**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Факультет водохозяйственного строительства и мелиорации
Кафедра строительства и эксплуатации водохозяйственных объектов**

Н.В. ОСТРОВСКИЙ, В.Т. ОСТРОВСКИЙ, В.Д. ГУНЬКО, Ж.В. КИЗЮН

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**для практических занятий и лабораторных работ по метрологии
по дисциплине**

МЕТРОЛОГИЯ СТАНДАРТИЗАЦИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ

**(Для очного и заочного обучения бакалавров по направлению
подготовки 280100.62 «природообустройство и водопользование»)**

КРАСНОДАР 2011

Методические указания для практических занятий и лабораторных работ по дисциплине «Метрология, стандартизация и сертификация». – Краснодар: КубГАУ, 2011 – 45 с.

Настоящие методические указания предназначены для бакалавров факультета водохозяйственного строительства и мелиорации, водоснабжения и водоотведения, по направлению 280100.62 «природообустройство и водопользование»

Составители: Н.В. Островский, В.Т. Островский, В.Д. Гунько, Ж.В. Кизюн

Рекомендованы учебно-методической комиссией факультета Водохозяйственного строительства и мелиорации КубГАУ (протокол № от г.)

СОДЕРЖАНИЕ

1 ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕТРОЛОГИИ. ЕДИНИЦЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. ЭТАЛОНЫ ЕДИНИЦ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

1.1 Основные термины, определения и понятия метрологии

Единую терминологию, установленную в нормативных документах по метрологии рекомендуется применять во всех видах документации (научно-технической, учебной, справочной), входящих в сферу работ по стандартизации и (или) использующих эти работы.

Основное понятие метрологии – **измерение**.

Измерение **–** это нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Измерение физической величины - совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины.

Все объекты окружающего мира характеризуются своими свойствами.

Свойство **–** философская категория, выражающая такую сторону объекта (явления, процесса), которая обуславливает его различие или общность с другими объектами (явлениями, процессами) и обнаруживается в его отношениях к ним.

Свойство – это категория качественная. Для количественного описания различных свойств, процессов и физических тел водится понятие величины.

Величина **–** это свойство чего-либо, которое может быть выделено среди других свойств и оценено тем или иным способом, в том числе количественно.

Величине не существует сама по себе. Она имеет место лишь постольку, поскольку существует объект со свойствами, выраженными данной величиной.

Далее мы будем рассматривать понятия, относящиеся к физическим величинам.

Физической величиной называют одно из свойств физического объекта (явлении, процесса), в качественном отношении общее для многих физических объектов, а в количественном – индивидуальное для каждого из них.

Одной из главных задач метрологии является обеспечение единства измерений. Единство измерений – состояние измерений, при котором их результаты выражены в узаконенных единицах величин и погрешности измерений не выходят за установленные границы с заданной вероятностью [1].

1.2 Система единиц физических величин

В науке, технике и повседневной жизни человек имеет дело с разнообразными свойствами окружающих нас физических объектов. Эти свойства отражают процессы взаимодействия объектов между собой. Их описание производится посредством физических величин. Для того чтобы можно было установить для каждого объекта различия в количественном содержании свойств, отображаемое физической величиной, в метрологии введены понятия ее размера и значения.

Размер физической величины **–** это количественное содержание в данном объекте свойства, соответствующего понятию «физическая величина».

Значение физической величины – это оценка ее размера в виде некоторого числа принятых для нее единиц. Его получают в результате ее измерения или вычисления.

Единица физической величины – это ФВ фиксированного размера, которой условно присвоено числовое значение, равное единице, и которая применяется для количественного выражения однородных ФВ.

Системой ФВ - называется совокупность ФВ, образованная в соответствии с принятыми принципами, когда одни величины принимаются за независимые, а другие являются их функциями.

Обоснованно, но в общем произвольным образом выбираются несколько ФВ, называемых *основным.* Остальные величины, называемые *производными*, выражаются через основные на основе известных уравнений связи между ними.

Системой единиц ФВ – называют совокупность основных и производных единиц ФВ, образованная в соответствии с принятыми принципами.

Первой системой единиц считается метрическая система, где за основную единицу длины был принят метр.

В настоящее время действует международная система единиц СИ. В СИ выделяют основные, дополнительные и производные (кратные, дольные) единицы. Существуют также **внесистемные единицы** – это единицы ФВ, не входящие ни в одну из принятых систем единиц. Внесистемные единицы ФВ по отношению к СИ делятся на четыре вида:

- допускаемые наравне с единицами СИ (масса – тонна, плоский угол – градус, минута, секунда, объем - литр);
- допускаемые к применению в отдельных областях (астрономическая единица – световой год в астрономии, диоптрий – в оптике);
- временно допускаемые наравне с единицами СИ (морская миля, карат), они постепенно будут изыматься из обращения в соответствии с международными соглашениями;
- изъятые из обращения (мм ртутного столба – единицы давления, лошадиная сила – единицы мощности и др.).

Кратная единица – это единица ФВ в целое число раз большая системной или внесистемной единицы.

Дольная единица - это единица ФВ в целое число раз меньшая системной или внесистемной единицы.

Производная единица - образованная в соответствии с уравнениями, связывающими ее с основными единицами или с основными и уже определенными производными.

Таблицы единиц физических величин приведены в справочном приложении А. Подбор справочных материалов по единицам физических величин выполнен по данным [2]. Справочные таблицы содержат сведения по основным единицам и по единицам физических величин, применяемым в отрасли строительства, водного хозяйства и мелиорации.

1.3 Истинное и действительное значение физической величины

Истинное значение ФВ – значение ФВ, которое идеальным образом характеризует в качественном и количественном отношении соответствующую физическую величину.

Действительное значение ФВ – значение ФВ, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

1.4 Измерения

Средства измерений – технические средства, используемые при измерениях и имеющие нормированные метрологические характеристики.

В число средств измерений входят меры, измерительные приборы, измерительные установки. К ним относятся также измерительные преобразователи, измерительные принадлежности, которые не могут применяться самостоятельно, но служат для повышения точности, передачи данных и т.п.

Особую роль в метрологии играют меры, как носители единиц физических величин.

Мера – средство измерений в виде тела или устройства предназначенного для воспроизведения величины одного или нескольких размеров, значения которых она содержит с необходимой для измерений точностью. (Гири, мерные колбы, концевые меры длины.)

1.5 Эталоны единиц физических величин

Средство измерений или комплекс средств измерений, предназначенные для воспроизведения и хранения единицы и передачи ее размера нижестоящим по поверочной схеме средствам измерений и утвержденные в качестве эталона в установленном порядке, является ***эталоном единицы физической величины.***

Конструкция эталона [3], его физические свойства и способ воспроизведениядения определяются природой физической величины (единица которой воспроизводится) и уровнем развития измерительной техники в данной области измерений.

Эталон должен обладать следующими существенными признаками: неизменностью, воспроизводимостью и сличаемостью.

Неизменность эталона — свойство эталона удерживать неизменным размер воспроизводимой им единицы в течение длительного периода времени, а все изменения, зависящие от внешних условий (температура, влажность, давление и т. п.), должны быть строго определенными функциями величин, доступных точному измерению.

Воспроизводимость эталона — возможность воспроизведения единицы физической величины с наименьшей погрешностью для данного уровня развития измерительной техники.

Сличаемость эталона — возможность обеспечения сличения с эталоном других средств измерений, нижестоящих по поверочной схеме, с наивысшей точностью для данного уровня развития техники измерений.

Различают следующие виды эталонов:

- первичный;
- специальный;
- государственный;
- эталон-свидетель;
- эталон-копия;
- эталон сравнения;
- рабочий эталон;
- международный эталон и т.д.

Под ***первичным эталоном*** понимается эталон, обеспечивающий воспроизведение единицы с наивысшей в стране (по сравнению с другими эталонами той же величины) точностью.

Первичные эталоны представляют собой уникальные измерений, часто представляющие собой сложные измерительные комплексы. Они составляют основу государственной системы обеспечения единства измерений. Многие первичные эталоны утверждаются в качестве государственных эталонов.

В качестве *специального эталона* используется эталон, обеспечивающий воспроизведение единицы в особых условиях и служащий для этих условий первичным эталоном.

Государственный эталон единицы величины — эталон единицы величин, признанный решением уполномоченного на то государственного органа в качестве исходного на территории Российской Федерации.

Для того чтобы обеспечить воспроизведение единиц с максимально возможной точностью, государственные эталоны постоянно совершенствуются. Для обеспечения единства измерений физических величин в международном масштабе важную роль играют международные сличения национальных государственных эталонов. Эти помогают выявить систематические погрешности воспроизведения единицы национальными эталонами, выявить, насколько национальные эталоны соответствуют международному уровню, и наметить пути совершенствования национальных (государственных) эталонов.

Например, по решению первой Генеральной конференции по мерам и весам, России из 42 экземпляров прототипов килограмма были переданы № 12 и № 26, причем № 12 утвержден в качестве государственного эталона массы. Прототип № 26 использовался как вторичный эталон.

Национальный (государственный) эталон массы хранится в НПО «ВНИИМ им. Д.И. Менделеева» в г. Санкт-Петербурге на кварцевой подставке под двумя стеклянными колпаками в стальном сейфе, температура воздуха поддерживается в пределах 20±3°С, относительная влажность 65%. Один раз в 10 лет с ним сличаются два вторичных эталона. При сличении с международным эталоном наш национальный эталон массы получил значение 1,0000000877 кг. Для передачи размера единицы массы от прототипа № 12 вторичным эталонам используются специальные весы № 1 и № 2 с дистанционным управлением. Весы № 1 изготовлены фирмой «Рупрехт», а № 2 — НПО «ВНИИМ им. Д.И. Менделеева». Погрешность воспроизведения килограмма составляет $2\text{-}10^{-9}$. Отклонения массы эталонов, определяемые при международных сличениях, показывают достаточную степень ее стабильности.

Таблица 1.1 - Результаты международных сличений эталона массы

Страна	Номер эталона	Отклонение массы эталона, мг		Разность массы эталонов
		Первое сличение	Второе сличение	
Международный эталон	31	0,162	0,128	-0,034
Франция	35	0,191	0,183	-0,008
Россия	12	0,068	0,085	0,017
США	20	-0,039	-0,019	0,020
Япония	6	0,169	0,170	0,001
Италия	5	0,018	0,018	0,000
Швейцария	38	0,183	0,214	0,031

Совокупность первичных эталонов составляет эталонную базу страны и является основой обеспечения единства измерений. Число эталонов не является постоянным, а изменяется в зависимости от потребностей народного хозяйства страны. Обычно прослеживается увеличение их числа во времени, что обусловлено постоянным развитием рабочих средств измерений.

