МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени И.Т. Трубилина»

КАФЕДРА СТАТИСТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Методические рекомендации и задания
для контрольной работы
студентам заочного факультета

Краснодар
КубГАУ
2017

Основы финансовых вычислений: метод. рекомендации и задания для контрольной работы студентам заочного факультета по направлению 38.03.01 «Экономика» / П.С. Бондаренко, Н.Г. Давыденко, А.Е. Жминько, И.А. Кацко, А.Е. Сенникова, Н.Н. Яроменко - Краснодар

Введение

В рыночной экономике от специалиста требуется умение оценивать возможные варианты финансовых последствий при совершении любой сделки. При этом следует учитывать, что принятие управленческих решений финансового характера всегда осуществляется в условиях неопределенности.

Финансовые вычисления представляют собой учебную дисциплину, в которой раскрывается методика количественного анализа финансовых, кредитных и банковских операций. Овладение методами и приемами финансовых вычислений является важной составляющей в профессиональной подготовке экономиста, банковского работника, предпринимателя, менеджера и других специалистов.

Цель изучения курса «Основы финансовых вычислений» – дать целостную концепцию количественного финансового анализа условий и результатов финансово-кредитных и коммерческих сделок, связанных с предоставлением денег в долг.

Финансовые вычисления охватывают круг задач, в которых присутствуют основные параметры финансовых сделок: величина капитала (кредита, депозита, ссуды), сроков финансовых операций, процентных ставок. Эти параметры связаны между собой определенной функциональной зависимостью. Финансовые вычисления устанавливают количественные связи между параметрами финансовых операций.

Рекомендуется следующий порядок изучения дисциплины: ознакомиться с программой, изучить рекомендованную литературу, разобраться с методикой решения типичных задач, выполнить письменную контрольную работу.

Рекомендуемая литература

1. Ильичев Е.В. Элементарные основы квантовых вычислений. Упражнения и задачи [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие/ Е.В. Ильичев, Я.С. Гринберг— Электрон. текстовые данные. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014. — 28 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45209.html. — ЭБС «IPRbooks», по паролю
2. Синицын Е.В. Приемы финансовых вычислений в условиях определенности. Практикум [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Е.В. Синицын— Электрон. текстовые данные. — Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2014. — 64 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/68279.html. — ЭБС «IPRbooks», по паролю.
3. Учебно-методическое пособие по дисциплине Основы финансовых вычислений [Электронный ресурс]/ — Электрон. текстовые данные.— М.: Московский технический университет связи и информатики, 2016.— 40 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/61519.html.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.

Контрольная работа включает 10 задач небольшого объёма каждая, охватывающих основное содержание дисциплины. Она выполняется в отдельной тетради, желательно оставлять поля на страницах для замечаний рецензента. Задачи решаются в следующей последовательности: записывается условие конкретной задачи, в которой общие обозначения заменяются конкретными значениями параметров определенного варианта; приводится подробное решение задач с необходимыми пояснениями, формулами, расчётами. В конце каждой задачи пишется краткий вывод или ответ. После решения всех задач приводится список использованной литературы, ставится дата выполнения контрольной работы и личная подпись студента.

Варианты контрольной работы и номера задач

Первая буква фамилии студента	Номера задач								
А,Б	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
В,Г	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
Д,Е,Ж,З	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
И,К	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
Л,М	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
Н,О	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
П,Р	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
С,Т	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
У,Ф,Х,Ц	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
Остальные буквы	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Тема 1. Простые проценты

В финансово-кредитных расчетах используются следующие основные понятия и обозначения:

P – величина капитала, предоставленного в долг в виде депозита, ссуды, векселя, облигации, товарного кредита и т.п.;

I – процентный доход (проценты), это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг;

i – процентная ставка, это относительная величина дохода от капитала за определенный отрезок времени, обычно год;

n (t) – срок ссуды в годах (месяцах, днях);

S – наращенная сумма денег, полученная прибавлением к первоначальной величине капитала (P) начисленных процентов (I) или умножением первоначальной суммы долга на множитель наращения.

Простые проценты – это метод расчета дохода кредитора от предоставления денег в долг заемщику, при котором проценты начисляются на одну и ту же величину капитала в течение всего срока ссуды.

По условиям финансового договора процентные деньги могут выплачиваться кредитору по мере их начисления в каждом периоде или вместе с основной суммой долга по истечении всего срока договора. В последнем случае сумма, получаемая кредитором, называется наращенной суммой, а метод начисления процентов – декурсивным (последующим).

Наращенная сумма, с использованием простых процентов при сроке финансовой операции n лет, определяется по формуле:

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni) . \qquad (1)$$

Если срок финансовой сделки не равен целому числу лет, то периоды начисления процентов выражают дробным числом, как отношение числа дней функционирования сделки к календарному числу дней в году. В этом случае наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P(1 + \frac{t}{K} i) , \qquad (2)$$

где t – число дней функционирования сделки (число дней, на которое предоставлена ссуда),

К – временная база (число дней в году, составляющая 365 или 366).

В мировой практике различают три метода процентных расчётов, которые зависят от выбранного периода начисления:

а) «Английская практика», учитывающая продолжительность года К=365 дней, а продолжительность месяцев – в днях, соответствующих календарному исчислению, т. е. 28, 29, 30 и 31 день;

б) «Французская практика», когда продолжительность года принимается равной К=360 дням, а продолжительность месяцев в днях соответствует календарному исчислению;

в) «Германская практика», при которой продолжительность года К=360 дней, продолжительность месяца равна 30 дням, являющийся наименее точным.

