МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет прикладной информатики

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Учебно-методическое указания для аспирантов
по направлению **38.06.01 Экономика**
по профилю **Математические и инструментальные методы экономики**

Краснодар 2015

Занятие 1

Пример 2.1. Построить граф состояний следующего случайного процесса: устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время (рис.5).

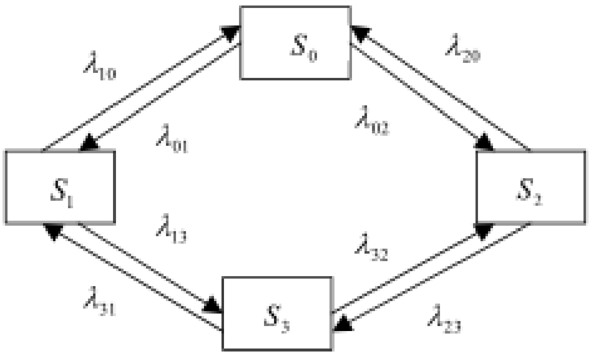


Рис.5 Граф состояний устройства S.

Возможные состояния системы: S_0 - оба узла исправны; S_1 - первый узел ремонтируется, второй исправен; S_2 - второй узел ремонтируется, первый исправен; S_3 - оба узла ремонтируются.

Стрелка, направленная из S_0 в S_1, означает переход системы в момент отказа первого узла из S_0 в S_1; из S_1 в S_0 - переход в момент окончания ремонта этого узла.

На графе отсутствуют стрелки из S_0 в S_3 и из S_1 в S_2. Это объясняется тем, что выходы узлов из строя предполагаются независимыми друг от друга и, например, вероятностями одновременного выхода из строя двух узлов (S_0 в S_3) и одновременного окончания ремонта двух узлов из S_3 в S_0 можно пренебречь.

1) Найти предельные вероятности для системы S при:

λ_{01}=1, λ_{02}=2, λ_{10}=2, λ_{13}=2,

λ_{20}=3, λ_{23}=1, λ_{31}=3, λ_{32}=2.

Система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим для данной системы записывается из дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\frac{dP_0}{dt} = \lambda_{10} P_1 + \lambda_{20} P_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) P_0$$

$$\frac{dP_1}{dt} = \lambda_{01} P_0 + \lambda_{31} P_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13}) P_1$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \lambda_{02} P_0 + \lambda_{32} P_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23}) P_2$$

$$\frac{dP_3}{dt} = \lambda_{13} P_1 + \lambda_{23} P_3 - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) P_3 .$$

В левой части каждого из этих уравнений стоит производная вероятности i-го состояния. В правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых идут стрелки в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го состояния). Таким образом, для стационарного режима система уравнений записывается в виде

$$3 P_0 = 2 P_1 + 3 P_2$$

$$4 P_1 = P_0 + 3 P_3$$

$$4 P_2 = 2 P_0 + 2 P_3$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

Здесь вместо одного уравнения записано нормировочное условие. $\sum P_i = 1$.

Решение системы дает условие P_0=0.4, P_1=0.2, P_2=0.27, P_3=0.13, т.е. в предельном стационарном режиме система S в среднем 40% времени будет находиться в состоянии S_0 (оба узла исправны), 20% - в состоянии S_1 (первый узел ремонтируется, второй работает), 27% - в состоянии S_2 (второй узел ремонтируется, первый работает), 13% - в состоянии S_3 (оба узла ремонтируются).

2) Найти средний чистый доход от эксплуатации в стационарном режиме системы S, если известно, что в единицу времени исправная работа первого и второго узлов приносит доход соответственно в 10 и 6 ден. ед., а их ремонт требует затрат соответственно в 4 и 2 ден. ед. Оценить экономическую эффективность имеющейся возможности уменьшения вдвое среднего ремонта каждого из двух узлов, если при этом придется вдвое увеличить затраты на ремонт каждого узла (в единицу времени).

В среднем первый узел исправно работает долю времени равную P_0+P_2 = 0.4 + 0.27 = 0.67, а второй P_0+P_1 = 0.4 + 0.2 = 0.6. В то же время первый узел находится в ремонте в среднем долю времени, равную P_1+P_3 = 0.2 + 0.13 = 0.33, а второй узел - P_2 + P_3 = 0.27 +0.13 = 0.4. Поэтому средний чистый доход в единицу времени от эксплуатации системы, т.е. разность между доходами и затратами, равен

D = 0.67*10 + 0.6*6 – 0.33*4 – 0.4*2 = 8,18.