В качестве ***вторичного эталона используется*** эталон, получающий размер единицы путем сличений с первичным эталоном рассматриваемой единицы.

Вторичный эталон является подчиненным по отношению к первичному эталону.

Эталон-свидетель — вторичный эталон, предназначенный для поверки сохранности и неизменности государственного эталона и для замены его в случае порчи или утраты. В настоящее время только эталон килограмма имеет эталон-свидетель.

Основное назначение эталона-свидетеля усилить уверенность в постоянстве основного эталона. По существу, с помощью эталона-свидетеля можно лишь констатировать постоянство или изменение отношения между единицами, воспроизводимыми эталоном-свидетелем и первичным эталоном. Можно также с определенной степенью достоверности утверждать, что в случае постоянства этих отношений размеры единиц, воспроизводимых эталонами, остаются неизменными.

Эталон-копия — это вторичный эталон, предназначенный для передачи размера единицы рабочим эталонам. Такие эталоны создаются в случае большого числа поверочных работ с целью предохранения первичного или специального эталона от преждевременного износа. Эталон-копия представляет собой копию государственного эталона только по метрологическому назначению и может не всегда являться физической копией государственного эталона. При необходимости эталон-копия может заменить государственный эталон.

Эталон-сравнения — это вторичный эталон, который применяется для сличений эталонов, которые по тем или иным причинам не могут быть непосредственно сличаемы друг с другом.

Рабочий эталон — это вторичный эталон, применяемый для передачи размера единицы образцовым средствам измерений высшей точности, и в отдельных случаях — наиболее точным рабочим средствам измерений. Рабочие эталоны являются наиболее распространенными вторичными эталонами.

Международный эталон — это эталон, принятый по международному соглашению в качестве первичного международного эталона и служащий для согласования с ним размеров единиц, воспроизводимых и хранимых национальными эталонами.

2 ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1 Точность измерения. Относительная и абсолютная погрешность

Точность измерения – одна из характеристик качества измерения, отражающая близость к нулю погрешности результата измерения и близость результатов к истинному значению измеряемой величины.

Значение точности иногда определяют величиной, обратной модулю относительной погрешности.

$$\varepsilon = 1/|\delta|, \qquad (2.1)$$

Например, если погрешность измерений равна 10^{-6}, то точность будет равна 10^{6}.

Абсолютная погрешность измерения – разность между полученным при измерении (X) и истинным (Q) значениями измеряемой величины.

$$\Delta = X - Q, \qquad (2.2)$$

Относительная погрешность – погрешность выраженная в процентах или долях измеряемой величины:

$$\delta = (X - Q)/Q, \qquad (2.3)$$

Поскольку истинное значение измеряемой величины всегда остается неизвестным, для оценки погрешности измерения **вместо истинного используют действительное (условное истинное)** значение измеряемой величины, полученное путем многократных или более точных измерений [2].

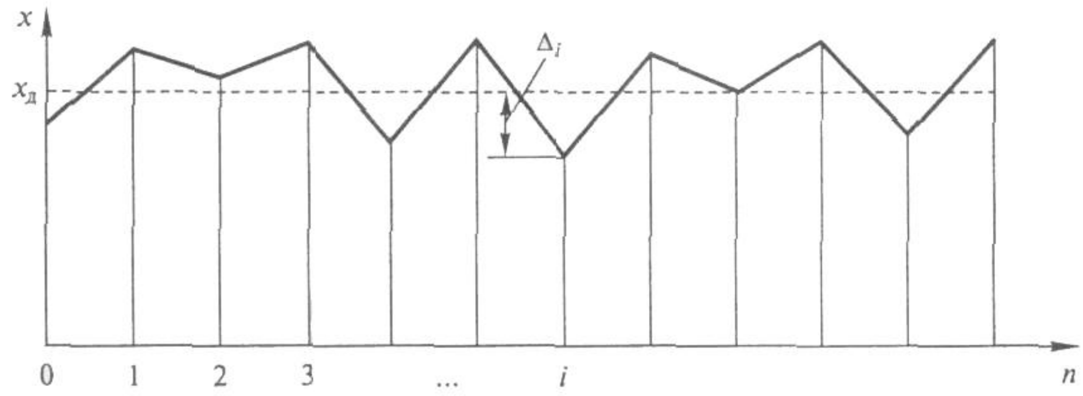
Качество измерений характеризуется их погрешностями.

Изучение причин возникновения погрешностей и уменьшение размеров погрешностей — одна из главных задач практической метрологии, поэтому понятие «погрешность» — одно из центральных в метрологии.

2.2 Случайная и систематическая погрешности измерений

Для исследования и оценки погрешностей принято делить суммарную погрешность на две составляющие: **случайную и систематическую**, принципиально отличающиеся по характеру проявления [2].

Случайная погрешность – составляющая погрешности измерения изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) в серии повторных измерений одного и того же размера физической величины, проведенных с одинаковой тщательностью в одних и тех же условиях. В появлениях таких погрешностей не наблюдается какой-либо закономерности, они обнаруживаются при повторных измерениях одной и той же величины в виде некоторого разброса получаемых результатов (рисунок 2.1).



x – значение измеряемой величины; $x_д$ – действительное значение измеряемой величины; Δi – погрешность i-го измерения; n – число измерений

Рисунок 2.1 – Изменение случайной погрешности при многократных измерениях

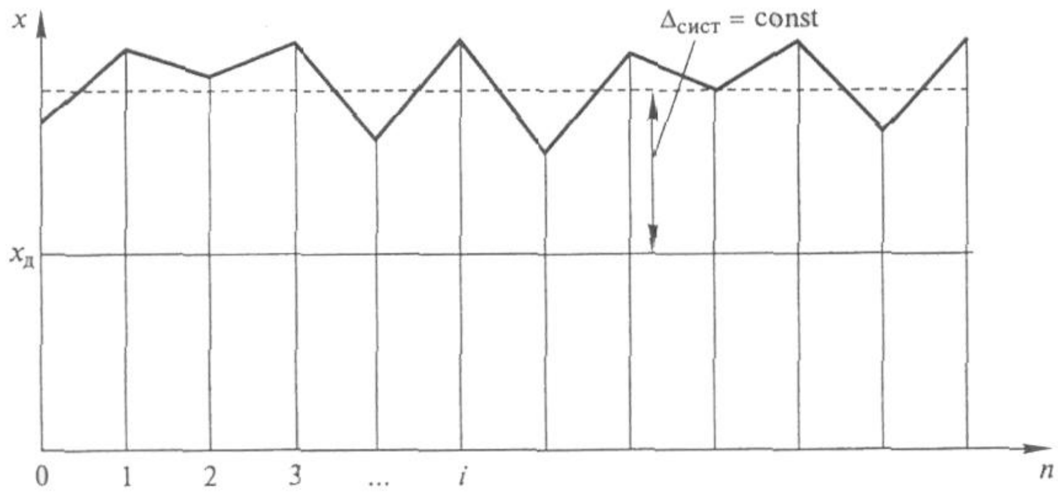
В отличие от систематических случайные погрешности нельзя исключить из результатов измерений путем введения поправок. Однако их можно существенно уменьшить путем увеличения числа измерений, поскольку среднее арифметическое значение x при этом стремится к истинному значению измеряемой величины Q.

Систематическая погрешность – составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно меняющаяся при повторных измерениях одной и той же физической величины. На рисунке 2.2 приведены результаты многократных измерений, содержащих случайную и систематическую погрешности. Систематическая погрешность, как правило, не изменяется при многократных измерениях и может быть почти полностью устранена путем обнаружения и устранения причины, по которой она возникла, или путем введения поправки ($\Delta_{сист} = x - Q$).

При измерениях могут появляться также очень большие ***грубые погрешности (промахи)***, которые возникают, как правило, из-за ошибок или неправильных действий оператора, а также из-за кратковременных отказов или сбоев в работе измерительных приборов и других резких изменений условий проведения измерений. Грубые погрешности обнаруживают и отбрасывают непосредственно в процессе измерений или при математической обработке результатов измерений с использованием специальных критериев.

2.3 Правила округления результатов измерений

Погрешность результата измерения физической величины дает представление о том, какие последние цифры в его числовом значении являются сомнительными. Поэтому, нет смысла выражать погрешность более чем



x – значение измеряемой величины; $x_д$ – действительное значение измеряемой величины; *n* – число измерений; $\Delta_{сист}$ – постоянная систематическая погрешность

Рисунок 2.2 – Изменение случайной погрешности при многократных измерениях

одной или двумя цифрами. В соответствии с установленными правилами погрешность выражается двумя значащими цифрами, если первая из них 1 или 2, и одной, начиная с цифры 3 [2].

Числовое значение результата измерения также следует округлять в соответствии с числовым разрядом значащей цифры погрешности, т. е. **числовое значение результата измерения должно оканчиваться цифрой того же разряда или тем же десятичным знаком, которым оканчивается значение абсолютной погрешности**. При этом, если старшая отбрасываемая цифра меньше 5, то предыдущая не изменяется. Если старшая отбрасываемая цифра больше или равна 5, но за ней имеются значащие цифры, то предыдущую (оставляемую) цифру увеличивают на единицу. Если отбрасываемая цифра 5 не имеет за собой значащих цифр, то предыдущая не изменяется, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.

Например, при погрешности ±0,03 приведенные результаты округляются следующим образом:

1,214- 1,21;

1,2151 - 1,22;

1,215-1,22;

1,225-1,22.

Следует осмотрительно относиться к округлениям, производимым в процессе вычислений. Рекомендуется производить округления в окончательном ответе, а вычисление производить с одним-двумя лишними знаками.

3 СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

При проведении с одинаковой тщательностью и в одинаковых условиях повторных измерений (повторных наблюдений) одной и той же постоянной, неизменяющейся величины получают ряд результатов наблюдений. Некоторые из них отличаются друг от друга, а некоторые совпадают [4].

Причинами расхождений результатов повторных наблюдений могут оказаться случайные изменения самой измеряемой величины. Уловить и провести границу между случайными погрешностями измерения и случайными изменениями измеряемой величины во многих случаях оказывается очень сложным.

Каждая случайная погрешность возникает при одновременном воздействии многих источников. Каждый из этих источников сам по себе оказывает незаметное влияние на результат наблюдения; но суммарное воздействие всех источников может оказаться достаточно сильным.