При начислении процентов день выдачи и день погашения ссуды принимают за один день.

При установлении переменной процентной ставки наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_m i_m) = P(1 + \sum_{j=1}^{m} n_j i_j), \qquad (3)$$

где i_j - ставка простых процентов в периоде j;

n_j - продолжительность j-ого периода;

m - число периодов начисления процентов;

$j = 1,2,...,m.$

Наряду с декурсивным, применяется антисипативный (предварительный) метод, который сводится к тому, что проценты начисляются в начале расчетного периода, при этом за базу (100 %) принимается сумма погашения долга (наращенная сумма *S*) и используется не процентная, а учетная ставка (*d*). Расчёт наращенной суммы производится по формуле:

$$S = \frac{P}{1 - nd}, \qquad (4)$$

где d - учетная ставка, выраженная десятичной дробью.

Срок ссуды при наращении по простым процентам определяется в годах (n) и днях (t)

$$n = \frac{S-P}{pi} = \frac{S/P-1}{i}, n = \frac{S-P}{Sd} = \frac{1-P/S}{d}; \qquad (5)$$

$$t = \frac{S-P}{pi} \cdot K; t = \frac{S-P}{Sd} \cdot K. \qquad (6)$$

Если срок финансовой операции выражается в днях, то наращенная сумма при начислении простых антисипативных процентов будет определяться по формуле:

$$S = \frac{P}{1 - \frac{t}{K} \cdot d}. \qquad (7)$$

Потребительский кредит предоставляется населению для покупки предметов личного потребления. Существуют различные формы потребительского кредита, отличающиеся друг от друга методами и сроками погашения. Одним из них является метод, при котором суммы процентных платежей изменяются от периода к периоду по мере изменения сроков погашения ссуды (т.е. проценты в каждом периоде начисляются на остаток основной суммы долга).

Кредит в условиях рынка выступает в различных формах. Одной из таких форм является коммерческий кредит, распространенным инструментом которого служит коммерческий вексель.

Вексель – это особый вид письменного долгового обязательства, дающий его владельцу бесспорное право требовать, по истечении указанного в нем срока, уплаты денег с должника.

Векселедержатель (кредитор) или владелец иных долговых обязательств, в случае необходимости получения денег по векселю или другим долговым обязательствам, ранее указанных в них сроков, может продать его банку или другому субъекту по пониженной цене, т.е. по цене, ниже номинальной стоимости векселя, указанной в нем. Такая сделка носит название учета векселя или дисконтирования. Сумма, полученная владельцем векселя в результате этой сделки, называется дисконтированной величиной. Она ниже номинальной стоимости векселя на величину процентного платежа, начисленного со дня дисконтирования до дня, ранее предусмотренного для погашения векселя.

Дисконтом называется разность между номинальной стоимостью долгового обязательства и суммой, полученной векселедержателем в результате учета векселя.

При банковском дисконтировании учет векселя осуществляется с использованием учетной ставки *d*, по формулам:

$$P' = S(1 - nd) \text{ или } P' = S(1 - \frac{t}{K}d). \qquad (8)$$

При математическом дисконтировании используется процентная ставка *i*, а расчет параметров сделки ведется по формулам:

$$P' = \frac{S}{1 + ni} \quad \text{или} \quad P' = \frac{S}{1 + \frac{t}{K} \cdot i}, \qquad (9)$$

где P' – сумма, полученная владельцем векселя в результате его учета (дисконтированная величина векселя);

t – число дней между днем дисконтирования и днем, ранее предусмотренным для погашения веселя;

К – временная база (как правило, К=360 дней).

Разность между номинальной стоимостью векселя и его дисконтированной величиной является дисконтом (дисконт – это доход субъекта финансовой сделки, принявшего к учету вексель, т.е. дисконт – это доход банка).

$$D' = S - P' \qquad (10)$$

Пример 1. Банк выдал клиенту ссуду в размере 400 тыс. руб. сроком на 9 месяцев. Определить наращенную сумму, если применялась: а) процентная ставка 12% годовых; б) учетная ставка 12% годовых. За какой срок наращенная сумма увеличится до 500 тыс. руб.

Решение: P = 400 тыс. руб.; i=0,12; d=0,12; $n = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Наращенную сумму долга найдем по формулам (1) и (4):

а) $S = P(1 + ni) = 400000 \cdot (1 + 0{,}75 \cdot 0{,}12) = 436000{,}00$ руб;

б) $S = \frac{P}{1 - nd} = \frac{400000}{1 - 0{,}75 \cdot 0{,}12} = 439560{,}44$ руб.

Сравнение показывает, что для клиента целесообразнее получать кредит по процентной, а не учетной ставке при прочих равных условиях.

Срок ссуды найдем по формуле (5), где S = 50 тыс. руб.

$$n = \frac{S-P}{pi} = \frac{500-400}{400 \cdot 0{,}12} = 2{,}08; \quad n = \frac{S-P}{Sd} = \frac{500-400}{500 \cdot 0{,}12} = 1{,}67.$$

Срок ссуды составляет 2,08 года при наращении по процентной ставке и 1,67 года по учетной ставке.

Ответ: а) S = 436000 руб.; б) S = 439560,44 руб.; n = 2,08 года; n = 1,67 года.

Пример 2. Банк выдал клиенту кредит 20 января 2013 г. в размере 100 тыс. руб. Срок возврата кредита 17 июня. Процентная ставка установлена 10,5% годовых. Наращенную сумму долга, подлежащую возврату, рассчитать тремя методами.

