10 | 2 | 7 | 1 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 7 |
| 11 | 4 | 2 | 6 | 0,5 | 0,6 | 0,5 | 3 |
| 12 | 9 | 9 | 10 | 0,2 | 0,8 | 0,7 | 7 |
| 13 | 1 | 5 | 9 | 0,3 | 0,3 | 0,6 | 6 |
| 14 | 2 | 3 | 1 | 0,6 | 0,8 | 0,5 | 4 |
| 15 | 1 | 2 | 3 | 0,6 | 0,8 | 0,4 | 6 |
| 16 | 1 | 4 | 4 | 0,8 | 0,1 | 0,8 | 3 |
| 17 | 6 | 4 | 4 | 0,3 | 0,8 | 0,3 | 4 |
| 18 | 4 | 9 | 5 | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 5 |
| 19 | 5 | 4 | 10 | 0,4 | 0,5 | 0,5 | 8 |
| 20 | 8 | 10 | 3 | 0,8 | 0,9 | 0,3 | 3 |
| 21 | 10 | 1 | 7 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 7 |
| 22 | 8 | 10 | 5 | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 9 |
| 23 | 4 | 8 | 4 | 0,7 | 0,6 | 0,4 | 6 |
| 24 | 8 | 2 | 3 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 7 |
| 25 | 2 | 4 | 5 | 0,2 | 0,6 | 0,8 | 7 |
| 26 | 6 | 4 | 10 | 0,6 | 0,3 | 0,3 | 7 |
| 27 | 1 | 3 | 1 | 0,5 | 0,2 | 0,3 | 6 |
| 28 | 9 | 2 | 3 | 0,9 | 0,4 | 0,8 | 3 |
| 29 | 8 | 7 | 8 | 0,2 | 0,2 | 0,9 | 3 |
| 30 | 8 | 2 | 2 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 4 |
| 31 | 8 | 7 | 3 | 0,4 | 0,5 | 0,3 | 9 |

Продолжение приложения 5

| № | 2 | 3 | | | | | | | | 4 | | | | 5 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *N* | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $n_4$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | *n* | *l* | *m* | *k* | *k* | *n* | *k* |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 1 | 2 | 3 | 10 | 2 | 4 | 6 | 6 | 4 | 4 |
| 2 | 4 | 2 | 2 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 10 | 2 | 3 | 6 | 7 | 4 | 5 |
| 3 | 5 | 2 | 3 | 4 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 10 | 3 | 5 | 7 | 8 | 5 | 6 |
| 4 | 6 | 1 | 4 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 10 | 3 | 5 | 6 | 9 | 5 | 5 |
| 5 | 7 | 4 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 11 | 2 | 5 | 7 | 10 | 6 | 6 |
| 6 | 8 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 11 | 3 | 4 | 8 | 11 | 4 | 7 |
| 7 | 9 | 5 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 11 | 3 | 5 | 7 | 12 | 4 | 6 |
| 8 | 10 | 2 | 5 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 12 | 3 | 8 | 5 | 13 | 3 | 7 |
| 9 | 3 | 4 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 12 | 2 | 8 | 3 | 14 | 3 | 8 |
| 10 | 4 | 3 | 3 | 4 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 12 | 2 | 5 | 4 | 13 | 4 | 7 |
| 11 | 5 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 9 | 2 | 4 | 6 | 12 | 3 | 8 |
| 12 | 6 | 1 | 3 | 4 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 9 | 3 | 5 | 6 | 11 | 3 | 5 |
| 13 | 7 | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 9 | 2 | 3 | 7 | 10 | 4 | 6 |
| 14 | 8 | 1 | 2 | 3 | 5 | 1 | 1 | 2 | 3 | 8 | 2 | 4 | 5 | 9 | 4 | 7 |
| 15 | 9 | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 8 | 2 | 5 | 4 | 8 | 3 | 8 |
| 16 | 10 | 3 | 2 | 2 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 8 | 3 | 4 | 5 | 7 | 3 | 9 |
| 17 | 11 | 4 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 10 | 4 | 6 | 5 | 6 | 4 | 8 |
| 18 | 12 | 3 | 3 | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 10 | 5 | 7 | 7 | 7 | 4 | 7 |
| 19 | 13 | 2 | 4 | 5 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 10 | 4 | 6 | 7 | 8 | 5 | 6 |
| 20 | 14 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 12 | 4 | 8 | 6 | 9 | 5 | 5 |
| 21 | 15 | 2 | 5 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 8 | 2 | 3 | 4 | 10 | 6 | 4 |
| 22 | 16 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 8 | 2 | 3 | 5 | 11 | 4 | 4 |
| 23 | 17 | 2 | 7 | 2 | 1 | 1 | 5 | 2 | 1 | 8 | 2 | 4 | 3 | 12 | 4 | 5 |
| 24 | 18 | 3 | 1 | 6 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 8 | 3 | 5 | 4 | 13 | 3 | 6 |
| 25 | 19 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 8 | 1 | 4 | 2 | 14 | 3 | 7 |
| 26 | 20 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 9 | 2 | 3 | 5 | 12 | 3 | 8 |
| 27 | 3 | 1 | 4 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 9 | 3 | 4 | 4 | 11 | 3 | 9 |
| 28 | 4 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 0 | 1 | 9 | 2 | 6 | 3 | 10 | 4 | 10 |
| 29 | 5 | 3 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 1 | 2 | 9 | 4 | 5 | 5 | 9 | 4 | 9 |
| 30 | 6 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 9 | 3 | 5 | 4 | 8 | 3 | 8 |
| 31 | 8 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 0 | 2 | 9 | 2 | 3 | 6 | 7 | 3 | 7 |