При этом, заметные расхождения в результатах отдельных наблюдений, появляются без закономерной связи с предыдущими и последующими. Это и дало основание говорить о случайных погрешностях.

Для учета влияний случайных погрешностей на результат измерения разработана теория погрешностей. Теория погрешностей, использующая математический аппарат теории вероятностей и математической статистики, основывается на рассмотрении появления случайных погрешностей при многократно повторяемых наблюдениях как случайных событий. Теория вероятностей дает математические методы изучения свойств случайных событий в больших совокупностях.

О соответствии выбранного математического аппарата судят по согласию теории с практикой. Развитие метрологии и измерительной техники показало, что математический аппарат теории вероятностей и математической статистики соответствует задаче изучения случайных погрешностей измерений и во многих случаях хорошо согласуется с опытными данными измерений.

3.1 Основные понятия теории случайных погрешностей

Теория вероятностей называет случайным такое событие, которое при осуществлении определенного комплекса условий может произойти или не произойти. Применяя это определение к области измерений, можно сказать, что при проведении повторных наблюдений в одинаковых условиях каждая из множества возможных незначительных причин случайных изменений результатов может или появиться, или не появиться. В итоге случайные изменения, появляющиеся при каждом наблюдении, могут быть любыми как по размеру, так и по знаку.

Если обозначить истинное значение измеряемой величины через *A,* используя выражение (3.1), можно написать следующее равенство

$$\delta_i = x_i - A, \tag{3.1}$$

где x_i - результат одного наблюдения (i-го);

δ_i - случайная погрешность измерения.

Случайная погрешность измерения – составляющая погрешности результата измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях, проведенных с одинаковой тщательностью, одной и той же физической величины.

Классическое определение вероятности [5]. основано на понятии равновероятности всех возможных исходов данного испытания.

$$P(X) = \frac{m}{n}, \tag{3.2}$$

Вероятность события X есть отношение числа m – благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех возможных элементарных несовместимых и равновозможных исходов испытания.

Пример

В выборке 100 шт имеется 15 валов номинального размера. Вынимая один вал наугад, вероятность нахождения номинального размера составит

$$P(X) = \frac{m}{n} = \frac{15}{100} = 0.15$$

Вероятность события является количественной оценкой объективной возможности его появления. Вероятность достоверного события равна 1, а вероятность невозможного события – 0. Эти события неслучайные. События, вероятности появления которых больше нуля и меньше единицы, являются событиями случайными [4].

Различные значения признака, наблюдающиеся у членов совокупности, называются **вариантами**, а число, показывающее, сколько раз встречается каждый вариант – их **частотами**. Т.е. можно сказать «частота варианта».

Каждому варианту можно поставить в соответствие не частоту, а отношение соответствующей частоты к объему совокупности. Эти числа называются **частостями**. Они выражают долю (удельный вес) в совокупности членов с одинаковыми значениями признака.

Частость иначе называется **относительной частотой**.

Частоты или частости вариантов иначе именуются **весами**.

Из различных типов случайных величин выделяют:

а) дискретные случайные величины;

б) непрерывные случайные величины.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. **Дискретные случайные величины** могут принимать лишь конечное или счетное множество значений [4,5].

Примеры дискретных случайных величин:

1 число деталей, выходящих по своим размерам за контрольные границы в пробе из n штук при статистическом методе контроля качества продукции;

2 число испытаний с определенным эффектом при проведении эксперимента (разрушение образца и т.п.)

Для полной характеристики дискретной случайной величины необходимо и достаточно знать возможные ее значения и вероятность каждого из этих значений. Расположив возможные значения дискретной случайной величины в порядке возрастания и обозначив их через x_1, x_2, x_3, …, x_n а соответствующие им вероятности - через p_1, p_2, p_3, …, p_n, получим таблицу значений в форме таблицы 1. Такая таблица, если она охватывает все возможные значения дискретной случайной величины дает закон распределения этой случайной величины и называется рядом распределения.

Таблица 3.1 – Ряд распределения дискретной случайной величины

x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_1	p_2	p_3	…	p_n

Ряд распределения дискретной случайной величины можно представить в виде графика. В прямоугольной системе координат отмечаются точки с абсциссами x_n и ординатами p_n. Если полученные точки соединить отрезками прямых, то получим ломанную, которая носит название многоугольника распределения. Сумма всех ординат кривой равна 1.

Пример 1

Десять валов выполненных с настройкой станка на диаметр 10 мм после контрольного обмера распределились следующим образом 9,8 мм – 1 шт., 9,9 мм – 2 шт., 10 мм – 4 шт., 10,1 мм – 2 шт., 10,2 мм – 1 шт. Определим вероятность выполнения вала с характерными размерами и построим многоугольник распределения для данной группы событий.

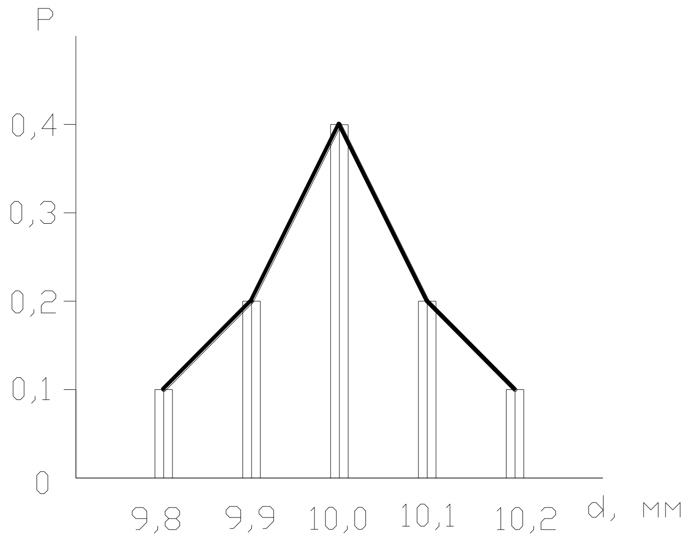


Рисунок 3.1 – Многоугольник распределения дискретной случайной величины (к примеру 1)

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Непрерывные случайные величины [4,5] в отличие от дискретных величин могут принимать любые значения в пределах заданного интервала. Непрерывные величины характеризуются бесчисленным множеством возможных значений. Составить таблицу всех возможных значений непрерывной случайной величины и их вероятностей нельзя, так как число их в любом интервале бесконечно велико. Вероятность любого значения непрерывной величины бесконечно мала. Чтобы выявить распределение вероятностей рассматривают ряд интервалов *Ii,* значений величины и подсчитывают частости попадания $p*$ значений величины на каждый интервал. Таблица, в которой приведены интервалы в порядке их расположения вдоль оси абсцисс и соответствующие частости, называется статистическим рядом.

Таблица 3.2 – Статистический ряд распределения непрерывной случайной величины

Ii	x_1 ; x_2	x_2 ; x_3	…	x_n; x_{n+1}
$p*$	p_1^*	p_2^*	…	p_n^*

Статистический ряд графически представляется в виде ступенчатой кривой – гистограммы. По оси абсцисс откладываются интервалы, являющиеся основаниями прямоугольников. По оси ординат откладываются значения $p*/\Delta I$ (частоть деленная на длину интервала). Высота каждого прямоугольника равна частости, деленной на длину интервала. Площади прямоугольников равны частостям соответствующих интервалов. При равных интервалах высоты пропорциональны соответствующим частостям. При таком способе построения площадь гистограммы равна 1.

Если взять очень малые интервалы, то при уменьшении кривая потеряет ступенчатый характер и перейдет в плавную кривую.

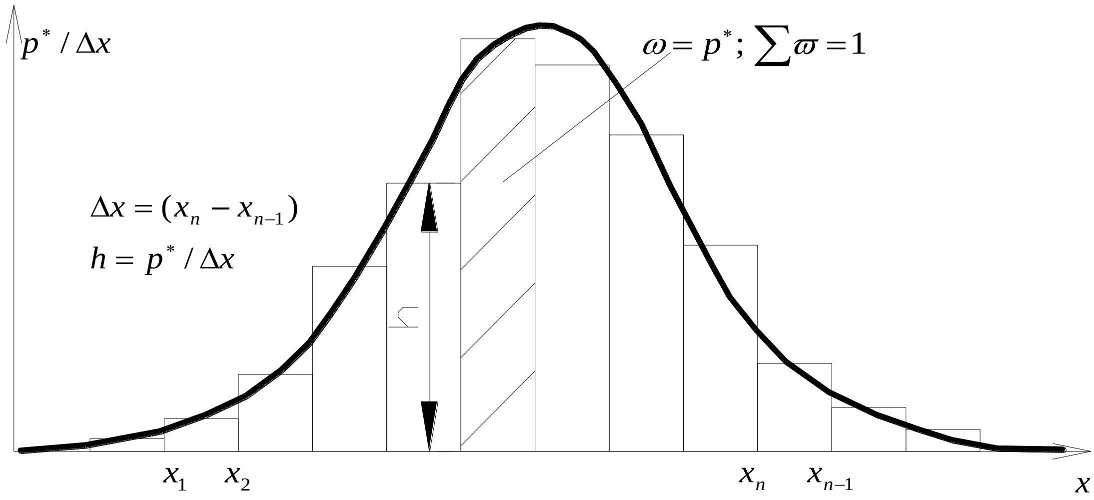


Рисунок 3.2 – Гистограмма распределения непрерывной случайной величины

Примечание – Чтобы определить, какова вероятность того, что значение x будет лежать в пределах x_f-x_q определяют площадь, лежащую между вертикалями, проведенными из точек x_f и x_q (заштрихованную площадь). Эта площадь *равна* вероятности для интервала x_f-x_q.