Решение.

1. Определяем точное число дней ссуды :

январь – с 20-го по 31-е включительно	– 12 дней;
февраль	– 28 дней;
март	– 31 день;
апрель	– 30 дней;
май	– 31 день;
июнь	– 17 дней.
Итого	– 149 дней.

Так как при начислении процентов день выдачи и день погашения ссуды принимают за один день, то $t_{точное} = 149 - 1 = 148$ дней.

2. Определяем приближенное число дней ссуды (продолжительность каждого месяца принимается за 30 дней):

январь – с 20-го по 30-е включительно	– 11 дней;
февраль	– 30 дней;
март	– 30 дней;
апрель	– 30 дней;
май	– 30 дней;
июнь	– 17 дней.
Итого	– 148 дней.

$t_{приближенное} = 148 - 1 = 147$ дней.

Возможные варианты расчета наращенной суммы:

а) по точным процентам с точным числом дней ссуды («английская практика»);

$$S = 100000 \cdot (1 + \frac{148}{365} \cdot 0{,}105) = 104258 \text{ руб.}$$

б) по обыкновенным процентам с точным числом дней ссуды («французская практика»):

$$S = 100000 \cdot (1 + \frac{148}{360} \cdot 0{,}105) = 104317 \text{ руб.}$$

в) по обыкновенным процентам с приближенным числом дней ссуды («германская практика»):

$$S = 100000 \cdot (1 + \frac{147}{360} \cdot 0{,}105) = 104288 \text{ руб.}$$

Ответ: а) S = 104258 руб.; б) S = 104317 руб.; в) S = 104288 руб.

<u>Пример 3</u>. Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту: первое полугодие процентная ставка 7% годовых, каждый следующий квартал ставка возрастает на 1,5%. Проценты начисляются только на первоначально внесенную сумму вклада. Определить наращенную за год сумму, если вкладчик поместил 600 тыс. руб.

<u>Решение.</u>

P = 600000 руб., $n_1 = 0{,}5$; $n_2 = n_3 = 0{,}25$; $i_1 = 0{,}07$; $i_2 = 0{,}085$ $i_3 = 0{,}1$

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_m i_m) =$$

$$= 600000 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}07 + 0{,}25 \cdot 0{,}085 + 0{,}25 \cdot 0{,}1) = 648750 \text{ руб.}$$

Ответ: S = 648750 руб.

<u>Пример 4</u>. Финансовой организацией клиенту предоставлен потребительский кредит в размере 180 тыс. руб. на срок 12 месяцев под 10 % годовых с ежемесячным погашением кредита. Составить план погашения кредита.

<u>Решение.</u> Предположим, что величина кредита P, и он должен выплачиваться равными месячными платежами m раз с начислением процентов по годовой ставке i.

Тогда, процентный платеж составит:

в первом месяце $I_1 = \dfrac{Pi}{1200}$

во втором месяце $I_2 = (P - \dfrac{P}{m}) \cdot \dfrac{i}{1200} = \dfrac{Pi}{1200}(1 - \dfrac{1}{m})$;

в третьем месяце $I_3 = (P - 2\dfrac{P}{m}) \cdot \dfrac{i}{1200} = \dfrac{Pi}{1200}(1 - \dfrac{2}{m})$;

и так далее.

Общая величина процентных выплат определяется по формуле

$$I = \frac{Pi(m+1)}{2400}. \qquad (11)$$

Ежемесячная выплата основного долга составит

$$q = \frac{P}{m}. \qquad (12)$$

По условию задачи P = 180000 руб.; m = 12 месяцев; i=10%.

Ежемесячная величина основного долга: $q = \dfrac{P}{m} = \dfrac{180000}{12} = 15000$ руб.

Ежемесячные процентные платежи:

$$I_1 = \frac{P \cdot i}{1200} = \frac{180000 \cdot 10}{1200} = 1500 \text{ руб.};$$

$$I_2 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{1}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{1}{12}) = 1375 \text{ руб.};$$

$$I_3 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{2}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{2}{12}) = 1250 \text{ руб.};$$

$$I_4 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{3}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{3}{12}) = 1125 \text{ руб.};$$

$$I_5 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{4}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{4}{12}) = 1000 \text{ руб.};$$

$$I_6 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{5}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{5}{12}) = 875 \text{ руб.};$$
$$I_7 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{6}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{6}{12}) = 750 \text{ руб.};$$
$$I_8 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{7}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{7}{12}) = 625 \text{ руб.};$$
$$I_9 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{8}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{8}{12}) = 500 \text{ руб.};$$
$$I_{10} = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{9}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{9}{12}) = 375 \text{ руб.};$$
$$I_{11} = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{10}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{10}{12}) = 250 \text{ руб.};$$
$$I_{12} = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{11}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{11}{12}) = 125 \text{ руб.}$$

Сумма процентных платежей за пользование кредитом составит:

$$I = \frac{Pi(m+1)}{2400} = \frac{180000 \cdot 10(12+1)}{2400} = 9750 \text{ руб.}$$

Расчеты по погашению кредита представим в таблице 1.

Таблица 1 - План погашения кредита, руб.