Продолжение приложения 5

| № | 7 | | | 8 | | | 9 | | 10 | | | | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $T_1$ | $T_2$ | $t$ | $R$ | $S_1$ | $S_2$ | $k_1$ | $k_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $n_1$ | $n_2$ | $k$ |
| 1 | 900 | 1000 | 10 | 11 | 2,25 | 3,52 | 71 | 47 | 0,61 | 0,55 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 900 | 1100 | 20 | 12 | 2,37 | 3,52 | 78 | 39 | 0,62 | 0,54 | 3 | 2 | 5 |
| 3 | 1000 | 1100 | 10 | 13 | 2,49 | 3,52 | 87 | 31 | 0,63 | 0,53 | 2 | 3 | 6 |
| 4 | 1000 | 1200 | 20 | 14 | 2,55 | 1,57 | 72 | 46 | 0,64 | 0,52 | 3 | 2 | 7 |
| 5 | 1100 | 1200 | 15 | 11 | 2,27 | 5,57 | 79 | 38 | 0,65 | 0,51 | 2 | 3 | 8 |
| 6 | 1100 | 1300 | 15 | 12 | 2,39 | 5,57 | 86 | 32 | 0,66 | 0,49 | 3 | 2 | 9 |
| 7 | 900 | 930 | 10 | 13 | 2,51 | 1,57 | 73 | 45 | 0,67 | 0,48 | 2 | 3 | 10 |
| 8 | 900 | 1130 | 20 | 14 | 2,57 | 3,52 | 81 | 37 | 0,68 | 0,47 | 3 | 2 | 11 |
| 9 | 1000 | 1030 | 15 | 11 | 2,29 | 3,52 | 85 | 33 | 0,69 | 0,46 | 2 | 3 | 4 |
| 10 | 1000 | 1130 | 15 | 12 | 2,41 | 3,52 | 74 | 44 | 0,71 | 0,45 | 3 | 2 | 5 |
| 11 | 1100 | 1130 | 5 | 13 | 2,53 | 3,52 | 82 | 36 | 0,72 | 0,44 | 2 | 3 | 6 |
| 12 | 1100 | 1230 | 5 | 14 | 2,59 | 5,57 | 84 | 34 | 0,73 | 0,43 | 3 | 2 | 7 |
| 13 | 1200 | 1300 | 5 | 15 | 2,5 | 8,7 | 75 | 43 | 0,74 | 0,42 | 2 | 3 | 8 |
| 14 | 1200 | 1230 | 10 | 16 | 2,6 | 8,5 | 83 | 35 | 0,75 | 0,41 | 3 | 2 | 9 |
| 15 | 1200 | 1330 | 5 | 11 | 2,2 | 3,5 | 76 | 42 | 0,76 | 0,39 | 2 | 3 | 10 |
| 16 | 1300 | 1400 | 10 | 12 | 2,4 | 3,5 | 77 | 41 | 0,77 | 0,38 | 3 | 2 | 12 |
| 17 | 1800 | 1900 | 10 | 13 | 2,5 | 3,5 | 47 | 71 | 0,78 | 0,37 | 2 | 3 | 5 |
| 18 | 1800 | 2000 | 20 | 14 | 2,6 | 1,8 | 39 | 78 | 0,39 | 0,45 | 3 | 2 | 6 |
| 19 | 1700 | 1800 | 10 | 15 | 2,7 | 7,9 | 31 | 87 | 0,38 | 0,46 | 2 | 3 | 7 |
| 20 | 1700 | 1900 | 20 | 16 | 2,7 | 8,2 | 72 | 46 | 0,37 | 0,47 | 3 | 2 | 8 |
| 21 | 1900 | 2000 | 15 | 11 | 2,3 | 3,5 | 38 | 79 | 0,36 | 0,48 | 2 | 3 | 9 |
| 22 | 1900 | 2100 | 15 | 12 | 2,4 | 3,5 | 32 | 86 | 0,35 | 0,49 | 3 | 2 | 10 |
| 23 | 1700 | 1730 | 10 | 13 | 2,5 | 3,5 | 73 | 45 | 0,34 | 0,51 | 2 | 3 | 11 |
| 24 | 1700 | 1830 | 20 | 14 | 2,6 | 5,6 | 81 | 37 | 0,33 | 0,52 | 3 | 2 | 4 |
| 25 | 1600 | 1630 | 15 | 15 | 2,5 | 8,7 | 33 | 85 | 0,32 | 0,53 | 2 | 3 | 5 |
| 26 | 1600 | 1730 | 15 | 11 | 2,3 | 5,6 | 44 | 74 | 0,31 | 0,54 | 3 | 2 | 6 |
| 27 | 1700 | 1730 | 5 | 12 | 2,4 | 5,6 | 36 | 82 | 0,29 | 0,55 | 2 | 3 | 7 |
| 28 | 1700 | 1830 | 5 | 13 | 2,5 | 3,5 | 84 | 34 | 0,28 | 0,56 | 3 | 2 | 8 |
| 29 | 1600 | 1700 | 5 | 14 | 2,6 | 5,6 | 75 | 43 | 0,27 | 0,57 | 2 | 3 | 9 |
| 30 | 1600 | 1630 | 10 | 15 | 2,7 | 7,9 | 83 | 35 | 0,26 | 0,58 | 3 | 2 | 10 |
| 31 | 1600 | 1730 | 5 | 12 | 2,25 | 3,52 | 76 | 42 | 0,25 | 0,59 | 2 | 3 | 11 |