Пример 2

В мишень диаметром 10 см произведено 13 выстрелов. Частота и частость попадания в интервалы мишени с шагом 2 см показаны в таблице

Таблица

Ii	0 ; 2	2 ; 4	4 ; 6	6 ; 8	8 ; 10
n	1	3	5	3	1
$p*$	0,077	0,231	0,384	0,231	0,077
Высота столбцов гистограммы $h = p^* / \Delta x$ ($\Delta x = (x_n - x_{n-1})$)	0,0385	0,1155	0,192	0,1155	0,0385
Сумма частостей ($p*$) нарастающим итогом	0,077	0,308	0,692	0,923	1,000
Примечание $\sum p* = 1$					

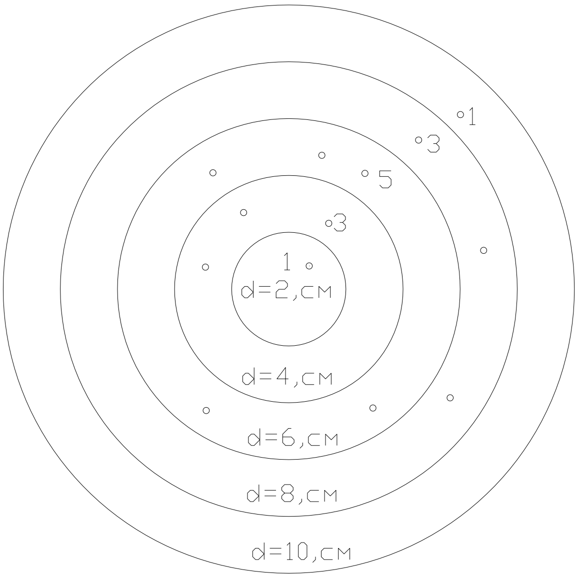


Рисунок 3.3 – К примеру 2

К числу непрерывных случайных величин относят:

- отклонения размеров деталей от номинального размера;
- высоту микропрофиля в данной точке поверхности;
- погрешности измерения.
- и др. (попадание пушечного снаряда в некий промежуток)

Результаты наблюдений при многократных измерениях можно рассматривать как результаты наблюдений над некоторой случайной величиной.

4 ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Ранее отмечалось, что дискретные случайные величины могут быть заданы в виде ряда распределения значений и их вероятностей, а непрерывные случайные величины могут задаваться статистическими рядами распределения с указанием интервалов значений и частостей попадания значений на интервалы.

Существует общий способ задания любых типов случайных величин.

Для описания случайных величин при их теоретическом изучении вводится понятие ***функции распределения***.

4.1 Интегральная функция распределения

Пусть x - какое-нибудь действительное случайное число, а X – случайная величина. Рассматривается событие X<x, которому в поле событий отвечает вероятность P(X<x), являющаяся функцией x.

$$F(x)= P(X<x), \tag{4.1}$$

Функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньшее x называют **функцией распределения вероятностей случайной величины или интегральной функцией распределения** [6].

Интегральная функция распределения определяет вероятность того, что случайная величина X при испытании примет значение, меньшее произвольно изменяемого действительного числа x ($-\infty < x < \infty$) [5].

Геометрически это равенство представляется следующим образом: $F(X)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Случайную величину можно считать заданной, если известна функция ее распределения.

Значения функции распределения принадлежат отрезку (0;1):
$0 \le F(x) \le 1$

Функция $F(x)$- неубывающая, т.е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Если величина дискретна и задана таблицей распределения вида таблицы 1, то функцию $F(x)= P(X<x)$ легко определить для каждого значения x, а именно $F(x)$ в этом случае является суммой вероятностей тех значений X, которые лежат влево от точки x.

В случае дискретной случайной величины $F(x)= P(X<x)$увеличивается скачками каждый раз, когда x при своем изменении проходит через одно из возможных значений x_k величины X. Между двумя соседними значениями величины X функция $F(x)$ постоянна. Поэтому, графиком функции в этом

случае будет ступенчатая кривая (рисунок 4.1).

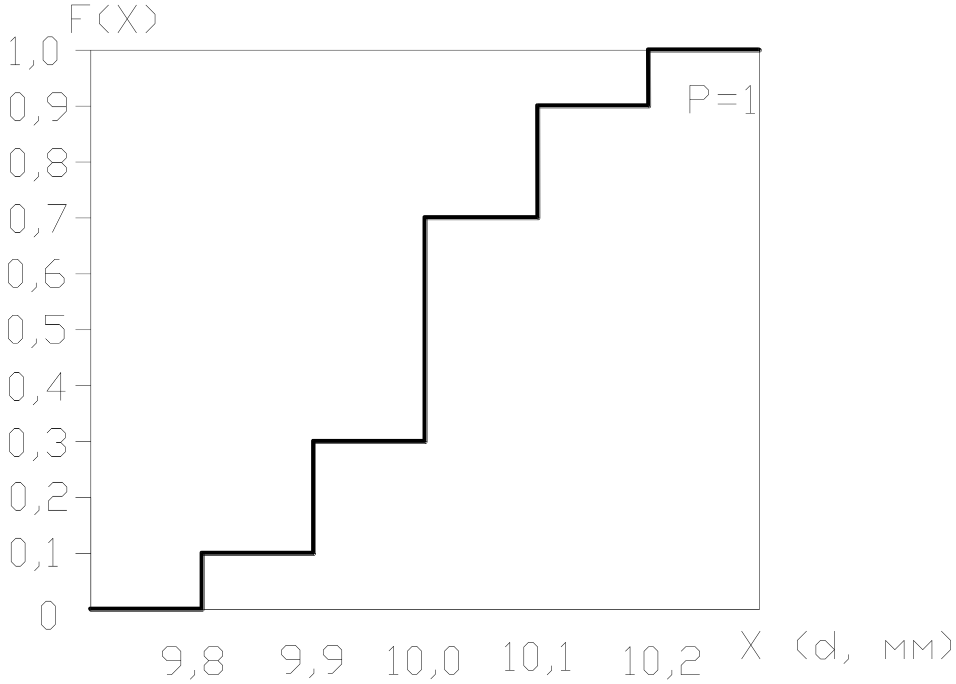


Рисунок 4.1 – Интегральная функция распределения к примеру 1

График интегральной функции распределения непрерывной величины не будет иметь скачков и представляет монотонно возрастающую кривую. Общий вид интегральной функции распределения непрерывной случайной величины показан на рисунке 4.2.

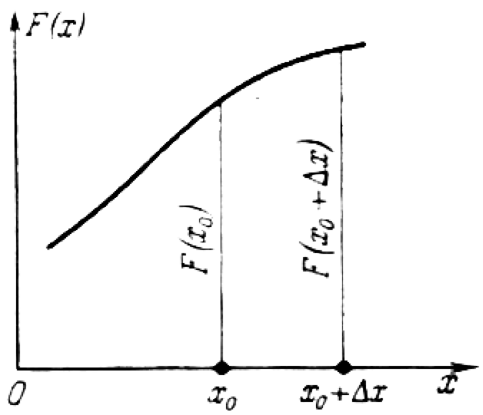


Рисунок 4.2 – График интегральной функции распределения непрерывной случайной величины

Функция распределения непрерывной величины будет дифференцируемой функцией.

Для функции распределения непрерывной величины имеем:

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = P(x_0 \le X < x + \Delta x) \qquad (4.2)$$

т.е. вероятность попадания в интервал равна приращению интегральной функции распределения непрерывной случайной величины.

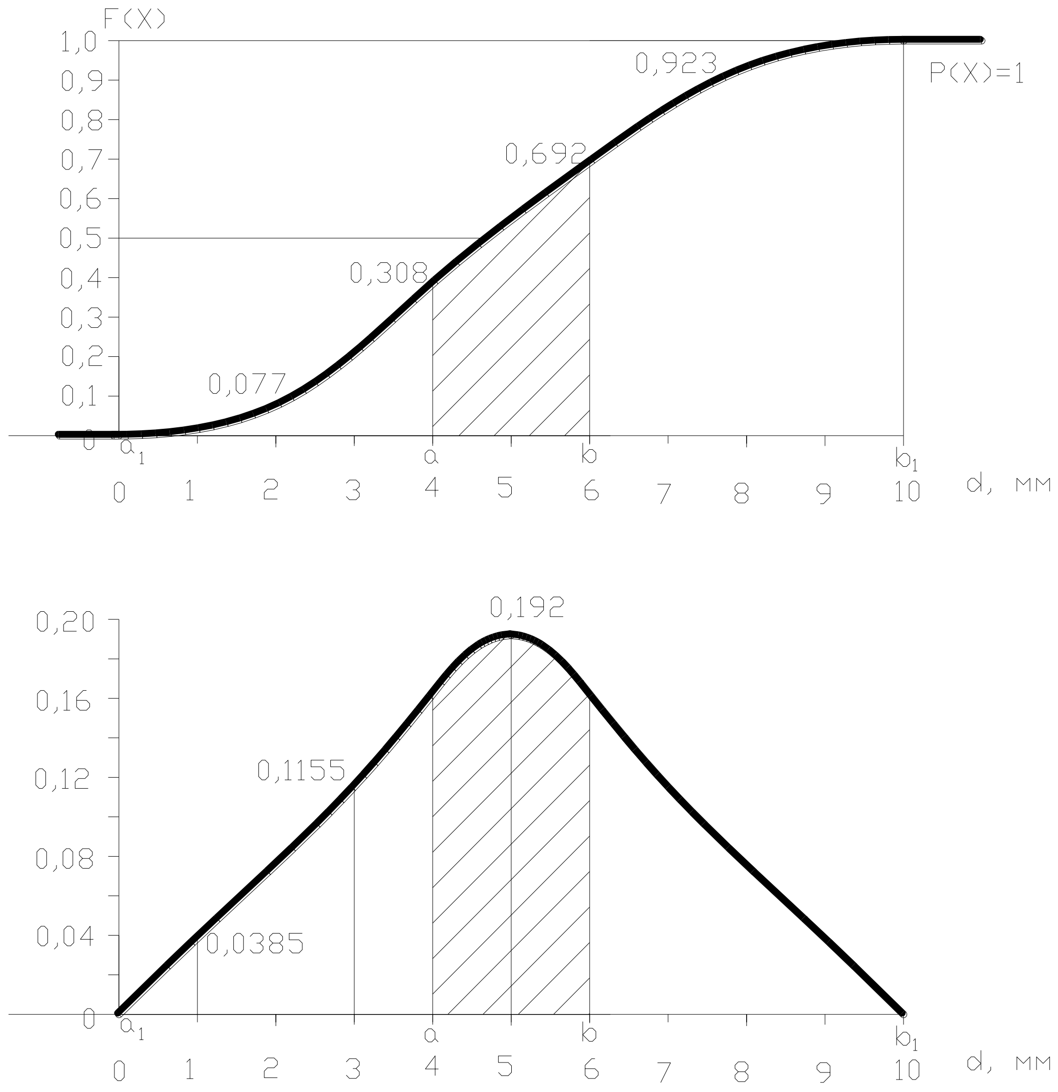


Рисунок 4.3 – Интегральная и дифференциальная функции распределения к примеру 2

4.2 Дифференциальная функция распределения (плотность распределения) случайной величины

Способ задания непрерывных случайных величин с помощью функции распределения (интегральной функции) не является единственным. Непрерывную случайную величину можно задавать также при помощи функции, которую называют **плотностью распределения или плотностью вероятно-**

сти, или дифференциальной функцией [6]..