Уменьшение вдвое среднего времени ремонта каждого из узлов в соответствии с $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ будет означать увеличение вдвое интенсивностей «окончания ремонтов» каждого узла, т.е. теперь λ_{10}=4, λ_{20}=6, λ_{31}=6, λ_{32}=4 и система линейных алгебраических уравнений, описывающая стационарный режим системы S_1 вместе с нормировочным условием примет вид:

$3P_0 = 4P_1 + 6P_2$

$6P_1 = P_0 + 6P_3$

$7P_2 = 2P_0 + 4P_3$

$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$,

решение которой дает: P_0 =0.6, P_1 =0.15, P_2 =0.2, P_3 = 0.05.

Учитывая, что $P_0 + P_2 = 0.8$; $P_0 + P_1 = 0.75$; $P_1 + P_3 = 0.2$; $P_2 + P_3 = 0.25$, а затраты на ремонт первого и второго узла составляют теперь соответственно 8 и 4 дн. ед., вычислим средний доход в единицу времени.

D_1 = 0.8*10 = 0.75*6 – 0.2*8 – 0.25*4 = 9.9.

Так как D_1>D примерно на 20%, то экономическая целесообразность ускорения ремонта узлов очевидна

Пример 2.2. Пусть имеются 3 конкурирующих предмета потребления (продукта) S_1, S_2 и S_3. С целью определения спроса на эти продукты производится публичный опрос. Сначала клиентов опрашивают о том, каким из продуктов S_1, S_2 и S_3 они пользуются; предположим, что при этом выяснилась следующая доля (частота) клиентов, пользующихся соответственно каждым из продуктов $P_1(0) = 0,5$; $P_2(0) = 0,2$; $P_3(0) = 0,3$. Через месяц клиентов, пользовавшихся продуктом S_1, спрашивают о том, продолжают ли они пользоваться продуктом S_1 или перешли к S_2 или S_3; пусть при этом получились следующие частоты, которые мы принимаем за приближенные значения вероятностей перехода: $P_{11}(1) = 0,9$; $P_{12}(1) = 0,1$; $P_{13}(1) = 0$. Аналогично поступают с клиентами, которые пользовались продуктом S_2 и S_3; пусть $P_{21}(1) = 0,4$; $P_{22}(1) = 0,3$; $P_{23}(1) = 0,3$; $P_{31}(1) = 0,7$; $P_{32}(1) = 0,1$; $P_{33}(1) = 0,2$.

Итак, предполагая, что поведение клиентуры не меняется по времени, имеем стационарную цепь Маркова с матрицей перехода

$$F = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Граф переходов представлен на рис. 6.

Через месяц после опроса распределение клиентов будет следующим:

$(P_1(1); P_2(1); P_3(1)) = (0,5;0,2;0,3)F = (0,74;\ 0,14;\ 0,12)$.

Через четыре месяца, если опросы приводят каждый раз к результату (1), получится

$(P_1(4); P_2(4); P_3(4)) = (0,5;0,2;0,3)F^4 = (0,827;\ 0,125;\ 0,048)$.

Вероятности P_n(i), n = 1,2,3, стремятся к пределу при i $\longrightarrow \infty$. Эти пределы независимы от $P_n(0)$, n = 1,2,3, и равны

$$(P_1(\infty); P_2(\infty); P_3(\infty)) = \begin{pmatrix} \frac{53}{64} & \frac{8}{64} & \frac{3}{64} \end{pmatrix}.$$

Если бы матрица перехода изменялась от опроса к опросу, то результаты опросов описывались бы неоднородной цепью Маркова.