Продолжение приложения 5

| № | 12 | 13 | | 14 | | | | | 15 | | | | 16 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $M$ | $n_1$ | $n_2$ | $N_1$ | $M_1$ | $N_2$ | $M_2$ | $K$ | $k$ | $l$ | $m$ | $n$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $j$ |
| 1 | 12 | 100 | 250 | 4 | 1 | 2 | 5 | 3 | 8 | 10 | 3 | 2 | 50 | 30 | 20 | 70 | 80 | 90 | 1 |
| 2 | 8 | 430 | 180 | 7 | 3 | 5 | 1 | 4 | 7 | 6 | 2 | 3 | 50 | 30 | 20 | 70 | 80 | 90 | 2 |
| 3 | 5 | 170 | 540 | 2 | 3 | 5 | 4 | 1 | 6 | 8 | 3 | 1 | 50 | 30 | 20 | 70 | 80 | 90 | 3 |
| 4 | 11 | 520 | 390 | 8 | 2 | 3 | 2 | 5 | 12 | 5 | 3 | 2 | 60 | 20 | 20 | 70 | 80 | 90 | 1 |
| 5 | 7 | 360 | 600 | 6 | 4 | 1 | 7 | 2 | 13 | 11 | 2 | 4 | 60 | 20 | 20 | 70 | 80 | 90 | 2 |
| 6 | 10 | 700 | 90 | 3 | 2 | 4 | 4 | 2 | 11 | 8 | 2 | 5 | 60 | 20 | 20 | 70 | 80 | 90 | 3 |
| 7 | 6 | 240 | 610 | 5 | 5 | 4 | 10 | 4 | 12 | 7 | 2 | 4 | 40 | 30 | 30 | 80 | 80 | 90 | 1 |
| 8 | 9 | 80 | 710 | 13 | 12 | 4 | 6 | 3 | 9 | 6 | 2 | 3 | 40 | 30 | 30 | 80 | 80 | 90 | 2 |
| 9 | 3 | 630 | 230 | 1 | 9 | 3 | 3 | 4 | 10 | 7 | 4 | 1 | 40 | 30 | 30 | 80 | 80 | 90 | 3 |
| 10 | 8 | 500 | 320 | 3 | 7 | 5 | 2 | 3 | 11 | 7 | 4 | 4 | 40 | 20 | 40 | 90 | 90 | 80 | 1 |
| 11 | 5 | 810 | 70 | 4 | 6 | 7 | 8 | 5 | 13 | 8 | 5 | 2 | 40 | 20 | 40 | 90 | 90 | 80 | 2 |
| 12 | 10 | 450 | 280 | 2 | 3 | 7 | 1 | 2 | 8 | 7 | 3 | 3 | 40 | 20 | 40 | 90 | 90 | 80 | 3 |
| 13 | 10 | 270 | 640 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 12 | 10 | 4 | 2 | 70 | 20 | 10 | 70 | 80 | 90 | 1 |
| 14 | 9 | 380 | 470 | 2 | 8 | 3 | 1 | 3 | 9 | 6 | 1 | 3 | 70 | 20 | 10 | 70 | 80 | 90 | 2 |
| 15 | 4 | 640 | 80 | 6 | 4 | 3 | 3 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2 | 70 | 20 | 10 | 70 | 80 | 80 | 3 |
| 16 | 7 | 160 | 570 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 14 | 13 | 3 | 3 | 60 | 10 | 30 | 80 | 90 | 80 | 1 |
| 17 | 5 | 590 | 200 | 25 | 3 | 25 | 2 | 2 | 11 | 10 | 4 | 5 | 60 | 10 | 30 | 80 | 90 | 80 | 2 |
| 18 | 8 | 620 | 190 | 20 | 1 | 40 | 7 | 3 | 7 | 5 | 2 | 2 | 60 | 10 | 30 | 80 | 90 | 80 | 3 |
| 19 | 9 | 730 | 100 | 20 | 4 | 25 | 5 | 1 | 15 | 9 | 4 | 3 | 50 | 20 | 30 | 90 | 80 | 90 | 1 |
| 20 | 6 | 540 | 200 | 50 | 8 | 20 | 6 | 2 | 8 | 10 | 3 | 3 | 50 | 20 | 30 | 90 | 80 | 90 | 2 |
| 21 | 12 | 90 | 690 | 40 | 8 | 10 | 2 | 3 | 12 | 5 | 2 | 2 | 50 | 20 | 30 | 90 | 80 | 90 | 3 |
| 22 | 8 | 220 | 550 | 25 | 2 | 20 | 4 | 1 | 14 | 11 | 3 | 5 | 30 | 30 | 40 | 70 | 70 | 80 | 1 |
| 23 | 10 | 290 | 700 | 20 | 1 | 40 | 5 | 5 | 6 | 7 | 2 | 2 | 30 | 30 | 40 | 70 | 70 | 80 | 2 |
| 24 | 7 | 350 | 440 | 25 | 2 | 25 | 6 | 4 | 13 | 9 | 4 | 4 | 30 | 30 | 40 | 70 | 70 | 80 | 3 |
| 25 | 3 | 470 | 360 | 10 | 3 | 50 | 11 | 2 | 9 | 6 | 3 | 3 | 20 | 40 | 40 | 90 | 70 | 80 | 1 |
| 26 | 6 | 680 | 230 | 20 | 1 | 20 | 4 | 1 | 11 | 10 | 2 | 5 | 20 | 40 | 40 | 90 | 70 | 80 | 2 |
| 27 | 9 | 710 | 160 | 25 | 3 | 25 | 7 | 3 | 7 | 8 | 4 | 3 | 20 | 40 | 40 | 90 | 70 | 80 | 3 |
| 28 | 4 | 180 | 270 | 40 | 5 | 50 | 8 | 2 | 12 | 11 | 5 | 4 | 10 | 50 | 40 | 70 | 90 | 80 | 1 |
| 29 | 7 | 260 | 620 | 40 | 8 | 20 | 4 | 2 | 8 | 3 | 2 | 2 | 10 | 50 | 40 | 70 | 90 | 80 | 2 |
| 30 | 5 | 650 | 140 | 25 | 3 | 40 | 2 | 4 | 6 | 6 | 1 | 2 | 10 | 50 | 40 | 70 | 90 | 80 | 3 |
| 31 | 8 | 230 | 480 | 20 | 1 | 50 | 6 | 1 | 10 | 8 | 3 | 3 | 20 | 30 | 50 | 70 | 70 | 90 | 1 |

Продолжение приложения 5

| | 17 | | 18 | | 19 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № | *n* | *m* | *p* | *n* | *n* | $n_1$ | $n_2$ | $p_1$ | $p_2$ |
| 1 | 3 | 2 | 0,3 | 10 | 15 | 1 | 2 | 0,1 | 0,2 |
| 2 | 7 | 3 | 0,3 | 14 | 15 | 2 | 1 | 0,15 | 0,15 |
| 3 | 4 | 7 | 0,3 | 13 | 15 | 2 | 2 | 0,15 | 0,15 |
| 4 | 4 | 3 | 0,3 | 12 | 15 | 1 | 1 | 0,1 | 0,15 |
| 5 | 3 | 6 | 0,3 | 11 | 15 | 3 | 2 | 0,2 | 0,25 |
| 6 | 6 | 5 | 0,3 | 15 | 15 | 2 | 2 | 0,15 | 0,2 |
| 7 | 3 | 5 | 0,4 | 11 | 15 | 3 | 1 | 0,2 | 0,15 |
| 8 | 8 | 3 | 0,4 | 13 | 15 | 1 | 2 | 0,13 | 0,17 |
| 9 | 6 | 4 | 0,4 | 14 | 15 | 2 | 1 | 0,14 | 0,16 |
| 10 | 4 | 5 | 0,4 | 10 | 15 | 1 | 3 | 0,16 | 0,24 |
| 11 | 2 | 7 | 0,4 | 12 | 15 | 3 | 2 | 0,17 | 0,23 |
| 12 | 5 | 4 | 0,4 | 15 | 15 | 3 | 1 | 0,18 | 0,12 |
| 13 | 8 | 6 | 0,5 | 12 | 15 | 4 | 1 | 0,19 | 0,11 |
| 14 | 2 | 6 | 0,4 | 12 | 15 | 3 | 3 | 0,2 | 0,26 |
| 15 | 2 | 3 | 0,5 | 11 | 14 | 1 | 3 | 0,09 | 0,21 |
| 16 | 4 | 2 | 0,5 | 13 | 14 | 1 | 4 | 0,1 | 0,21 |
| 17 | 7 | 6 | 0,5 | 14 | 14 | 2 | 2 | 0,11 | 0,2 |
| 18 | 5 | 3 | 0,5 | 15 | 14 | 2 | 4 | 0,12 | 0,2 |
| 19 | 4 | 6 | 0,6 | 13 | 14 | 3 | 3 | 0,15 | 0,2 |
| 20 | 8 | 5 | 0,6 | 11 | 14 | 2 | 3 | 0,2 | 0,2 |
| 21 | 6 | 3 | 0,6 | 12 | 14 | 3 | 4 | 0,3 | 0,2 |
| 22 | 5 | 2 | 0,6 | 10 | 14 | 2 | 3 | 0,1 | 0,2 |
| 23 | 3 | 7 | 0,6 | 15 | 14 | 3 | 4 | 0,2 | 0,25 |
| 24 | 6 | 8 | 0,6 | 14 | 14 | 5 | 4 | 0,25 | 0,35 |
| 25 | 5 | 6 | 0,7 | 14 | 14 | 4 | 4 | 0,21 | 0,39 |
| 26 | 7 | 4 | 0,7 | 10 | 14 | 4 | 3 | 0,1 | 0,3 |
| 27 | 5 | 7 | 0,5 | 11 | 14 | 2 | 2 | 0,25 | 0,35 |
| 28 | 6 | 2 | 0,6 | 12 | 14 | 1 | 2 | 0,1 | 0,15 |
| 29 | 7 | 5 | 0,7 | 12 | 14 | 1 | 1 | 0,05 | 0,15 |
| 30 | 8 | 4 | 0,7 | 13 | 14 | 1 | 2 | 0,1 | 0,1 |
| 31 | 7 | 2 | 0,3 | 13 | 14 | 2 | 2 | 0,05 | 0,05 |