Первая производная от интегральной функции распределения называется ***дифференциальной функцией распределения*** или ***плотностью вероятности*** $\varphi(x)$ [5].

Для заданного интервала *а – в* вероятность попадания случайной величины Х в этот интервал составит

$$P(a \le X \le в) = F(в) - F(a) = \int_a^b F^{/}(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx \qquad (4.3)$$

Вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, лежащее в границах от *a* до *b*, равна определенному интегралу в пределах от *a* до *b* от **плотности вероятности**.

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал может быть определена как площадь заштрихованной части между границами интервала, кривой и осью абсцисс, что соответствует понятию определенного интеграла.

Для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины плотность распределения неприменима.

Когда вероятность попадания величины Х на произвольное множество определена, говорят, что задан *закон распределения* этой величины [5].

Для дискретной величины для задания распределения достаточно знать таблицу ее распределения. Для непрерывных величин закон распределения задают с помощью плотности вероятности или функции распределения.

Плотность вероятности называют еще *дифференциальным законом распределения*, а функцию распределения – *интегральным законом распределения* [5].

5 ФУНКЦИЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайные величины и их вероятности можно изучать статистическим методом, проводя для этой цели большое число наблюдений для определения законов распределения. Однако, для всех возможных практических случаев такое опытное определение невыполнимо. Поэтому, потребовалось теоретическим путем найти функции распределения, которые можно ожидать для тех или иных типов случайных величин. Если известна качественная форма функции распределения, то достаточно провести небольшое число исследований чтобы определит ее количественно [4].

Для значительного числа встречающихся на практике случайных величин можно ожидать распределения по так называемой функции нормального распределения (закону Гаусса).

К числу случайных величин, распределение, которых подчиняется этому закону относится большая часть (интересующих нас) случайных погрешностей измерения.

Математическое выражение функции нормального распределения

Плотность нормального распределения для любой случайной величины описывается уравнением

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad , \tag{5.1}$$

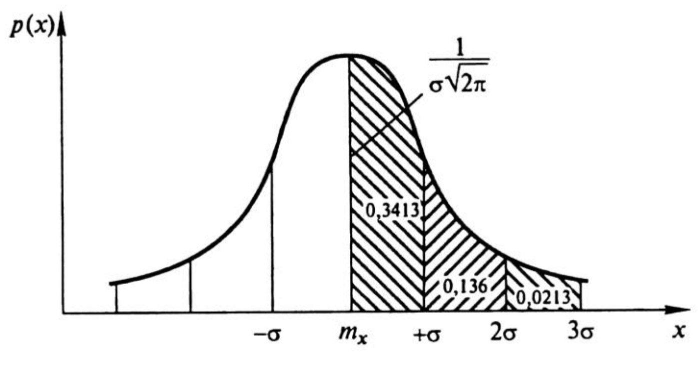
где x – значение случайной величины для которой определяется у;

e – основание натуральных логарифмов, e=2.7183;

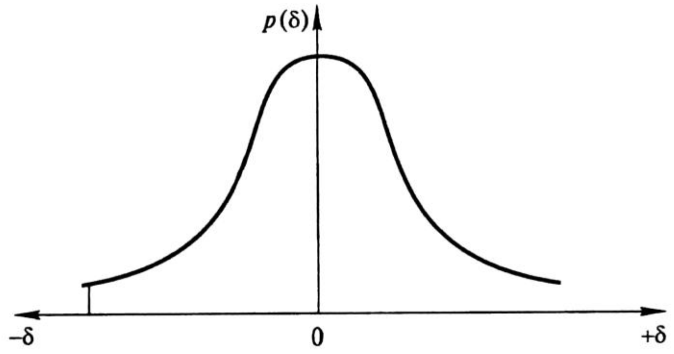
a=M(x) и σ – параметры нормального распределения, соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

Нормальное распределение с произвольными параметрами a=M(x) и σ называют **общим**.

Нормальное распределение с произвольными параметрами a=M(x)=0 и σ=1 называют **нормированным** [6].



а



б

p(x) – дифференциальная функция распределения случайной величины; p(δ) – дифференциальная функция распределения случайной погрешности; σ – среднее квадратическое отклонение; δ – погрешность; m_x – математическое ожидание

Рисунок 5.1 – Кривые нормального распределения случайной величины (*а*) и случайной погрешности (*б*)

Кривая имеет точки перегиба, соответствующие абсциссам $m_x, \pm\sigma$.

Если данную кривую рассматривают, как плотность нормального распределения случайных погрешностей, то начало координат переносят в центр распределения и по оси абсцисс откладывают значения погрешностей.

Математическое ожидание – этот такое значение вокруг которого группируются результаты отдельных наблюдений [4].

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности [7]. Математическое ожидание случайной величины X определяется равенством.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,, \qquad (5.2)$$

Математическое ожидание случайной величины – постоянная величина. Оно показывает, какое значение случайной величины в среднем следует ожидать при испытаниях или наблюдениях (к примеру за уровнями воды, в будущем рассмотреть ряд гидрологических наблюдений за максимальными расходами воды).

В большинстве случаев только математическое ожидание не может в достаточной степени охарактеризовать случайную величину [7].

По математическому ожиданию нельзя судить, какие отклонения от него, хотя бы в среднем возможны. Однако, возможность дать оценку рассеяния имеет важное значение.

Наиболее распространенной мерой рассеивания является «дисперсия» и непосредственно получаемое из нее «среднее квадратическое отклонение».

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения ее от математического ожидания, т.е.

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)(x_i - M(X))^2, \qquad (5.3)$$

Таблица 5.1 – Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X

X	-0,1	-0,01	0	0,01	0,1
$P(x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
$P(x_i)*x_i$	-0,01	-0,002	0	0,002	0,01
M(X)	0				
$(x_i-M(X))^2*P(x_i)$	0,001	0,00002	0	0,00002	0,001
D(X)	0,00204				

Таблица 5.2 – Математическое ожидание и дисперсия случайной величины Y

Y	-20	-10	0	10	20
$P(y_i)$	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3
$P(y_i)*y_i$	-6	-1	0	1	6
M(Y)	0				
$y_i-M(Y))^2*P(y_i)$	120	10	0	10	120
D(Y)	260				

Средним квадратическим отклонением $\sigma(x)$ случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии [7], т.е.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\ , \qquad (5.4)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0.00204} = 0.04517 \qquad \sigma(Y) = \sqrt{260} = 16.12$$

Среднее квадратическое отклонение характеризует степень отклонения случайной величины от ее математического ожидания и имеет размерность значений случайной величины. Если, например, значения случайной величины выражены в гектарах (граммах, метрах и т.п.), то и ее среднее квадратическое отклонение будет выражено в гектарах (граммах, метрах и т.п.) [7].

Понятие математического ожидания и дисперсии, введенные для дискретных случайных величин, распространяются и на непрерывные случайные величины.

Математическим ожиданием $M(X)$ **непрерывной случайной величины X**, плотностью вероятности которой является функция $\varphi(x)$, называется величина интеграла

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx, \tag{5.5}$$

Дисперсией называется величина интеграла

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \varphi(x)dx, \tag{5.6}$$

Имеет место полная аналогия определений характеристик $M(X)$ и $D(X)$ для дискретных и непрерывных случайных величин.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется также, как арифметическое значение квадратного корня из дисперсии [7].

Коэффициент вариации

В качестве относительной характеристики рассеивания используется коэффициент вариации.

$$\upsilon_X = \frac{\sigma_X}{M(X)} \times 100\%, \tag{5.7}$$

Коэффициент вариации показывает, насколько велико рассеивание, характеризующееся средним квадратическим отклонением, по сравнению со средним значением случайной величины [5].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Закон РФ N 4871-I «Об обеспечении единства измерений» от 27.04.1993 г., с изменениями от 10.01.2003 г.

2 Гончаров А.А., Копылов В.Д. Метрология стандартизация и сертификация. – М.: Академия, 2007.

3 Радкевич Я.М., А.Г.Схиртладзе, Б.И.Лактионов. Метрология стандартизация и сертификация. – М.: ВШ, 2004

4 Тюрин Н.И. Введение в метрологию. – М.: Издательство стандартов, 1985.

5 Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.В. Теория вероятности и математическая статистика в технике. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955.

6 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ВШ, 1998

7 Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Статистика, 1979.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Справочные материалы

Таблица А1 – Основные единицы СИ

Величина	Единица измерения	Обозначение	
		русское	международное
Длина	Метр	м	m
Масса	Килограмм	кг	kg
Время	Секунда	с	s
Сила электрического тока	Ампер	А	A
Термодинамическая температура	Кельвин	К	K
Сила света	Кандела	кд	cd
Количество вещества	Моль	моль	mol

Таблица А2 – Дополнительные единицы СИ

Величина	Единица измерения	Обозначение	
		русское	международное
Плоский угол	Радиан	рад	rad
Телесный угол	Стерадиан	ср	sr

Таблица А3 – Производные единицы СИ, имеющие собственные наименования

Величина	Единица измерения	Обозначение	Выражение через другие единицы
Частота	Герц	Гц	$с^{-1}$
Сила	Ньютон	Н	$м \cdot кг \cdot с^{-2}$
Давление	Паскаль	Па	$Н/м^2$
Энергия, работа, количество теплоты	Джоуль	Дж	$Н \cdot м$
Мощность	Ватт	Вт	Дж/с
Количество электричества, электрический заряд	Кулон	Кл	$А \cdot с$
Электрическое напряжение	Вольт	В	Вт/А
Электрическая емкость	Фарад	Ф	Кл/В
Электрическое сопротивление	Ом	Ом	В/А
Электрическая проводимость	Сименс	См	А/В
Поток магнитной индукции	Вебер	Вб	$В \cdot с$
Магнитная индукция	Тесла	Т	$Вб/м^2$
Индуктивность	Генри	Г	Вб/А
Световой поток	Люмен	лм	—
Освещенность	Люкс	лк	—
Активность нуклида	Беккерель	Бк	$с^{-1}$
Доза излучения	Грэй	Гр	$м^2 \cdot с^{-2}$

Таблица А4 – Важнейшие производные единицы СИ для различных областей науки и технике