Месяц	Непогашенная сумма основного долга	Процентный платеж	Месячная выплата основного долга	Сумма месячного погасительного платежа
	180000			
1	165000	1500	15000	16500
2	150000	1375	15000	16375
3	135000	1250	15000	16250
4	120000	1125	15000	16125
5	105000	1000	15000	16000
6	90000	875	15000	15875
7	75000	750	15000	15750
8	60000	625	15000	15625
9	45000	500	15000	15500
10	30000	375	15000	15375
11	15000	250	15000	15250
12	–	125	15000	15125
ИТОГО	–	9750	180000	189750

Пример 5. Владелец векселя номинальной стоимостью 65000 руб. и сроком обращения 1 год предъявил его банку- эмитенту для учета за 90 дней до даты погашения. Банк учел его по учетной ставке 12 %. Определить дисконтированную величину (P') и величину дисконта (D').

Решение. По условию S=65000 руб., t=90 дней, K=360 дней, d=0,12.

$$P' = S(1 - \frac{t}{K} \cdot d) = 65000 \cdot \left(1 - \frac{90}{360} \cdot 0{,}12\right) = 63050 \text{ руб.}$$

D'= $D' = S - P' = 65000 - 63050 = 1950$ руб.

Ответ: P'=63050 руб.; D'=1950 руб.

Тема 2. Сложные проценты

В практике финансовых операций часто применяют сложные проценты, когда начисленный в данном расчетном периоде процентный платеж прибавляется к предыдущему капиталу, а процентный платеж на следующий расчетный период рассчитывается на уже наращенную величину капитала .

При антисипативном методе расчета процентный платеж начисляется в начале каждого расчетного периода, а при декурсивном способе – в конце расчетного периода. В практике обычно применяется декурсивный способ начисления процентов.

При *декурсивном* способе наращенная сумма (S) находится по формуле

$$S = P(1+i)^n \quad , \qquad (13)$$

где i – сложная ставка процента, выраженная десятичной дробью; n – число лет наращения (может быть целым числом или дробным); P – первоначальная величина капитала.

Если в течение года начисление процентов производится «m» раз, то процентная ставка называется номинальной и обозначается j. Тогда наращенная сумма за весь расчетный период

$$S = P(1+\frac{j}{m})^{n \cdot m} \quad , \qquad (14)$$

где m – частота начислений процентов в году (*ежегодное* начисление $m = 1$; *по полугодиям* $m = 2$; *ежеквартальное* $m = 4$; *ежемесячное* $m = 12$; *ежедневное* m=365).

Срок ссуды при наращении по сложной ставке процента находится по формулам :

$$n = \frac{\lambda n(S:P)}{\lambda n(1+i)} \qquad (15), \qquad\qquad n = \frac{\lambda n(S:P)}{m \cdot \lambda n(1+\frac{j}{m})} \ . \qquad (16)$$

При *антисипативном* способе начисления процентов наращение осуществляется по сложной учетной ставке по формулам:

а) при ежегодном начислении процентов (m=1)

$$S = \frac{P}{(1-d)^n} = P(1-d)^{-n}; \qquad (17)$$

б) при m-разовом начислении процентов в году

$$S = \frac{P}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}} = P(1-\frac{f}{m})^{-mn}. \qquad (18)$$

Дисконтировани*е* по сложной ставке процента может быть математическим и банковским.

Математическое дисконтирование заключается в определении современной величины капитала P по значению наращенной суммы S с использованием сложной ставки декурсивных процентов. Современная стоимость капитала составит:

а) при ежегодном начислении процентов

$$P' = \frac{S}{(1+i)^n}; \tag{19}$$

б) при m-разовом начислении процентов в году

$$P' = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}. \tag{20}$$

Банковское дисконтирование по сложной учетной ставке может быть использовано при учете среднесрочных и долгосрочных долговых обязательств. Дисконтированная величина долгового обязательства составит:

а) при ежегодном начислении процентов

$$P' = S(1-d)^n; \tag{21}$$

б) при m-разовом начислении процентов

$$P' = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}. \tag{22}$$

Дисконт (D') определяется по формуле $D' = S - P'$.

<u>Пример 6</u>. Клиент имеет в коммерческом банке первоначальную сумму 100 тыс. руб. Годовая сложная процентная ставка составляет 8%.

Определить наращенную сумму, если периоды наращения составляют: а) 90 дней; б) 9 месяцев; в) один год; г) пять лет.

Задачу решить при условии, что начисление процентов производилось: а) один раз в году; б) ежеквартально.

Определить, через какой срок первоначальная сумма денег клиента удвоится.

<u>Решение</u>. P=100000 руб.; i=0,08; $n_1 = \frac{90}{360} = 0{,}25$; $n_2 = \frac{9}{12} = 0{,}75$; $n_3 = 1$; $n_4 = 5$; S=?

1. Наращенная сумма при ежегодном начислении процентов (m=1) будет определяться по формуле (11):

$$S = P(1+i)^n.$$

а) $S_1 = 100000 \cdot (1+0{,}08)^{0{,}25} = 101943$ руб.;

б) $S_2 = 100000 \cdot (1+0{,}08)^{0{,}75} = 105942$ руб.;

в) $S_3 = 100000 \cdot (1+0{,}08) = 108000$ руб.;

г) $S_4 = 100000 \cdot (1+0{,}08)^5 = 146933$ руб.

2. Наращенная сумма при ежеквартальном начислении процентов (m=4)будет определяться по формуле (12):

$$S = P(1+\frac{j}{m})^{n \cdot m}.$$

$$\text{а) } S_1 = 100000 \cdot (1+\frac{0{,}08}{4})^{0{,}25 \cdot 4} = 102000 \text{ руб.};$$

$$\text{б) } S_2 = 100000 \cdot (1+\frac{0{,}08}{4})^{0{,}75 \cdot 4} = 106121 \text{ руб.};$$

$$\text{в) } S_3 = 100000 \cdot (1+\frac{0{,}08}{4})^{4} = 108243 \text{ руб.};$$

$$\text{г) } S_4 = 100000 \cdot (1+\frac{0{,}08}{4})^{5 \cdot 4} = 148595 \text{ руб.}$$

Вывод: с увеличением частоты начислений процентов в течение срока ссуды, при прочих равных условиях, возрастает и наращенная сумма.