Продолжение приложения 5

| № | 20 | | | 21 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *m* | *n* | *p* | *N* | *p* | $k_1$ | $k_2$ |
| 1 | 7 | 500 | 0,003 | 100 | 0,8 | 80 | 90 |
| 2 | 7 | 500 | 0,004 | 100 | 0,8 | 85 | 95 |
| 3 | 8 | 500 | 0,008 | 100 | 0,8 | 70 | 95 |
| 4 | 6 | 600 | 0,009 | 100 | 0,7 | 83 | 93 |
| 5 | 10 | 600 | 0,003 | 100 | 0,7 | 50 | 60 |
| 6 | 7 | 600 | 0,009 | 100 | 0,7 | 65 | 75 |
| 7 | 8 | 700 | 0,005 | 100 | 0,7 | 70 | 80 |
| 8 | 6 | 700 | 0,007 | 100 | 0,6 | 40 | 50 |
| 9 | 5 | 700 | 0,004 | 100 | 0,75 | 65 | 80 |
| 10 | 7 | 800 | 0,002 | 100 | 0,75 | 70 | 85 |
| 11 | 6 | 800 | 0,006 | 100 | 0,75 | 68 | 78 |
| 12 | 10 | 800 | 0,001 | 100 | 0,7 | 60 | - |
| 13 | 9 | 900 | 0,004 | 100 | 0,7 | 70 | - |
| 14 | 8 | 900 | 0,007 | 100 | 0,7 | 80 | - |
| 15 | 6 | 900 | 0,002 | 100 | 0,6 | 65 | - |
| 16 | 6 | 1000 | 0,005 | 100 | 0,6 | 75 | - |
| 17 | 8 | 1000 | 0,002 | 100 | 0,6 | 50 | - |
| 18 | 9 | 500 | 0,005 | 100 | 0,8 | 70 | - |
| 19 | 7 | 500 | 0,009 | 100 | 0,8 | 80 | - |
| 20 | 9 | 500 | 0,004 | 100 | 0,8 | 90 | - |
| 21 | 6 | 600 | 0,003 | 100 | 0,8 | 95 | - |
| 22 | 5 | 600 | 0,006 | 100 | 0,3 | - | 20 |
| 23 | 9 | 600 | 0,004 | 100 | 0,3 | - | 30 |
| 24 | 8 | 700 | 0,003 | 100 | 0,3 | - | 40 |
| 25 | 8 | 700 | 0,001 | 200 | 0,4 | - | 80 |
| 26 | 9 | 700 | 0,003 | 200 | 0,4 | - | 90 |
| 27 | 9 | 800 | 0,001 | 200 | 0,4 | - | 100 |
| 28 | 7 | 800 | 0,009 | 300 | 0,8 | - | 250 |
| 29 | 10 | 800 | 0,005 | 400 | 0,6 | - | 270 |
| 30 | 7 | 900 | 0,003 | 400 | 0,7 | - | 290 |
| 31 | 7 | 900 | 0,009 | 400 | 0,8 | - | 300 |

Приложение 6

Показатели по средним и крупным сельскохозяйственным организациям Краснодарского края

| N п/п | Валовая продукция, тыс. руб. | Выручка от реализации продукции, работ, услуг, тыс. руб. | Основные средства, тыс. руб. | Оборотные средства, тыс. руб | Численность работников, чел. | Начислено за год заработной платы, тыс. руб. | Материальные затраты, тыс. руб | Затраты на валовую продукцию, тыс. руб., тыс. руб. | Сельскохозяйственные угодья, га | Затраты на реализованную продукцию, тыс. руб. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | 790034 | 684951 | 602131 | 643541 | 449 | 118029 | 262942 | 566623 | 12239 | 451708 |
| 2 | 950778 | 644939 | 736069 | 690504 | 477 | 134976 | 340753 | 691748 | 9202 | 442123 |
| 3 | 321963 | 338485 | 193860 | 266172,5 | 134 | 38248 | 136746 | 293444 | 8628 | 293444 |
| 4 | 590983 | 400430 | 390081 | 395255,5 | 205 | 64620 | 375926 | 470451 | 6464 | 283433 |
| 5 | 610358 | 491823 | 367913 | 429868 | 292 | 78390 | 325051 | 515562 | 8188 | 394557 |
| 6 | 328275 | 257612 | 278515 | 268063,5 | 220 | 58653 | 145705 | 250760 | 5078 | 177971 |
| 7 | 1476711 | 1161049 | 1427897 | 1294473 | 751 | 199798 | 471673 | 1010903 | 20989 | 732586 |
| 8 | 62003 | 52928 | 60650 | 56789 | 54 | 6785 | 23210 | 42956 | 1324 | 34200 |
| 9 | 745489 | 617426 | 513833 | 565629,5 | 455 | 110692 | 348259 | 560045 | 7628 | 442157 |
| 10 | 297827 | 315918 | 108340 | 212129 | 184 | 45767 | 114360 | 206101 | 7910 | 255112 |
| 11 | 184982 | 159123 | 110224 | 134673,5 | 139 | 26508 | 95124 | 154125 | 2962 | 124694 |
| 12 | 682349 | 602540 | 570148 | 586344 | 501 | 97802 | 312969 | 514077 | 8909 | 433204 |
| 13 | 399002 | 345771 | 341284 | 332795 | 234 | 48132 | 126576 | 178376 | 4571 | 151552 |
| 14 | 181144 | 168587 | 125583 | 147085 | 118 | 26484 | 82713 | 146873 | 3788 | 134710 |
| 15 | 340261 | 353433 | 244116 | 298774,5 | 162 | 38439 | 96655 | 210274 | 6464 | 209274 |
| 16 | 319666 | 259264 | 296263 | 277763,5 | 199 | 34666 | 139422 | 232282 | 5091 | 191774 |
| 17 | 125544 | 86129 | 66196 | 76162,5 | 70 | 24705 | 18366 | 81281 | 1103 | 65255 |
| 18 | 66342 | 54824 | 40674 | 47749 | 53 | 8165 | 32125 | 59325 | 1888 | 51537 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 621294 | 443025 | 337674 | 390349,5 | 551 | 77307 | 370675 | 494055 | 14042 | 314053 |
| 20 | 1152571 | 713732 | 930819 | 822275,5 | 903 | 215209 | 655163 | 1007888 | 11023 | 594369 |
| 21 | 91177 | 95076 | 51340 | 73208 | 35 | 13068 | 50134 | 88363 | 2645 | 88363 |
| 22 | 275538 | 229124 | 259637 | 244380,5 | 155 | 46526 | 190085 | 295089 | 3578 | 239288 |
| 23 | 202593 | 216423 | 237846 | 227134,5 | 62 | 22880 | 60320 | 189430 | 2940 | 180219 |
| 24 | 96597 | 68556 | 96347 | 82451,5 | 32 | 5232 | 33287 | 78668 | 1162 | 53846 |
| 25 | 43753 | 36226 | 29767 | 32996,5 | 30 | 6167 | 17414 | 30853 | 1224 | 27315 |
| 26 | 141606 | 146831 | 106118 | 126474,5 | 93 | 27968 | 55468 | 119814 | 2948 | 119814 |
| 27 | 245973 | 212193 | 506473 | 359333 | 124 | 23846 | 99989 | 179976 | 5097 | 175108 |
| 28 | 304898 | 287385 | 119321 | 203353 | 150 | 35972 | 133157 | 258361 | 6486 | 258361 |
| 29 | 255818 | 217429 | 165019 | 191224 | 108 | 27020 | 134168 | 193369 | 5475 | 165246 |
| 30 | 110250 | 68809 | 88356 | 78582,5 | 62 | 11986 | 47342 | 77681 | 2311 | 47103 |
| 31 | 64536 | 54873 | 62753 | 58813 | 24 | 5612 | 41314 | 58833 | 1819 | 49583 |
| 32 | 43014 | 34209 | 57896 | 46052,5 | 18 | 3898 | 19046 | 30165 | 1000 | 26012 |
| 33 | 57219 | 57299 | 56704 | 57001,5 | 33 | 7453 | 33795 | 48571 | 1306 | 48571 |
| 34 | 376058 | 202278 | 190953 | 196615,5 | 97 | 35112 | 172782 | 254639 | 6354 | 132781 |
| 35 | 219652 | 181102 | 98829 | 139965,5 | 88 | 21605 | 39608 | 113178 | 6692 | 111908 |
| 36 | 56672 | 54827 | 81495 | 68161 | 20 | 4697 | 29623 | 47521 | 1257 | 45473 |
| 37 | 619786 | 481882 | 334469 | 408175,5 | 204 | 49695 | 337035 | 486014 | 8509 | 331757 |
| 38 | 497304 | 418322 | 411514 | 414918 | 271 | 68534 | 167351 | 359119 | 8377 | 272371 |
| 39 | 909107 | 524104 | 406604 | 465354 | 494 | 160747 | 437749 | 770686 | 6699 | 417501 |
| 40 | 315265 | 195365 | 209221 | 202293 | 146 | 39059 | 85529 | 249652 | 4420 | 136877 |
| 41 | 276468 | 180947 | 165980 | 173463,5 | 125 | 28107 | 161661 | 214216 | 4620 | 143908 |
| 42 | 258323 | 229644 | 134834 | 182239 | 93 | 25413 | 109859 | 173107 | 5822 | 159309 |
| 43 | 83022 | 68715 | 62455 | 65585 | 17 | 6337 | 37192 | 50954 | 1291 | 16873 |
| 44 | 108079 | 98183 | 102192 | 100187,5 | 46 | 13779 | 34501 | 68516 | 2261 | 67753 |
| 45 | 54637 | 58177 | 48060 | 53118,5 | 23 | 6643 | 21329 | 42524 | 1447 | 42524 |
| 46 | 93684 | 71490 | 44834 | 58162 | 25 | 6540 | 43406 | 64206 | 2613 | 53671 |
| 47 | 82970 | 88554 | 86006 | 87280 | 40 | 4799 | 22851 | 51369 | 2213 | 49845 |
| 48 | 235243 | 205619 | 151890 | 178754,5 | 158 | 41496 | 96352 | 183855 | 6084 | 167294 |
| 49 | 127722 | 114020 | 200018 | 157019 | 46 | 8898 | 39711 | 63245 | 1792 | 63245 |