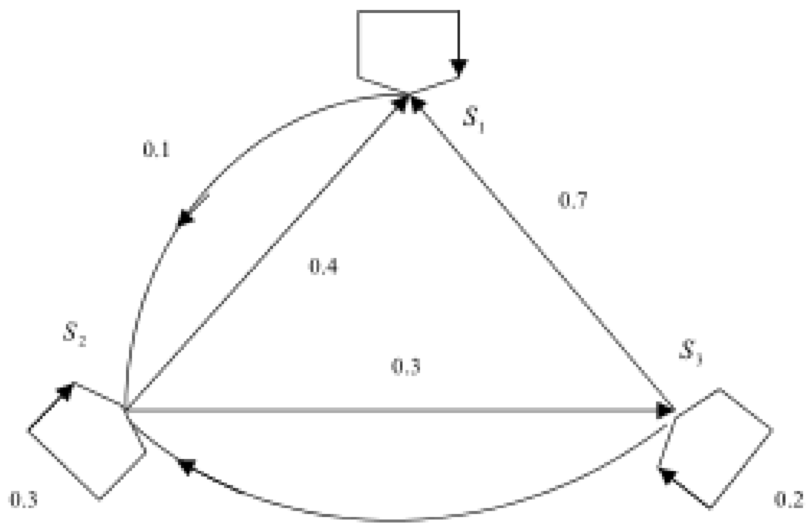


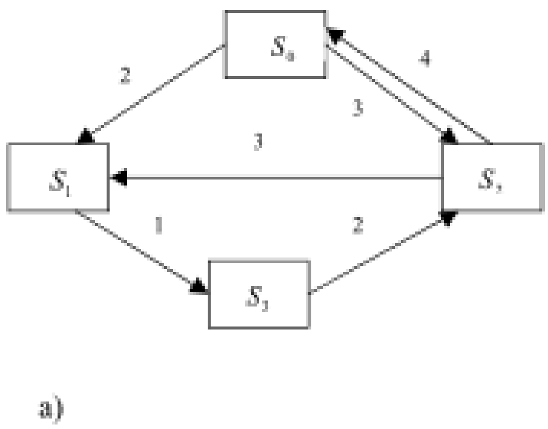
Рис.6 Граф перехода продуктов питания.

Задачи

2.1 Построить граф состояний следующего случайного процесса: система состоит из двух автоматов по продаже газированной воды, каждый из которых в случайный момент времени может быть либо занятым, либо свободным.

2.2 Построить граф состояний системы S, представляющей электрическую лампочку, которая в случайный момент времени может быть либо включена, либо выключена, либо выведена из строя.

2.3 Найти предельные вероятности для систем S, граф которых изображен на рис.7.а и 7.б соответственно.



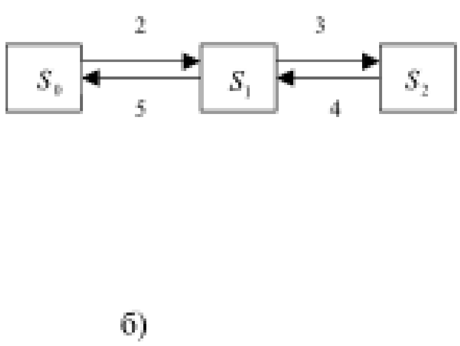


Рис. 7. Графы состояний систем S.

Занятие 2

Пример 3.1 Известно, что заявки на телефонные переговоры в телефонном ателье поступают с интенсивностью λ, равной 90 заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону $t_{об}$ = 2 мин.

1) Определить показатели эффективности работы СМО (телефонной связи) при наличии одного телефонного номера.

Решение

Имеем λ = 90 (1/ч);

$\overline{t_{об}}$ = 2 мин.

- Интенсивность потока обслуживания $\mu = \frac{1}{\overline{t_{об}}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (1/мин)=30 (1/ч).
- Относительная пропускная способность СМО

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{30}{90 + 30} = 0{,}25,$$

т.е. в среднем только 25% поступающих заявок осуществляет переговоры по телефону.

- Вероятность отказа в обслуживании составит

$P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = 0,75$.

- Абсолютная пропускная способность СМО

$A = \lambda Q = 90 * 0,25 = 22,5$;

т.е. в среднем в час будут обслужены 22,5 заявок на переговоры. Очевидно, что при наличии только одного телефонного номера СМО будет плохо справляться с потоком заявок.

2) Определить оптимальное число телефонных аппаратов в телефонном ателье, если условием оптимальности считать удовлетворение в среднем из каждых 100 заявок не менее 90 заявок на переговоры.

- Интенсивность нагрузки каналов – трафик-интенсивность

$\rho = \lambda / \mu = 90/30 = 3$,

т.е. за время среднего (по продолжительности) телефонного разговора $t_{об}$ = 2 мин поступает в среднем 3 заявки на переговоры.

Будем увеличивать постепенно число каналов (телефонных номеров) n= 2,3,4…. и определять ρ, Q, A для получаемой n-канальной СМО характеристики обслуживания.

N = 2 : $P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$

$P_0 = \left(1 + 3 + \frac{3^2}{21}\right)^{-1} = 0.118 \approx 0.12$

$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0$

$Q = 1 - \left(\frac{3^2}{2!}\right) 0.118 = 0.471 \approx 0.47$

$A = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0\right) = \lambda Q$

$A = 90 \cdot 0.471 = 48.4$ и т.д.