Найдем срок, необходимый для удвоения первоначального капитала (S:P=2) при наращении по:
а) ставке сложных процентов

$$n = \frac{\lambda n(S:P)}{\lambda n(1+i)} = \frac{\lambda n 2}{\lambda n 1{,}08} = 9 \text{ лет};$$

б) номинальной ставке сложных процентов

$$n = m\frac{\lambda n(S:P)}{m \cdot \lambda n(1+\frac{j}{m})} = \frac{\lambda n 2}{4 \cdot \lambda n(1+\frac{0{,}08}{4})} = 8{,}75 \text{ года};$$

Значит, первоначальная сумма возрастает в два раза за срок 8,75 или 9 лет.

Пример 7. Финансовой организацией выдан клиенту кредит в размере 250 тыс. руб. по учетной ставке 10 % годовых. Определить наращенную сумму долга, если срок возврата кредита составляет: а) шесть месяцев; б) два года. Проценты начисляются: а) один раз в году; б) по полугодиям.

Решение.

По условию задачи P=250000 руб.; d=0,1; $n_1 = \frac{6}{12} = 0{,}5$; $n_2 = 2$.

1. Наращенная сумма сложных антисипативных процентов при ежегодном начислении процентов (m=1) будет определяться по формуле (17):

$$S = \frac{P}{(1-d)^n}.$$

$$\text{а) } S_1 = \frac{250000}{(1-0{,}1)^{0{,}5}} = 263523 \text{ руб.}; \quad \text{б) } S_2 = \frac{250000}{(1-0{,}1)^{2}} = 308642 \text{ руб.}$$

2. Наращенная сумма сложных антисипативных процентов при полугодовом начислении процентов (m=2) будет определяться по формуле (16):

$$S = \frac{P}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}.$$

а) $S_1 = \dfrac{250000}{\left(1-\dfrac{0,1}{2}\right)^{2\cdot 0,5}} = 263158$ руб.; б) $S_2 = \dfrac{250000}{\left(1-\dfrac{0,1}{2}\right)^{2\cdot 2}} = 306934$ руб.

Вывод: при увеличении частоты начислений процентов в году наращенная сумма антисипативных процентов уменьшается при прочих равных условиях в отличие от декурсивных процентов (см. пример 6).

Пример 8. Долговое обязательство на сумму 120 тыс. руб. должно быть погашено через 5 лет. Владелец долгового обязательства учел его в банке по сложной ставке 9,5% годовых. Найти сумму дисконта, полученную банком если используется: а) учетная ставка; б) процентная ставка.

Решение:

а) При использовании банковского дисконтирования: S=120000 руб.; d=0,095; n=5.

$$P' = S(1-d)^n;$$

$$P' = 120000\cdot(1-0,095)^5 = 72849 \text{ руб.};$$

$$D' = S - P' = 120000 - 72849 = 47151 \text{руб.}$$

б) При использовании математического дисконтирования: S=120000 руб.; i=0,095; n=5.

$$P' = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{120000}{(1+0,095)^5} = 76227 \text{ руб.};$$

$$D' = S - P' = 120000 - 76227 = 43773 \text{руб.}$$

Вывод: при банковском дисконтировании владелец векселя получит 72849 руб. а при математическом – 76227 руб. Соответственно банку будет принадлежать сумма в 47151 руб. или 43773 руб.

Таким образом, для клиента выгоднее учитывать вексель по процентной ставке, а для банка – по учетной ставке.

Тема 3. Эквивалентность процентных ставок

В финансовых сделках часто возникает необходимость изменения условий финансовых операций, например, изменить сроки платежа, процентную ставку заменить учетной ставкой, объединить платежи в один. При этом должен соблюдаться принцип равноценности финансовых последствий изменения условий сделки, т.е. финансовые обязательства должны быть для обеих сторон эквивалентными.

Процентные ставки, обеспечивающие равноценность финансовых последствий называются ***эквивалентными.*** Эквивалентность ставок обеспечивается равенством множителей наращения или дисконтных множителей.

Определим формулы эквивалентности простых и сложных процентов.

$(1+ni_n) = (1+i_c)^n$ отсюда $i_c = \sqrt{1+ni} - 1$ или $i_n = \dfrac{(1+i_c)^n}{n} - 1$. Аналогично выводятся все другие формулы эквивалентности.

Пример 9. Клиенту банком выдан кредит на пять лет под 9 % годовых.

Определить эквивалентную:
а) ставку сложных процентов, если кредит был выдан по ставке простых процентов;
б) ставку простых процентов, если кредит был выдан по ставке сложных процентов;
в) учетную ставку простых процентов, если кредит был выдан по процентной ставке простых процентов;
г) учетную ставку сложных процентов, если кредит был выдан по процентной ставке сложных процентов.