Продолжение приложения 6

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 115407 | 97770 | 95804 | 96787 | 56 | 11052 | 76413 | 95840 | 3846 | 86940 |
| 51 | 282304 | 249711 | 180805 | 215258 | 173 | 46865 | 110291 | 199912 | 7878 | 181235 |
| 52 | 275848 | 210099 | 170850 | 190474,5 | 163 | 42620 | 51777 | 148165 | 3966 | 116315 |
| 53 | 391199 | 382229 | 226617 | 304423 | 322 | 64993 | 117174 | 294514 | 12226 | 292411 |
| 54 | 214313 | 210615 | 153090 | 181852,5 | 138 | 28479 | 87829 | 186021 | 6749 | 186021 |
| 55 | 38406 | 32486 | 32743 | 27137,5 | 17 | 2200 | 13960 | 23390 | 1070 | 21070 |
| 56 | 367015 | 251906 | 205445 | 228675,5 | 265 | 75794 | 133549 | 317649 | 4463 | 210227 |
| 57 | 443788 | 247345 | 255262 | 251303,5 | 291 | 64098 | 281215 | 410962 | 4994 | 226749 |
| 58 | 231644 | 226446 | 254426 | 240436 | 150 | 41015 | 77962 | 152854 | 4932 | 164764 |
| 59 | 1025296 | 713802 | 1022750 | 868276 | 458 | 159224 | 548578 | 861741 | 12338 | 556478 |
| 60 | 682126 | 462107 | 425948 | 444027,5 | 437 | 112603 | 236000 | 618389 | 6837 | 392458 |
| 61 | 92086 | 66950 | 40873 | 53911,5 | 25 | 8266 | 51201 | 94117 | 2642 | 64397 |
| 62 | 576507 | 525511 | 693934 | 609722,5 | 320 | 71013 | 222733 | 394686 | 9754 | 384065 |
| 63 | 1011692 | 957724 | 782870 | 870297 | 475 | 114802 | 372005 | 755913 | 24144 | 742786 |
| 64 | 737680 | 557320 | 499018 | 528169 | 667 | 174783 | 465099 | 702116 | 10878 | 501215 |
| 65 | 458549 | 295838 | 162028 | 228933 | 337 | 67652 | 312782 | 432876 | 7301 | 285036 |

Приложение 7

Экономические показатели деятельности сельскохозяйственных организаций, 2018 г.