Величина	Единица измерения	Обозначение	
		русское	между-народное
Сопротивление материалов, строительная механика			
Продольная и поперечная силы в сечении бруса	Ньютон	Н	N
Интенсивность распределенной нагрузки, жесткость при распределении и сжатии, жесткость пружины	Ньютон на метр	Н/м	N/m
Напряжение, касательное напряжение, модуль упругости, модуль упругости при сдвиге, предел прочности, сопротивление материала (нормативное, расчетное)	Паскаль	Па	Pa
Градиент напряжения	Паскаль на метр	Па/м	Pa/m
Угловая деформация (деформация сдвига)	Радиан	рад	rad
Изгибающий момент, крутящий момент	Ньютон-метр	Н · м	N · m
Интенсивность распределения момента	Ньютон-метр на метр	Н · м/м	N · m/m
Жесткость при кручении, жесткость при изгибе	Ньютон-метр на радиан	Н · м/рад	N · m/rad
Гибкость пружины	Метр на ньютон	м/Н	m/N
Напор	Метр	м	m
Производительность (подача) насоса	Кубический метр в секунду	$м^3/с$	m^3/s
Расход материала покрытия	Килограмм на квадратный метр	$кг/м^2$	kg/m^2

Продолжение таблицы А4

Величина	Единица измерения	Обозначение	
		русское	международное
Геометрия и кинематика			
Площадь	Квадратный метр	$м^2$	m^2
Объем, вместимость	Кубический метр	$м^3$	m^3
Частота	Герц	Гц	Hz
Скорость	Метр в секунду	м/с	m/s
Ускорение	Метр на секунду в квадрате	$м/с^2$	m/s^2
Угловая скорость	Радиан в секунду	рад/с	rad/s
Угловое ускорение	Радиан на секунду в квадрате	$рад/с^2$	rad/s^2
Кинематическая вязкость	Квадратный метр на секунду	$м^2/с$	m^2/s
Объемный расход	Кубический метр в секунду	$м^3/с$	m^3/s

Продолжение таблицы А4

Величина	Единица измерения	Обозначение	
		русское	международное
Статика и динамика			
Плотность	Килограмм на кубический метр	кг/м^3	kg/m^3
Удельный объем	Кубический метр на килограмм	м^3/кг	m^3/kg
Удельный вес	Ньютон на кубический метр	Н/м^3	N/m^3
Момент силы, момент пары сил	Ньютон-метр	Н · м	N · m
Момент инерции (динамический момент инерции)	Килограмм-метр в квадрате	кг · м^2	kg · m^2
Момент инерции плоской фигуры	Метр в четвертой степени	м^4	m^4
Момент сопротивления плоской фигуры	Метр в третьей степени	м^3	m^3
Градиент давления	Паскаль на метр	Па/м	Pa/m
Количество движения (импульс)	Килограмм-метр в секунду	кг · м/с	kg · m/s
Момент количества движения (момент импульса)	Килограмм-метр в квадрате в секунду	кг · м^2/с	kg · m^2/s
Импульс силы	Ньютон-секунда	Н · с	N · s
Массовый расход	Килограмм в секунду	кг/с	kg/s
Динамическая вязкость	Паскаль-секунда	Па · с	Pa · s
Текучесть	Паскаль в минус первой степени-секунда в минус первой степени	Па$^{-1}$ · с$^{-1}$	Pa^{-1} · s^{-1}
Ударная вязкость	Джоуль на квадратный метр	Дж/м^2	J/m^2

Таблица А5 – Внесистемные единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ

Величина	Единица измерения	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	Тонна Атомная единица массы	т а.е.м.	10^{3} кг $1{,}66057 \cdot 10^{-27}$ кг (приблизительно)
Время	Минута Час Сутки	мин ч сут	60 с 3600 с 86 400 с
Плоский угол	Градус Минута Секунда	° ′ ″	$(\pi/180)$ рад = $= 1{,}745329 \cdot 10^{-2}$ рад $(\pi/10\,800)$ рад = $= 2{,}908882 \cdot 10^{-4}$ рад $(\pi/648\,000)$ рад = $= 4{,}848137 \cdot 10^{-6}$ рад
Объем	Литр	л	10^{-3} м^{3}
Длина	Астрономическая единица Световой год Парсек	а.е. св. год пк	$1{,}45598 \cdot 10^{11}$ м (приблизительно) $9{,}4605 \cdot 10^{15}$ м (приблизительно) $3{,}0857 \cdot 10^{16}$ м (приблизительно)
Оптическая сила	Диоптрия	дптр	1 м$^{-1}$
Площадь	Гектар	га	10 000 м^{2}
Энергия	Электрон-вольт	э·В	$1{,}60219 \cdot 10^{-19}$ Дж (приблизительно)
Полная мощность	Вольт-ампер	В·А	—
Реактивная мощность	Вар	вар	—

Таблица А.6 – Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц в системе СИ

Множитель	Приставка	Обозначение		Множитель	Приставка	Обозначение	
		русское	международное			русское	международное
10^{18}	Экса	Э	E	10^{-1}	Деци	д	d
10^{15}	Пета	П	P	10^{-2}	Санти	с	c
10^{12}	Тера	Т	T	10^{-3}	Милли	м	m
10^{9}	Гига	Г	G	10^{-6}	Микро	мк	µ
10^{6}	Мега	М	M	10^{-9}	Нано	н	n
10^{3}	Кило	к	k	10^{-12}	Пико	п	p
10^{2}	Гекто	г	h	10^{-15}	Фемто	ф	f
10^{1}	Дека	да	da	10^{-18}	Атто	а	a

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
Лабораторные работы

Лабораторная работа № 1

Статистическая оценка параметров деталей центробежного насоса

Цель работы: развитие навыков применения метрологических методик в инженерных измерениях

Ход работы:

Выполняется многократное измерение диаметра вала насоса штангенциркулем. Заполняется таблица наблюдений (пример заполнения таблицы наблюдений показан в приложении Б, таблица Б.1).

Выполняется визуальный контроль результатов наблюдений на наличие промахов. Результаты-промахи исключаются.

Выполняется статистическая обработка наблюдений. Полученные значения объединяются в группы по вариантам. Определяется частота вариантов.

Значения диаметра вала рассматриваем, как значения дискретной случайной величины X. Получим ряд распределения значений диаметра вала. (Статистическая вероятность значений диаметра для каждого варианта определяется по формуле (3.2). (Пример оформления – таблица Б.2, строки 1-3)

Определяются статистические параметры случайной величины X – диаметра вала: среднее арифметическое значение, математическое ожидание M(X), дисперсия D(X), среднее квадратическое отклонение σ_X, коэффициент вариации υ_X по формулам (5.2), (5.3), (5.4), (5.7) соответственно. Результаты расчетов оформляются в виде таблицы аналогично примеру (таблица Б.2). Выполняется вывод о соотношении величин среднего арифметического значения и математического ожидания ряда наблюдений.

Выполняется построение гистограммы ряда распределения значений диаметра вала, как дискретной случайной величины. Пример построения гистограммы ряда распределения показан на рисунке Б.1.

Выполняется построение графика интегральной функции F(X) распределения значений диаметра вала как дискретной случайной величины. Пример построения графика интегральной функции распределения показан на рисунке Б.2.

На основе расчетного значения математического ожидания диаметра вала определяются значения отклонений диметра от математического ожидания. Отклонения рассматриваются, как непрерывная случайная величина V (строка 9 таблицы Б.2).

Результаты обработки значений отклонений оформляются в виде статистического ряда распределения значений отклонений (пример оформления

– таблица Б.3). Назначается ряд интервалов отклонений, охватывающий весь спектр их возможных значений. Величина интервалов принимается равной цене деления средства измерений. Для последующей числовой обработки принимаются не действительные значения отклонений, а средины интервалов, в которые попали соответствующие значения отклонений. Определяется статистическая вероятность (частость) отклонений для каждого интервала по формуле (3.2).

Определяются статистические параметры случайной величины V– отклонений диаметра вала от математического ожидания: среднее арифметическое значение, математическое ожидание M(V), дисперсия D(V), среднее квадратическое отклонение σ_v по формулам (5.2), (5.3), (5.4), соответственно. Результаты расчетов оформляются в виде таблицы аналогично примеру (таблица Б.3). Выполняется вывод о соотношении величин среднего арифметического значения и математического ожидания величины V, суммы значений величины V.

Строится график интегральной функции распределения F(V) непрерывной случайной величины V (для значений отклонений). Пример построения графика показан на рисунке Б.3.

Выполняется расчет значений дифференциальной функции распределения $\varphi(V)$ непрерывной случайной величины V.

Строится график дифференциальной функции распределения $\varphi(V)$ непрерывной случайной величины V.

С использованием параметров распределения, полученных по данным эксперимента (наблюдений) M(V), σ_v , рассчитываются значения дифференциальной функции распределения отклонений по закону (уравнению) нормального распределения (по зависимости 5.1). Расчет выполняется в табличной форме. Пример расчета показан в таблице Б.4.

Совмещается график дифференциальной функции распределения отклонений, построенный по результатам наблюдений и график этой функции, построенный по уравнению нормального распределения (рисунок Б.4). Выполняется заключение об аналогичности (несоответствии) графиков функций.

Кривая (график) нормального распределения случайной величины применяется для определения вероятности попадания случайной величины на заданный интервал. Границы интервалов по оси x принимаются кратными среднему квадратическому отклонению. Определяется вероятность попадания непрерывной случайной величины V в заданный интервал для трех значений интервалов $(-\sigma;+\sigma)$, $(-2\sigma;+2\sigma)$, $(-3\sigma;+3\sigma)$. Выполняется вывод.