Решение: n=5.
а) $i_n = 0{,}09$; $i_c = ?$

$$i_c = (1 + n \cdot i_n)^{\frac{1}{n}} - 1 = (1 + 5 \cdot 0{,}09)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0{,}077 .$$

Значит, при одинаковой величине начального капитала одну и ту же наращенную сумму можно получить при простой процентной ставке 9% годовых или сложной процентной ставке 7,7% годовых, если срок сделки составляет 5 лет.
б) $i_c = 0{,}09$; $i_n = ?$

$$i_n = \frac{(1 + i_c)^n - 1}{n} = \frac{(1 + 0{,}09)^5 - 1}{5} = 0{,}108 .$$

Кредит, выданный под 9% сложных годовых процентов, эквивалентен кредиту под 10,8% простых процентов на срок 5 лет.
в) $i_n = 0{,}09$; d_n=?

$$d_n = \frac{i_n}{1 + n \cdot i_n} = \frac{0{,}09}{1 + 5 \cdot 0{,}09} = 0{,}062 ;$$

Кредит, выданный по простой процентной ставке 9% годовых, будет эквивалентен кредиту, выданному по простой учетной ставке 6,2% годовых.
г) $i_c = 0{,}09$; d_c=?

$$d_c = \frac{i_c}{1 + i_c} = \frac{0{,}09}{1 + 0{,}09} = 0{,}083 .$$

Таким образом, кредит, выданный по сложной процентной ставке 9% годовых, обеспечивает ту же наращенную сумму, что и по сложной учетной ставке 8,3% годовых.

Тема 4. Потоки платежей

Финансовые операции представляющие совокупность сделок, распределенных во времени, называются потоком платежей. Отдельный элемент называется членом потока. Если все члены потока платежей положительны (т.е. осуществляются только поступления средств или только выплаты и поток платежей можно считать однонаправленным), а временные интервалы между двумя последовательными платежами являются равными, то такой поток называется финансовой рентой или аннуитетом. Например, получение процентов по облигациям или погашение кредита в рассрочку.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:
R – величина отдельного платежа, называемая членом ренты;
n – срок ренты, от начала первого периода до конца последнего;
i или j – годовые сложные процентные ставки, используемые для наращения ренты или дисконтирования платежей;
m – частота начислений процентов в году;
p – число рентных платежей в году;
S – наращенная сумма ренты, т.е. сумма всех платежей с начисленными на них процентами на конец срока ренты;
A – современная величина ренты (приведенная стоимость), т.е. сумма всех платежей, уменьшенная (дисконтированная) на величину процентной ставки на определенный момент времени (как правило, на начало ренты).

В зависимости от различных условий ренты подразделяются на следующие виды:
- годовые, с выплатой раз в году и p - срочные, с выплатой p- раз в году;
- дискретные, с фиксированным числом выплат и непрерывные, когда промежутки между выплатами стремятся к нулю;
- с ежегодным, m – разовым и непрерывным начислением процентов;
- постоянные, с одинаковой величиной платежа и переменные, с меняющейся во времени величиной платежа;
- обыкновенные (постнумерандо) с платежами в конце временных периодов и пренумерандо с платежами в начале периодов.

Наращенная сумма годовой ренты и современная ее стоимость, когда взносы осуществляются в конце каждого года в сумме R по сложной годовой ставке процента i, определяются по формулам:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (23), \qquad A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad (24).$$

Если проценты начисляются m – раз в году, то S и A находятся по формулам:

$$S = R\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{(1+\frac{j}{m})^{m} - 1} \quad (25), \qquad A = R\frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{(1+\frac{j}{m})^{m} - 1} \quad (26).$$

В наиболее общем случае проценты начисляются m – раз в году, а число выплат в году равно p, тогда наращенная сумма и современная стоимость ренты:

$$S = \frac{R}{p}\cdot\frac{(1+\frac{j}{m})^{m/n} - 1}{(1+\frac{j}{m})^{m/p} - 1} \quad (27), \qquad A = \frac{R}{P}\cdot\frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{(1+\frac{j}{m})^{m/p} - 1} \quad (28).$$

Часто при разработке контрактов и условий финансовых сделок задаются обобщающие характеристики S и A, а определяются другие параметры ренты: R; n; i или j.

В финансовой практике применяются также переменные ренты, в которых величины отдельных платежей изменяются по определенным правилам, а не являются постоянными.

Пример 10. Акционерное общество создает инвестиционный фонд. Ежегодно в фонд вносится 500 тыс. руб. под 7% годовых. Найти наращенную величину фонда, если он формируется в течение 5 лет. Как изменится срок ренты, если процентная ставка снизится в два раза? Определить современную величину ренты.

Решение.

а) Платежи производятся одинаковыми суммами в конце каждого периода (постнумерандо), через равные промежутки времени один раз в году.

R=500000 руб., i=0,07; n=5; S=?

$$S = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i},\quad S = 500000\cdot\frac{(1+0{,}07)^5-1}{0{,}07} = 2875370 \text{ руб.}$$

Значит, к концу пятилетнего срока инвестиционный фонд составит 2875370 руб.

б) Рентные платежи осуществляются равными суммами два раза в году, а проценты начисляются ежеквартально.

R=500000 руб.; j=0,07; n=5; p=2; m=4; S=?

$$S = R\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)} = 500000\cdot\frac{\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{4\cdot5}-1}{2\cdot\left(\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{\frac{4}{2}}-1\right)} = 2937003 \text{ руб.}$$

Видно, что наращенная сумма возрастает с увеличением частоты начислений процентов и числа рентных платежей в году.

в) Определим срок ренты, если процентная ставка снизится в два раза. Учтем оба варианта расчета.

В первом варианте параметры ренты составят:

R=500000 руб.; i=0,035; S=2875370 руб.; n=?