| № п/п | Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. | Валовая продукция на 1 га пашни. Тыс. руб. | Валовая продукция на среднегодового работника, тыс. руб. | Валовая продукция на 100 руб. основных средств, руб. | Валовая продукция на 100 руб. затрат, руб. | Выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб. | Выручка на 1 га пашни, тыс. руб. | Выручка на 100 руб. затрат, руб. | Выручка на среднегодового работника, тыс. руб. | Основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. | Основные средства на 1 га пашни, тыс. руб. | Основные средства на среднегодового работника, тыс. руб. | Численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий, | Численность работников на 100 га пашни, чел. | Годовая заработная плата на среднегодового работника, тыс. | Затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяй- | Затраты на реализованную продукцию на 1 га пашни, тыс. руб. | Площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работ- | Площадь пашни на среднегодового работника, га | Затраты на 100 руб. выручки, руб. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | 95,8 | 95,9 | 2439 | 147,0 | 166,1 | 84,9 | 85,0 | 181,5 | 2161 | 65,2 | 65,2 | 1659 | 3,93 | 3,93 | 342,2 | 46,7 | 46,8 | 25,5 | 25,4 | 55,1 |
| 2 | 113,8 | 116,6 | 2309 | 125,9 | 172,0 | 105,6 | 108,2 | 182,2 | 2142 | 90,4 | 92,6 | 1834 | 4,93 | 5,05 | 335,5 | 58,0 | 59,4 | 20,3 | 19,8 | 54,9 |
| 3 | 41,7 | 41,7 | 2599 | 128,1 | 123,0 | 40,0 | 40,0 | 124,2 | 2497 | 32,5 | 32,5 | 2029 | 1,60 | 1,60 | 290,5 | 32,2 | 32,2 | 62,4 | 62,4 | 80,5 |
| 4 | 92,9 | 93,8 | 3113 | 123,7 | 116,6 | 57,9 | 58,5 | 129,7 | 1941 | 75,1 | 75,8 | 2516 | 2,99 | 3,01 | 388,6 | 44,7 | 45,1 | 33,5 | 33,2 | 77,1 |
| 5 | 95,7 | 95,7 | 2031 | 104,4 | 130,0 | 63,5 | 63,5 | 153,3 | 1348 | 91,6 | 91,6 | 1945 | 4,71 | 4,71 | 360,3 | 41,4 | 41,4 | 21,2 | 21,2 | 65,2 |
| 6 | 119,7 | 119,7 | 1807 | 140,2 | 116,4 | 93,7 | 93,7 | 122,0 | 1414 | 85,4 | 85,4 | 1288 | 6,63 | 6,63 | 312,5 | 76,8 | 76,8 | 15,1 | 15,1 | 82,0 |
| 7 | 73,1 | 73,6 | 2595 | 106,5 | 121,0 | 48,7 | 49,0 | 135,3 | 1727 | 68,7 | 69,1 | 2437 | 2,82 | 2,84 | 233,1 | 36,0 | 36,2 | 35,5 | 35,3 | 73,9 |
| 8 | 103,7 | 104,0 | 2640 | 67,3 | 139,9 | 83,1 | 83,4 | 155,2 | 2116 | 153,9 | 154,5 | 3921 | 3,93 | 3,94 | 309,8 | 53,5 | 53,7 | 25,5 | 25,4 | 64,4 |
| 9 | 78,1 | 87,4 | 3134 | 130,3 | 110,9 | 53,6 | 60,0 | 116,7 | 2151 | 60,0 | 67,1 | 2406 | 2,49 | 2,79 | 268,3 | 45,9 | 51,4 | 40,1 | 35,9 | 85,7 |
| 10 | 76,2 | 76,2 | 2636 | 175,4 | 135,7 | 53,0 | 53,0 | 160,9 | 1835 | 43,4 | 43,4 | 1503 | 2,89 | 2,89 | 278,3 | 32,9 | 32,9 | 34,6 | 34,6 | 62,2 |
| 11 | 85,6 | 86,3 | 2125 | 134,2 | 124,3 | 58,0 | 58,4 | 140,5 | 1440 | 63,8 | 64,3 | 1583 | 4,03 | 4,06 | 245,3 | 41,3 | 41,6 | 24,8 | 24,6 | 71,2 |
| 12 | 71,9 | 72,6 | 2447 | 124,4 | 158,3 | 67,0 | 67,6 | 165,4 | 2279 | 57,8 | 58,4 | 1967 | 2,94 | 2,97 | 278,0 | 40,5 | 40,9 | 34,0 | 33,7 | 60,4 |
| 13 | 92,1 | 92,1 | 2065 | 144,2 | 125,5 | 67,0 | 67,0 | 138,7 | 1502 | 63,9 | 63,9 | 1432 | 4,46 | 4,46 | 284,1 | 48,3 | 48,3 | 22,4 | 22,4 | 72,1 |
| 14 | 105,2 | 105,8 | 2000 | 134,0 | 141,3 | 89,3 | 89,8 | 152,5 | 1698 | 78,5 | 79,0 | 1493 | 5,26 | 5,29 | 241,3 | 58,6 | 58,9 | 19,0 | 18,9 | 65,6 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 107,1 | 107,1 | 4832 | 77,0 | 138,5 | 90,5 | 90,5 | 149,0 | 4083 | 139,1 | 139,1 | 6275 | 2,22 | 2,22 | 185,0 | 60,7 | 60,7 | 45,1 | 45,1 | 67,1 |
| 16 | 50,8 | 51,9 | 4678 | 156,8 | 121,6 | 33,3 | 34,0 | 137,3 | 3062 | 32,4 | 33,1 | 2984 | 1,09 | 1,11 | 351,3 | 24,2 | 24,7 | 92,0 | 90,1 | 72,8 |
| 17 | 70,4 | 70,4 | 2505 | 76,3 | 108,9 | 58,0 | 58,0 | 111,0 | 2064 | 92,3 | 92,3 | 3284 | 2,81 | 2,81 | 111,7 | 52,3 | 52,3 | 35,6 | 35,6 | 90,1 |
| 18 | 121,1 | 122,4 | 2152 | 115,8 | 109,5 | 91,0 | 92,1 | 113,0 | 1618 | 104,5 | 105,7 | 1858 | 5,63 | 5,69 | 301,0 | 80,6 | 81,5 | 17,8 | 17,6 | 88,5 |