Таблица Б.1 – Результаты наблюдений и первичная обработка

Номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Значение	20,10	20,20	20,12	20,24	20,10	20,10	20,08	20,16	20,10	20,12	20,14	20,10	20,38	20,22	20,00	20,10	20,18	20,06	20,14	20,08	20,06	20,12	20,30	20,14	20,18
Обозначение	×	#			×	×			×			×				×									
Номер	1	1			2	3			4			5				6									
Номер измерения	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Значение	20,08	20,10	20,16	20,06	20,20	20,06	20,04	20,18	20,16	20,04	20,10	20,28	20,06	20,20	20,06	20,10	20,18	20,08	20,30	20,02	20,04	20,08	20,08	20,10	20,10
Обозначение		×			#						×			#		×								×	×
Номер		7			2						8			3		9								10	11
Номер измерения	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
Значение	20,14	20,08	20,26	20,12	20,10	20,20	20,04	20,10	20,00	20,06	20,08	20,04	20,06	20,06	20,06	20,06	20,16	20,00	20,24	20,14	20,16	20,18	20,14	20,04	20,06
Обозначение					×	#		×																	
Номер					12	4		13																	
Номер измерения	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Значение	20,06	20,08	20,12	20,18	20,04	20,06	20,14	20,04	20,08	20,02	20,04	20,08	20,06	20,04	20,04	20,06	20,08	20,06	20,04	20,02	20,06	20,08	20,08	20,06	20,08
Обозначение																									
Номер																									
Номер измерения	101	102	103	104	105																				
Значение	20,06	20,08	20,10	20,04	20,04																				
Обозначение			×																						
Номер			14																						
Примечание – Одинаковым значениям (вариантам) присваиваются условные обозначения и выполняется их последовательная нумерация																									

Таблица Б.2 – Статистическая обработка значений диаметра вала, как дискретной случайной величины X

Значение диаметра вала (x_i) (вариант) , мм	1	20,000	20,020	20,040	20,060	20,080	20,100	20,120	20,140	20,160	20,180	20,200	Сумм.
Число случаев (частота), m_i	2	3,000	3,000	14,000	20,000	16,000	14,000	5,000	7,000	5,000	6,000	4,000	97,000
Вероятность $p(x_i)$	3	0,031	0,031	0,144	0,206	0,165	0,144	0,052	0,072	0,052	0,062	0,041	1,000
Для среднего арифметического	4	60,000	60,060	280,560	401,200	321,280	281,400	100,600	140,980	100,800	121,080	80,800	20,09031
Среднее арифметическое	5	20,090											-
x_i *$p(x_i)$-для расчета мат. ожидания M(X)	6	0,619	0,619	2,892	4,136	3,312	2,901	1,037	1,453	1,039	1,248	0,833	20,09031
M(X)-математическое ожидание	7	20,090											-
Значения интегральной функции распределе-ния F(X) ($p(x_i)$ нарастающим итогом)	8	0,031	0,062	0,206	0,412	0,577	0,722	0,773	0,845	0,897	0,959	1,000	-
Отклонения, $v_i = x_i - M(X)$	9	-0,090	-0,07031	-0,05031	-0,030	-0,010	0,010	0,030	0,050	0,070	0,090	0,110	-
$(x_i - M(X))*m_i$ -для суммы отклонений	10	-0,27	-0,21	-0,70	-0,61	-0,16	0,14	0,15	0,35	0,35	0,54	0,44	0,00
Сумма отклонений	11	0,000											
$p(x_i)*(x_i - M(X))^2$ -для расчета дисперсии	12	0,00025	0,00015	0,00037	0,00019	0,00002	0,00001	0,00005	0,00018	0,00025	0,00050	0,00050	0,0025
Дисперсия D(X)	13	0,0025											-
σ_X - среднее квадратическое отклонение	14	0,0496											-
υ_X -коэффициент вариации	15	0,2468											-

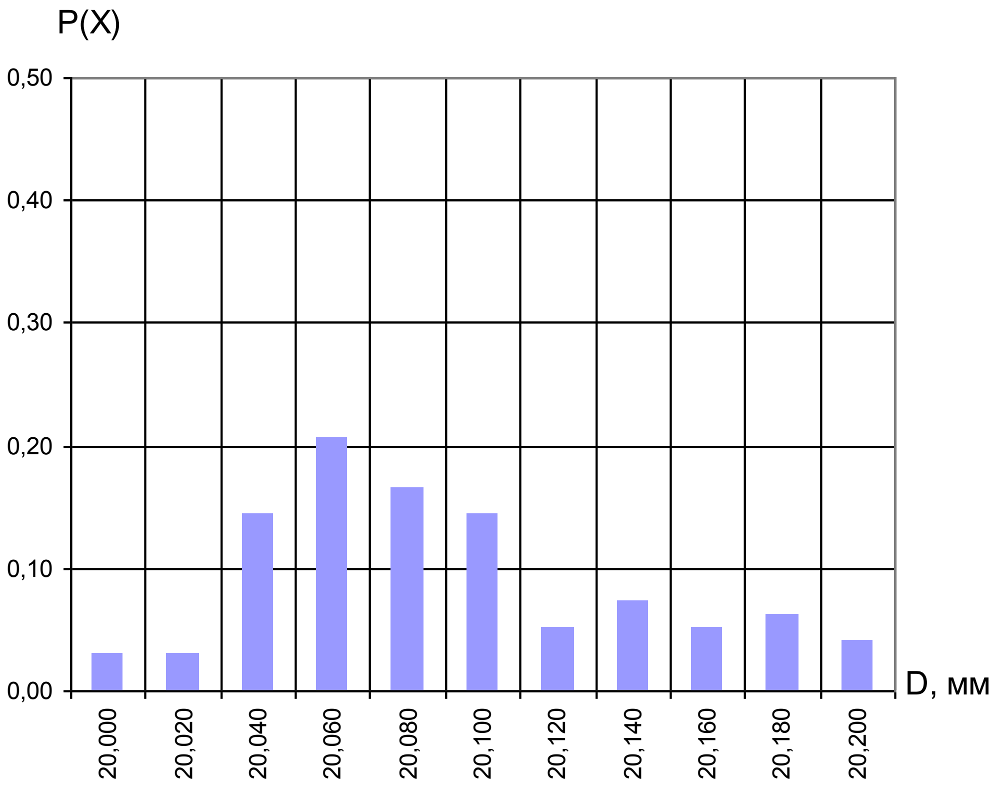


Рисунок Б.1 – Гистограмма ряда распределения значений диаметра вала

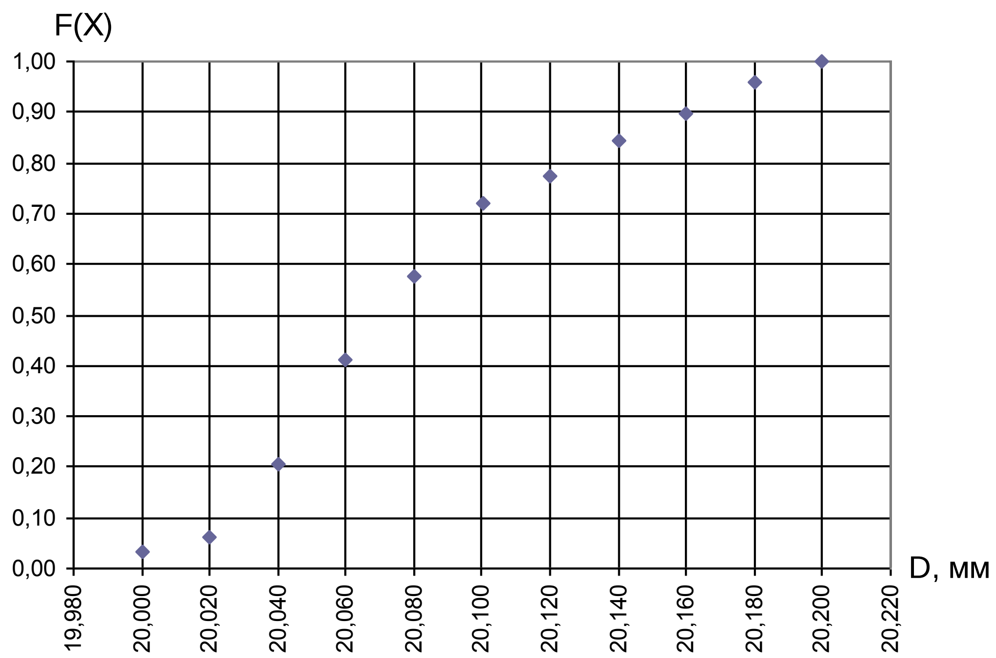


Рисунок Б.2 – График интегральной функции распределения значений диаметра вала, как дискретной случайной величины

Таблица Б.3 – Статистическая обработка значений отклонений диаметра вала от его математического ожидания, как непрерывной случайной величины V

Интервалы отклонений, средины интервалов v_i ,мм	1	-0,100	-0,080	-0,060	-0,040	-0,020	0,000	0,020	0,040	0,060	0,080	0,100	Сумм.
		-0,090	***-0,070***	***-0,050***	***-0,030***	***-0,010***	***0,010***	***0,030***	***0,050***	***0,070***	***0,090***	***0,110***	
		-0,080	-0,060	-0,040	-0,020	0,000	0,020	0,040	0,060	0,080	0,100	0,120	
Отклонения, $v_i = x_i - M(X)$	2	-0,09031	-0,07031	-0,05031	-0,03031	-0,01031	0,00969	0,02969	0,04969	0,06969	0,08969	0,10969	-
Число случаев (частота), m_i	3	3,000	3,000	14,000	20,000	16,000	14,000	5,000	7,000	5,000	6,000	4,000	97,000
Частость $p(v_i)$	4	0,031	0,031	0,1443299	0,206	0,165	0,144	0,052	0,072	0,052	0,062	0,041	1,000
$v_i * p(v_i)$ – для расчета математического ожидания $M(V)$	5	-0,0028	-0,0022	-0,0073	-0,0062	-0,0017	0,0014	0,0015	0,0036	0,0036	0,0055	0,0045	0,000
$M(V)$-математическое ожидание	6	0,000											-
Значения интегральной функции распределения отклонений F(V) ($p(v_i)$ нарастающим итогом)	7	0,031	0,062	0,206	0,412	0,577	0,722	0,773	0,845	0,897	0,959	1,000	-
Значения дифференциальной функции распределения отклонений $\varphi(V)$	8	1,546	1,546	7,216	10,309	8,247	7,216	2,577	3,608	2,577	3,093	2,062	-
$p(v_i)*(v_i - M(V))^2$ -для расчета дисперсии D(V)	9	0,00025	0,00015	0,00036	0,00019	0,00002	0,00001	0,00005	0,00018	0,00025	0,00050	0,00050	-
D(V) – дисперсия	10	0,0025											-
σ_V – среднее квадратическое отклонение	11	0,0496											-