Срок ренты находится по формуле:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}\cdot i+1\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{2875370}{500000}\cdot0{,}035+1\right)}{\ln(1+0{,}035)} = 5{,}33 \text{ года.}$$

Во втором варианте параметры ренты составят:

R=500000 руб.; j=0,035; S=2937003; p=2; m=4; n=?

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}\cdot p\cdot\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)+1\right)}{m\cdot\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{2937003}{500000}\cdot2\cdot\left(\left(1+\frac{0{,}035}{4}\right)^{\frac{4}{2}}-1\right)+1\right)}{4\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}035}{4}\right)} = 5{,}39 \text{ года.}$$

Срок образования инвестиционного фонда увеличился до 5,39 года.

г) Современная величина постоянной ренты постнумерандо по первому варианте расчета составит:

$$A = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 500000 \cdot \frac{1-(1+0{,}07)^{-5}}{0{,}07} = 2050099 \text{ руб.}$$

Значит, для создания инвестиционного фонда в размере 2875370 руб. через 5 лет, можно было вложить единовременно 2050099 руб. под 7% годовых сложных процентов.

Во втором варианте современная величина составит:

$$A = R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\cdot\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)} = 500000 \cdot \frac{1-\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{-4\cdot 5}}{2\cdot\left(\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{\frac{4}{2}}-1\right)} = 2075946 \text{ руб.}$$

Современная величина ренты несколько возросла и составила 2075946 руб., но и наращенная сумма равна 2937003 руб.

Задания для контрольной работы

Задачи 1-10. Банк выдал клиенту ссуду в размере «*P*» тыс. руб. сроком на: 3 месяца, 6 месяцев и 9 месяцев, по ставке «*i*» простых процентов (и «*d*» учетной ставке процента). Определить наращенную сумму, если проценты начислялись: а) по процентной ставке; б) по учетной ставке. Через какой срок величина ссуды увеличится на: 10% ;20%; 30%, а также в два раза.

№ задачи	Величина ссуды, тыс. руб. (*P*)	Процентная ставка, % (*i*)	Учетная ставка, % (*d*)	№ задачи	Величина ссуды, тыс. руб. (*P*)	Процентная ставка, %. (*i*)	Учетная ставка, % (*d*)
1	500	13,0	13,0	6	260	12,5	12,5
2	430	13,5	13,5	7	420	9,5	9,5
3	280	11,0	11,0	8	390	14,2	14,2
4	360	10,5	10,5	9	560	11,5	11,5
5	240	14,0	14,0	10	370	12,7	12,7

Задачи 11-20. Банк выдал клиенту кредит 24 февраля в размере «*P*» тыс. руб. Срок возврата кредита 18 октября. Проценты начислялись по простой ставке «*i*». Год не високосный. Рассчитать наращенную сумму долга, подлежащую возврату (тремя методами). Как изменятся наращенные суммы при использовании всех трех методов, если процентная ставка увеличится на 10%.

№ задачи	Величина ссуды, тыс. руб. (*P*)	Процентная ставка, % (*i*)	№ задачи	Величина ссуды, тыс. руб. (*P*)	Процентная ставка, %. (*i*)
11	200	12,5	16	510	10,5
12	450	10,7	17	320	12,5
13	370	10,8	18	270	11,0
14	380	11,5	19	490	13,5
15	440	14,7	20	390	11,7

Задачи 21-30. Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту: а) в первое полугодие процентная ставка «*i*» % годовых, а каждый следующий квартал ставка возрастает на 0,5%; б) первые 5 месяцев ставка «*i*» % годовых, а каждый следующий месяц ставка увеличивается на 0,2%. Проценты начисляются только на первоначально внесенную сумму вклада. Определить наращенную за год сумму.

№ задачи	Величина депозита, тыс. руб. (*P*)	Процентная ставка, % (*i*)	№ задачи	Величина депозита, тыс. руб. (*P*)	Процентная ставка, % (*i*)
21	125	10,0	26	220	11,5
22	270	9,5	27	433	8,5
23	237	8,7	28	324	10,3
24	242	8,5	29	435	9,8
25	363	9,8	30	248	10,7

Задачи 31-40. Клиенту банка предоставлен потребительский кредит сроком на 12 месяцев с ежемесячным погашением кредита в сумме «*P*» руб., под «*i*» % годовых. Составить план погашения кредита.

№ задачи	Сумма кредита, руб. (Р)	Процентная ставка, %. (i)	№ задачи	Сумма кредита, руб. (Р)	Процентная ставка, %. (i)
31	188550	10,0	36	542000	10,5
32	236000	9,5	37	396000	11,0
33	468000	12,0	38	270500	8,5
34	274500	11,5	39	285000	7,5
35	356000	9,0	40	448500	12,5

Задачи 41-50. Владелец векселя номинальной стоимостью «*P*» руб., срок обращения которого один год, предъявил его банку-эмитенту для учета за: 30 дней до даты погашения; 90 дней до даты погашения; 120 дней до даты погашения. Банк учел его по учетной ставке «*d»* % годовых. Определить дисконтированную величину, т.е. сумму, полученную владельцем векселя (*P'*), и величину дисконта (*Д'*).

№ задачи	Номинальная стоимость векселя, тыс. руб. (*S*)	Учетная ставка, % (*d*)	№ задачи	Номинальная стоимость векселя, тыс. руб. (*S*)	Учетная ставка, % (*d*)
41	125	7,5	46	135	10,0
42	238	12,0	47	249	11,5

43	142	10,5	48	155	12,5
44	154	8,0	49	207	9,0
45	266	8,5	50	225	11,0

Задачи 51-60. Клиент имеет в коммерческом банке первоначальную сумму «*P*» тыс. руб. Годовая сложная процентная ставка составляет «*i*» процентов.