| 19 | 51,4 | 51,4 | 1799 | 117,5 | 142,8 | 57,9 | 57,9 | 136,3 | 2025 | 43,8 | 43,8 | 1531 | 2,86 | 2,86 | 213,2 | 42,5 | 42,5 | 35,0 | 35,0 | 73,4 |
| 20 | 52,1 | 52,1 | 3529 | 98,2 | 125,4 | 40,5 | 40,5 | 135,3 | 2745 | 53,1 | 53,1 | 3595 | 1,48 | 1,48 | 474,8 | 30,0 | 30,0 | 67,7 | 67,7 | 73,9 |
| 21 | 91,9 | 98,4 | 1877 | 102,2 | 101,1 | 79,9 | 85,5 | 101,3 | 1633 | 89,9 | 96,2 | 1836 | 4,89 | 5,24 | 306,0 | 78,9 | 84,5 | 20,4 | 19,1 | 98,7 |
| 22 | 65,1 | 67,9 | 1578 | 66,8 | 104,0 | 52,2 | 54,5 | 105,0 | 1266 | 97,4 | 101,7 | 2363 | 4,12 | 4,30 | 336,2 | 49,7 | 51,8 | 24,3 | 23,2 | 95,2 |
| 23 | 93,9 | 95,1 | 3376 | 80,9 | 112,9 | 67,0 | 67,8 | 119,0 | 2407 | 116,0 | 117,4 | 4171 | 2,78 | 2,82 | 398,6 | 56,3 | 56,9 | 35,9 | 35,5 | 84,0 |
| 24 | 68,8 | 68,8 | 3076 | 149,1 | 122,6 | 55,8 | 55,8 | 129,5 | 2496 | 46,1 | 46,1 | 2063 | 2,24 | 2,24 | 323,8 | 43,1 | 43,1 | 44,7 | 44,7 | 77,2 |
| 25 | 71,2 | 71,2 | 2998 | 182,8 | 135,9 | 67,8 | 67,8 | 138,4 | 2855 | 39,0 | 39,0 | 1640 | 2,38 | 2,38 | 282,1 | 49,0 | 49,0 | 42,1 | 42,1 | 72,3 |
| 26 | 45,3 | 45,3 | 2284 | 122,0 | 112,1 | 30,7 | 30,7 | 118,9 | 1550 | 37,1 | 37,1 | 1872 | 1,98 | 1,98 | 244,0 | 25,8 | 25,8 | 50,4 | 50,4 | 84,1 |
| 27 | 48,1 | 48,1 | 2640 | 113,9 | 132,4 | 57,1 | 57,1 | 126,0 | 3134 | 42,2 | 42,2 | 2318 | 1,82 | 1,82 | 142,4 | 45,3 | 45,3 | 54,9 | 54,9 | 79,4 |
| 28 | 75,8 | 75,8 | 2773 | 124,8 | 162,2 | 76,9 | 76,9 | 160,8 | 2814 | 60,8 | 60,8 | 2223 | 2,73 | 2,73 | 411,9 | 47,8 | 47,8 | 36,6 | 36,6 | 62,2 |
| 29 | 65,7 | 66,5 | 2305 | 153,1 | 117,2 | 49,8 | 50,4 | 124,0 | 1746 | 42,9 | 43,4 | 1505 | 2,85 | 2,89 | 344,6 | 40,1 | 40,6 | 35,1 | 34,7 | 80,7 |
| 30 | 57,1 | 57,5 | 1435 | 58,0 | 109,9 | 51,0 | 51,3 | 111,3 | 1281 | 98,5 | 99,2 | 2474 | 3,98 | 4,01 | 349,0 | 45,8 | 46,1 | 25,1 | 25,0 | 89,9 |
| 31 | 42,3 | 42,3 | 1992 | 108,4 | 128,3 | 32,7 | 32,7 | 139,9 | 1537 | 39,1 | 39,1 | 1838 | 2,13 | 2,13 | 322,8 | 23,3 | 23,3 | 47,0 | 47,0 | 71,5 |
| 32 | 37,3 | 37,3 | 2272 | 75,9 | 216,9 | 36,5 | 36,5 | 223,1 | 2219 | 49,2 | 49,2 | 2995 | 1,64 | 1,64 | 134,5 | 16,3 | 16,3 | 60,9 | 60,9 | 44,8 |
| 33 | 83,2 | 83,2 | 2371 | 180,1 | 107,0 | 43,5 | 43,5 | 114,4 | 1240 | 46,2 | 46,2 | 1316 | 3,51 | 3,51 | 271,2 | 38,0 | 38,0 | 28,5 | 28,5 | 87,4 |
| 34 | 97,5 | 99,5 | 5473 | 133,3 | 129,1 | 60,8 | 62,0 | 156,6 | 3412 | 73,2 | 74,6 | 4107 | 1,78 | 1,82 | 329,5 | 38,8 | 39,6 | 56,1 | 55,0 | 63,9 |
| 35 | 43,7 | 48,4 | 3729 | 161,4 | 164,9 | 38,8 | 43,0 | 179,6 | 3312 | 27,1 | 30,0 | 2311 | 1,17 | 1,30 | 217,4 | 21,6 | 23,9 | 85,4 | 77,0 | 55,7 |
| 36 | 50,7 | 50,7 | 3293 | 163,3 | 112,6 | 43,2 | 43,2 | 115,0 | 2810 | 31,0 | 31,0 | 2016 | 1,54 | 1,54 | 158,1 | 37,6 | 37,6 | 65,0 | 65,0 | 86,9 |
| 37 | 90,0 | 94,6 | 974 | 161,1 | 105,9 | 77,9 | 81,9 | 106,9 | 843 | 55,9 | 58,7 | 605 | 9,24 | 9,71 | 225,1 | 72,9 | 76,6 | 10,8 | 10,3 | 93,6 |
| 38 | 38,8 | 42,3 | 2252 | 151,5 | 143,3 | 45,9 | 50,0 | 134,3 | 2662 | 25,6 | 27,9 | 1486 | 1,72 | 1,88 | 212,2 | 34,2 | 37,3 | 58,0 | 53,2 | 74,5 |
| 39 | 102,2 | 110,5 | 1702 | 112,2 | 103,4 | 65,3 | 70,6 | 105,5 | 1086 | 91,1 | 98,5 | 1517 | 6,01 | 6,49 | 256,9 | 61,9 | 66,9 | 16,6 | 15,4 | 94,8 |
| 40 | 65,6 | 74,1 | 2075 | 106,5 | 136,1 | 51,6 | 58,2 | 150,9 | 1631 | 61,6 | 69,5 | 1948 | 3,16 | 3,57 | 347,8 | 34,2 | 38,6 | 31,6 | 28,0 | 66,3 |
| 41 | 107,3 | 107,8 | 2253 | 102,9 | 130,6 | 76,0 | 76,4 | 149,3 | 1596 | 104,3 | 104,8 | 2191 | 4,76 | 4,79 | 444,8 | 50,9 | 51,2 | 21,0 | 20,9 | 67,0 |
| 42 | 102,6 | 105,7 | 2047 | 290,6 | 108,5 | 60,9 | 62,8 | 115,2 | 1217 | 35,3 | 36,4 | 704 | 5,01 | 5,16 | 379,1 | 52,9 | 54,5 | 20,0 | 19,4 | 86,8 |
| 43 | 114,9 | 118,3 | 2072 | 91,2 | 118,0 | 79,0 | 81,3 | 128,5 | 1424 | 126,0 | 129,7 | 2272 | 5,55 | 5,71 | 300,2 | 61,5 | 63,3 | 18,0 | 17,5 | 77,8 |