Таблица Б.4 – Расчет значений дифференциальной функции распределения отклонений диаметра вала от его математического ожидания по закону (функции) нормального распределения $$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Расчетные зависимости	1	Средины интервалов отклонений																Сумм	Максимум при v_i=M(V)
		-0,15	-0,13	-0,11	-0,09	-0,07	-0,05	-0,03	-0,01	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	-	0,000
Значение показателя степени e $-\frac{(v_i - M(V))^2}{2\sigma_v{}^2}$	2	-4,575	-3,437	-2,461	-1,647	-0,996	-0,508	-0,183	-0,02	-0,020	-0,183	-0,508	-0,996	-1,647	-2,461	-3,437	-4,575	-	0,000
$\varphi(V) = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v_i - M(V))^2}{2\sigma_v{}^2}}$	3	0,083	0,259	0,687	1,550	2,970	4,839	6,700	7,884	7,884	6,700	4,839	2,970	1,550	0,687	0,259	0,083	-	8,046
$\varphi(V) \times dv$	4	0,002	0,005	0,014	0,031	0,059	0,097	0,134	0,158	0,158	0,134	0,097	0,059	0,031	0,014	0,005	0,002	**0,999**	**-**
Примечание - Правильность расчета подтверждается в случае $\sum(\varphi(v) * dv) = 1$																			

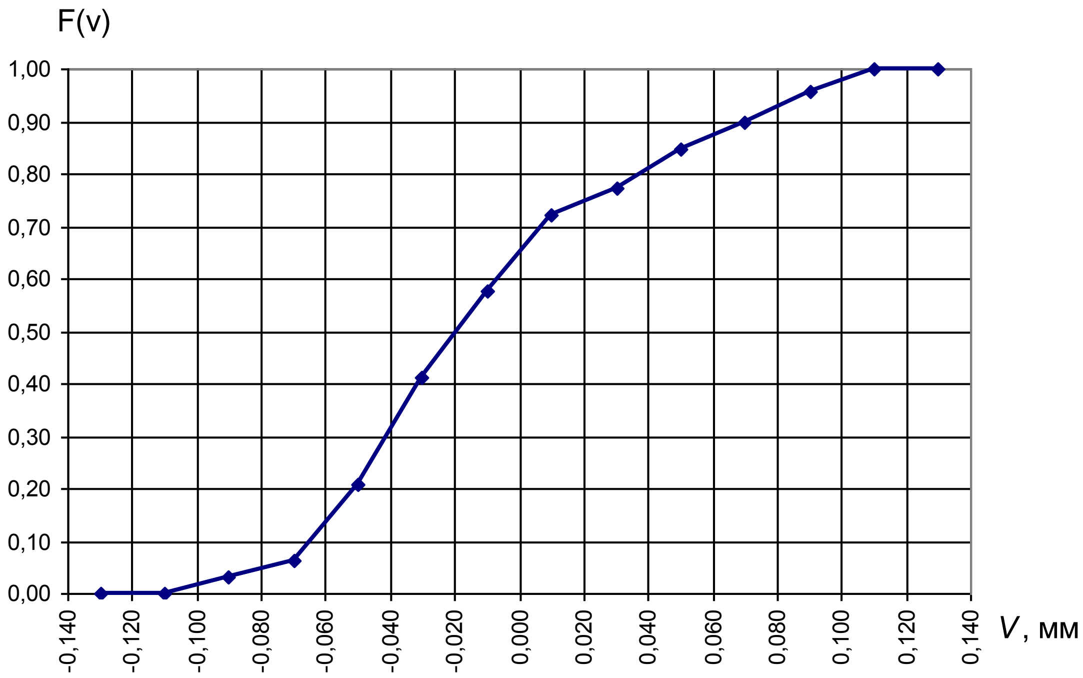


Рисунок Б.3 – График интегральной функции распределения отклонений диаметра вала от математического ожидания, как непрерывной случайной величины

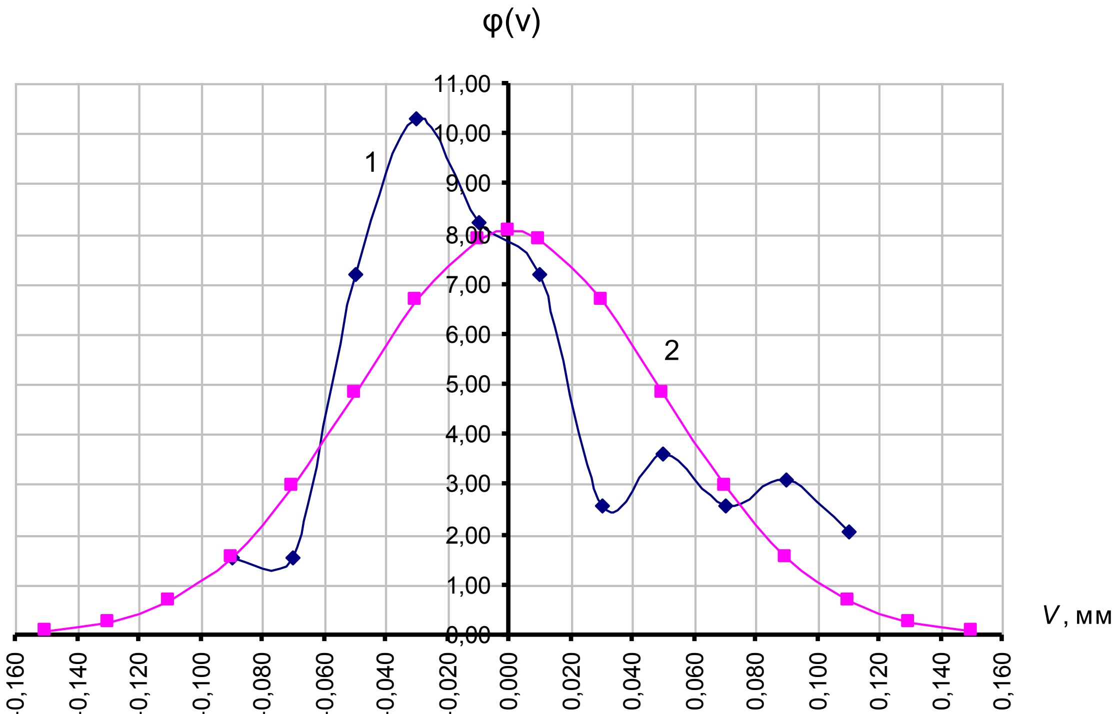


Рисунок Б.4 – Графики дифференциальной функции распределения отклонений диаметра вала от математического ожидания (1 – по результатам наблюдений, 2 – по функции нормального распределения)

Лабораторная работа №2
Критерии оценки грубых погрешностей (промахов)

Цель работы: развитие навыков выявления грубых погрешностей при малом числе измерений (наблюдений)

Теоретический материал

При однократных измерениях обнаружить грубую погрешность достаточно сложно. При многократных измерениях для выявления грубых погрешностей используют статистические критерии. При этом задаются вероятностью $q = 1 - P$ (уровнем значимости) того, что сомнительный результат действительно может иметь место в данной совокупности результатов измерений.

При числе наблюдений *n>20* используют, как правило, критерий трех сигм (критерий Райта). По этому критерию промахом является результат наблюдения x_i, который отличается от среднего $\bar{x}$, более чем на $3\bar{\sigma}$, т.е. $|x_i - \bar{x}| > 3\bar{\sigma}$. Вероятность возникновения такого результата $q < 0{,}003$ (определяется как $1 - 0{,}9973$).

При малом числе наблюдений n<20 применяют критерий Романовского. При этом вычисляют отношение $\left|\frac{x_i - \bar{x}}{\tilde{\sigma}}\right| = \beta$ и сравнивают его с критерием β_T, зависящим от заданного уровня значимости *q* и числа наблюдений *n*, таблица Б.5. При $\beta \geq \beta_T$ результат считается промахом и отбрасывается. Приближенное значение среднего квадратического отклонения определяется по формуле:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{D}} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \qquad (Б.1)$$

Таблица Б.5 – Значения критерия Романовского β_T при числе измерений n от 4 до 20

q	Число измерений *n*											
	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
0,01	1,72	1,96	2,13	2,26	2,37	2,46	2,54	2,66	2,76	2,84	2,90	2,96
0,025	1,71	1,92	2,07	2,18	2,27	2,35	2,41	2,52	2,60	2,67	2,73	2,78
0,05	1,69	1,87	2,00	2,09	2,17	2,24	2,29	2,39	2,46	2,52	2,56	2,62
0,1	1,64	1,73	1,89	1,97	2,04	2,10	2,15	2,23	2,30	2,35	2,40	2,45

Ход работы:

1 Выполняется рад измерений n=10÷20. Заполняется таблица наблюдений. Определяется среднее значение и отклонения от среднего для каждого результата.

2 Определяется приближенное значение среднего квадратического отклонения.

3 Выбирается результат(ты) наблюдений, имеющие наибольшее отклонение от среднего. Для выбранных результатов определяется значение критерия β.

4 Результат, имеющий наибольшее отклонение от среднего, проверяется по критерию Романовского. Задается доверительная вероятность Р=0,95 (или другое значение Р). Определяется уровень значимости возникновения сомнительного результата.

5 Используя данные таблицы Б.5, для числа измерений n выбирается значение β_T. Расчетное значение критерия Рамановского сравнивается с табличным. По результатам сравнения выполняется вывод. Результат измерения относят к промахам или к ряду допустимых значений.

Пример выполнения

Найти условно истинное значение диаметра вала при десятикратном измерении. Определить имеют ли место промахи при доверительной вероятности 0,95.

Таблица Б.6 – Обработка результатов при малом числе измерений

Номер измерения	Результат измерения x_i	Отклонения от среднего	$(x_i - \bar{x})^2$
1	19.98	-0.14	0.0196
2	20.02	-0.10	0.0100
3	20.04	-0.08	0.0064
4	20.10	-0.02	0.0004
5	20.12	0.00	0.0000
6	20.12	0.00	0.0000
7	20.14	0.02	0.0004
8	20.16	0.04	0.0016
9	20.40	0.28	0.0784
10	20.12	0.00	0.0000
Сумм	*201.2*	*0.00*	*0.1168*
Среднее	*20.12*		

1 Определяем отклонения от среднего.

2 Определяем приближенное значение среднего квадратического отклонения

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{D}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.1168}{9}} = 0{,}114$$

3 Проверяем по критерию Романовского результат 9 имеющий наибольшее отклонение от среднего, находим

$$\left|\frac{x_i - \bar{x}}{\tilde{\sigma}}\right| = \beta = \left|\frac{20.40 - 20.12}{0{,}114}\right| = 2{,}46$$

4 Задаемся доверительной вероятностью Р=0,95. В этом случае уровень значимости возникновения сомнительного результата составит

$$q = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$$

5 Используя данные таблицы Б.5, для числа измерений n=10 находим $\beta_T = 2{,}29$. Расчетное значение критерия Рамановского $\beta > \beta_T$, следовательно, результат №9 считается промахом и отбрасывается.