Определить наращенную сумму, если периоды наращения составляют: а) 60 дней; б) 90 дней; в) 5 месяцев; г) 9 месяцев; д) один год; е) два года; ж) пять лет.

Задачи решить при условии, что начисление процентов производилось: а) один раз в году; б) ежеквартально; в) каждые два месяца; г) ежемесячно.

Определить, через какой срок первоначальная сумма денег клиента удвоится; увеличится в три раза.

№ задачи	Первоначальная сумма, тыс. руб. (P)	Процентная ставка, % (i)	№ задачи	Первоначальная сумма, тыс. руб. (P)	Процентная ставка, % (i)
51	350	10,0	56	435	9,5
52	275	10,5	57	240	8,0
53	400	11,0	58	245	8,5
54	325	11,5	59	455	7,5
55	530	12,0	60	360	7,0

Задачи 61-70. Банком выдан клиенту кредит в размере «*P*» тыс. руб. по сложной учетной ставке «*d*» % годовых. Определить наращенную сумму долга, если срок возврата кредита составляет: а) 30 дней; б) два месяца; в) шесть месяцев; б) восемь месяцев; в) один год; г) четыре года.

Задачи решить при условии, что начисление процентов производится один раз в году, каждое полугодие и каждые два месяца. Сравнить полученные результаты.

№ задачи	Сумма кредита, тыс. руб. (*P*)	Процентная ставка, % (*i*)	№ задачи	Сумма кредита, тыс. руб. (*P*)	Процентная ставка, % (*i*)
61	250	10	66	335	12,5
62	375	10,5	67	545	13,0
63	500	11,0	68	255	13,5
64	425	11,5	69	360	14,0
65	230	12,0	70	465	14,5

Задачи 71-80. Долговое обязательство на сумму «*S*» тыс. руб. должно быть погашено через «*n*» лет. Владелец долгового обязательства учел его в банке по сложной учетной ставке «*d*» % годовых. Найти сумму дисконта, полученную банком.

Задачи 71-80 решить также при условии, что долговое обязательство учтено в банке по сложной процентной ставке (равной учетной ставке). Сравнить полученные результаты.

№ задачи	Сумма долга, тыс. руб. (*S*)	Срок погашения, лет (*n*)	Учетная ставка, % (*d*)	№ задачи	Сумма долга, тыс. руб. (*S*)	Срок погашения, лет (*n*)	Учетная ставка, % (*d*)
71	150	4	12,0	76	245	5	11,5
72	260	5	11,0	77	155	6	10,5
73	170	6	10,0	78	265	3	9,5
74	180	3	9,0	79	375	4	8,5
75	390	4	8,0	80	185	5	7,5

Задачи 81-90. Предприятию выдан кредит финансовой организацией на «*n*» лет под «*i*» процентов годовых.

Определить эквивалентную ставку: а) сложных процентов, если кредит был выдан по ставке простых процентов; б) простых процентов, если кредит был выдан по сложным процентам; в) учетную ставку простых процентов, если кредит был выдан по процентной ставке простых процентов; г) учетную ставку сложных процентов, если кредит был выдан по процентной ставке сложных процентов; д) учетную ставку простых процентов, если кредит был выдан по процентной ставке сложных процентов; е) учетную ставку сложных процентов, если кредит был выдан по процентной ставке простых процентов; ж) учетную ставку сложных процентов, если кредит был выдан по учетной ставке простых процентов; ж) процентную ставку сложных процентов, если кредит был выдан по простой учетной ставке.

№ задачи	Срок предоставления кредита, лет (*n*)	Процентная ставка, % (*i*)	№ задачи	Срок предоставления кредита, лет (*n*)	Процентная ставка, % (*i*)
81	2	11,5	86	3	11,8
82	3	10,8	87	4	12,2
83	4	9,9	88	5	9,2
84	5	8,7	89	2	8,7
85	2	11,9	90	3	7,9

Задачи 91-100. Предприятие создает инвестиционный фонд. Ежегодно для создания фонда в банк вносится «*R*» тыс. руб. под «*i*» % годовых. Найти наращенную сумму ренты, если фонд создается в течении «*n*» лет, при условии что:

а) рентные платежи осуществляются один раз в году, начисление процентов производится один раз в конце периода начисления;

б) рентные платежи осуществляются один раз в году, а проценты начисляются ежеквартально;
в) рентные платежи осуществляются ежеквартально, а проценты начисляются один раз в году;
г) рентные платежи осуществляются два раза в году, и проценты начисляются два раза в год.
д) рентные платежи осуществляются каждые два месяца в году, а проценты начисляются ежемесячно.

Определить срок, для каждого варианта, который необходим для создания инвестиционного фонда, если процентная ставка снизится в полтора раза.

Определить современную величину постоянной ренты для каждого варианта.

№ задачи	Величина ежегодного платежа, тыс. руб. (R)	Процентная ставка, % (i)	Срок ренты, лет (n)	№ задачи	Величина ежегодного платежа, тыс. руб. (R)	Процентная ставка, % (i)	Срок ренты, лет (n)
91	250	9,0	7	96	270	11,0	8
92	190	10,5	4	97	280	10,8	5
93	270	11,0	6	98	195	10,0	6
94	180	11,5	5	99	230	10,5	7
95	190	12,0	3	100	245	12,5	4