Продолжение приложения 7

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 44 | 133,4 | 133,4 | 2768 | 103,5 | 124,8 | 133,8 | 133,8 | 124,8 | 2775 | 129,0 | 129,0 | 2675 | 4,82 | 4,82 | 304,1 | 107,2 | 107 | 20,7 | 20,7 | 80,2 |
| 45 | 76,3 | 79,1 | 2126 | 154,0 | 120,8 | 61,9 | 64,1 | 126,9 | 1725 | 49,5 | 51,3 | 1380 | 3,59 | 3,72 | 322,0 | 48,8 | 50,5 | 27,9 | 26,9 | 78,8 |
| 46 | 106,2 | 119,8 | 3192 | 103,4 | 153,4 | 100,1 | 113,0 | 158,5 | 3010 | 102,6 | 115,8 | 3085 | 3,33 | 3,75 | 306,3 | 63,2 | 71,3 | 30,1 | 26,6 | 63,1 |
| 47 | 80,1 | 80,3 | 1999 | 177,8 | 113,7 | 60,0 | 60,1 | 119,1 | 1497 | 45,0 | 45,1 | 1124 | 4,01 | 4,02 | 296,4 | 50,3 | 50,5 | 25,0 | 24,9 | 83,9 |
| 48 | 80,5 | 83,6 | 1605 | 122,4 | 110,3 | 62,0 | 64,4 | 113,8 | 1237 | 65,8 | 68,3 | 1311 | 5,02 | 5,21 | 247,3 | 54,5 | 56,6 | 19,9 | 19,2 | 87,8 |
| 49 | 70,3 | 70,7 | 2128 | 127,2 | 119,0 | 64,2 | 64,6 | 121,2 | 1945 | 55,2 | 55,6 | 1673 | 3,30 | 3,32 | 232,3 | 53,0 | 53,3 | 30,3 | 30,1 | 82,5 |
| 50 | 98,3 | 101,9 | 2703 | 98,8 | 128,2 | 79,4 | 82,3 | 137,5 | 2183 | 99,5 | 103,1 | 2737 | 3,64 | 3,77 | 258,2 | 57,8 | 59,8 | 27,5 | 26,5 | 72,7 |
| 51 | 85,4 | 86,1 | 2579 | 234,7 | 143,8 | 56,2 | 56,6 | 186,3 | 1696 | 36,4 | 36,7 | 1099 | 3,31 | 3,34 | 318,3 | 30,2 | 30,4 | 30,2 | 30,0 | 53,7 |
| 52 | 54,5 | 54,5 | 3188 | 106,5 | 128,2 | 44,5 | 44,5 | 136,8 | 2604 | 51,1 | 51,1 | 2993 | 1,71 | 1,71 | 422,8 | 32,5 | 32,5 | 58,5 | 58,5 | 73,1 |
| 53 | 88,9 | 88,9 | 4057 | 79,6 | 125,5 | 67,5 | 67,5 | 136,5 | 3082 | 111,7 | 111,7 | 5097 | 2,19 | 2,19 | 146,2 | 49,5 | 49,5 | 45,7 | 45,7 | 73,3 |
| 54 | 79,4 | 83,7 | 2324 | 76,8 | 113,3 | 73,7 | 77,7 | 114,4 | 2158 | 103,4 | 109,0 | 3025 | 3,42 | 3,60 | 284,6 | 64,4 | 67,9 | 29,3 | 27,8 | 87,4 |
| 55 | 82,9 | 84,6 | 2847 | 181,0 | 107,9 | 64,3 | 65,6 | 110,4 | 2208 | 45,8 | 46,8 | 1573 | 2,91 | 2,97 | 380,1 | 58,2 | 59,5 | 34,4 | 33,6 | 90,6 |
| 56 | 87,9 | 88,3 | 3270 | 166,2 | 118,8 | 49,6 | 49,8 | 138,9 | 1845 | 52,9 | 53,1 | 1968 | 2,69 | 2,70 | 492,5 | 35,7 | 35,9 | 37,2 | 37,0 | 72,0 |
| 57 | 92,0 | 94,2 | 2838 | 213,7 | 109,4 | 54,7 | 56,0 | 116,9 | 1686 | 43,1 | 44,1 | 1328 | 3,24 | 3,32 | 362,2 | 46,8 | 47,9 | 30,8 | 30,1 | 85,5 |
| 58 | 98,1 | 99,7 | 1320 | 94,3 | 110,8 | 95,7 | 97,2 | 111,1 | 1287 | 104,1 | 105,7 | 1399 | 7,44 | 7,55 | 379,6 | 86,2 | 87,5 | 13,4 | 13,2 | 90,0 |

Приложение 8

Динамика урожайности с/х культур в учхозе ”N”, ц/га

| № п/п | Годы | Озимые зерновые | Кукуруза | Подсолнечник |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1969 | 37,5 | 70,3 | 25,2 |
| 2 | 1970 | 33,8 | 44,2 | 15,3 |
| 3 | 1971 | 37,9 | 48,4 | 23,1 |
| 4 | 1972 | 36,8 | 50,9 | 27,4 |
| 5 | 1973 | 39,2 | 40,3 | 26,5 |
| 6 | 1974 | 40,8 | 22,5 | 23,5 |
| 7 | 1975 | 56,2 | 20,0 | 25,9 |
| 8 | 1976 | 44,5 | 16,3 | 20,9 |
| 9 | 1977 | 39,6 | 34,6 | 22,7 |
| 10 | 1978 | 50,6 | 56,9 | 27,4 |
| 11 | 1979 | 30,2 | 20,5 | 20,2 |
| 12 | 1980 | 54,2 | 65,9 | 29,1 |
| 13 | 1981 | 49,8 | 61,7 | 27,5 |
| 14 | 1982 | 49,1 | 41,6 | 29 |
| 15 | 1983 | 47 | 47,2 | 28,5 |
| 16 | 1984 | 39,1 | 41,9 | 26,8 |
| 17 | 1985 | 49,2 | 33,7 | 24 |
| 18 | 1986 | 51,8 | 64,4 | 11,3 |
| 19 | 1987 | 47,9 | 77,8 | 28,3 |
| 20 | 1988 | 54,8 | 72,6 | 20,4 |
| 21 | 1989 | 42,8 | 61,2 | 28 |
| 22 | 1990 | 58 | 52 | 20,5 |
| 23 | 1991 | 48,9 | 76,8 | 20,3 |
| 24 | 1992 | 48,9 | 43,2 | 16,1 |
| 25 | 1993 | 56,7 | 55,9 | 8,2 |
| 26 | 1994 | 66 | 69,5 | 27 |
| 27 | 1995 | 46,9 | 41,2 | 14 |
| 28 | 1996 | 48,6 | 32,4 | 17,1 |
| 29 | 1997 | 49,4 | 52,7 | 19,3 |
| 30 | 1998 | 45,7 | 11,9 | 14,4 |
| 31 | 1999 | 43,4 | 30,1 | 10,3 |
| 32 | 2000 | 31,5 | 32,9 | 9,8 |
| 33 | 2001 | 44,4 | 35,7 | 9 |
| 34 | 2002 | 53,4 | 6,2 | 12,7 |
| 35 | 2003 | 59,5 | 24,6 | 18,9 |
| 35 | 2004 | 62,3 | 15,0 | 13,4 |
| 36 | 2005 | 78,8 | - | 12,8 |
| 37 | 2006 | 76,3 | 35,0 | 17,7 |
| 38 | 2007 | 48,8 | 21,9 | 20,7 |
| 39 | 2008 | 61,8 | 61,7 | 26,6 |
| 40 | 2009 | 66,9 | 34,7 | 21,4 |
| 41 | 2010 | 57,7 | 61,5 | 26,2 |
| 42 | 2011 | 47,8 | 36,2 | 21,8 |
| 43 | 2012 | 76,9 | 65,7 | 31,2 |
| 44 | 2013 | 54,8 | 45,9 | 22,8 |
| 45 | 2014 | 67,3 | 34,5 | 25,9 |
| 46 | 2015 | 77,6 | 18,2 | 20,9 |
| 47 | 2016 | 48,2 | 16,3 | 75,1 |
| 48 | 2017 | 60,4 | 20,6 | 70,1 |
| 49 | 2018 | 69,6 | 22,6 | 47,9 |
| 50 | 2019 | 77,9 | 79,2 | 26,3 |

*Учебное издание*

**Бондаренко** Петр Сергеевич, **Ворокова** Нодира Хасановна,
**Кацко** Игорь Александрович, **Давыденко** Наталья Геннадиевна

# Теория вероятностей
# и математическая статистика

*Методические рекомендации для контактной*
*и самостоятельной работы обучающихся*
*(уровень бакалавриата)*

В авторской редакции

---

Подписано в печать 24.01.2020. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. – 5,7. Уч.-изд. л. – 3,79.
Тираж 100 экз. Заказ № 05

Издательство: Краснодарский ЦНТИ - филиал ФГБУ «РЭА» Минэнерго России
350058, г. Краснодар, ул. Старокубанская 116А