Характеристики сведены в следующую таблицу:

Характеристика обслуживания	**Число каналов**					
	1	2	3	4	5	6
Относительная пропускная способность Q	0,25	0,47	0,65	0,79	0,9	0,95
Абсолютная пропускная способность А	22,5	42,5	58,8	71,5	80,1	85,3

Из условия оптимальности $Q \geq 0.9$ следует, что в телевизионном ателье необходимо установить 9 телефонных номеров (в этом случае Q = 0,9). При этом в час будут обслуживаться в среднем 80 заявок (А = 80,1), а среднее число занятых телефонных номеров (каналов)

$\bar{k} = A / \mu$;

$\bar{k} = 80.1/30 = 2.67$.

Пример 3.2 В вычислительном центре коллективного пользования с тремя ЭВМ поступают заказы от предприятий на вычислительные работы. Если работают все три ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается, и предприятие вынуждено обратиться в другой ВЦ. Среднее время работы с одним заказом составляет 3 часа. Интенсивность потока заявок 0,25 (1/ч).

Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы ВЦ.

По условию n = 3, λ = 0,25 (1/ч), $\overline{t_{об}}$ = 2 мин.

- Интенсивность потока обслуживания $\mu = \dfrac{1}{t_{об}} = 0.33$.
- Интенсивность нагрузки ЭВМ – трафик-интенсивность $\rho = \dfrac{0.25}{0.33} = 0.75$.
- Предельные вероятности

$$P_0 = \left(1 + 0.75 + \frac{0.75^2}{21} + \frac{0.75^3}{3!}\right)^{-1} = 0.476,$$

$$P_1 = (0.75 \cdot 0.476) = 0.357,$$

$$P_2 = \left(\frac{0.75^2}{21}\right)0.476 = 0.131,$$

$$P_3 = \left(\frac{0.75^3}{3!}\right)0.476 = 0.33,$$

т.е. в стационарном режиме работы ВЦ в среднем 47,6 % времени нет ни одной заявки; 35,7 % - имеется одна заявка (занята одна ЭВМ); 13,4 % - две заявки (две ЭВМ); 3,3 % времени – три заявки (заняты три ЭВМ).

- Вероятность отказа (когда заняты все три ЭВМ) таким образом составит

$$P_{отк} = P_3 = 0.033.$$

- Относительная пропускная способность центра

Q = 1 – 0,033 = 0,967,

т.е. в среднем из каждых 100 заявок ВЦ обслуживает 96,7 заявок.

- Абсолютная пропускная способность центра

$A = 0.25 \cdot 0.967 = 0.242$

т.е. за один час в среднем обслуживается 0,242 заявки.

- Число занятых ЭВМ

$\bar{k} = 0.242/0.33 = 0.725$,

т.е. каждая их 3-х ЭВМ занята обслуживанием заявок в среднем лишь на $72.5/3 = 24.2\%$

Занятие 3,4

Пример 3.3 В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. 1) Найти показатели эффективности работы причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузку не более чем 2 судна.

Имеем $\rho = \lambda/\mu = \lambda \overline{t_{об}} = 0.4 \cdot 2 = 0.8$. Так как $\rho < 1$, то очередь на разгрузку не может бесконечно возрастать, и предельные вероятности существуют. Найдем их.

- Вероятность того, что причал свободен

$P_0 = 1 - 0.8 = 0.2$,

а вероятность того, что причал занят

$P_{зан} = 1 - 0.2 = 0.8$.

Вероятности того, что у причала находятся 1,2,3 судна (т.е. ожидают разгрузки 0,1,2 судна), равны соответственно

$P_1 = 0.8(1-0.8) = 0.16$

$P_2 = 0.8^2(1-0.8) = 0.128$

$P_3 = 0.8^3(1-0.8) = 0.1024$

Вероятность того, что ожидают разгрузку не более чем 2 судов, равна

$P = P_1 + P_2 + P_3 = 0.16 + 0.128 + 0.1024 = 0.3904$.

- Среднее число судов, ожидающих разгрузки составит

$\overline{m} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.8^2}{1-0.8} = 3.2$,

а среднее время ожидания разгрузки

$t_f = \frac{1}{\lambda} L_{оч} = \frac{3,2}{0,8} = 4$ (сутки).

Среднее число судов, находящихся у причала определяется как

$\overline{n} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.8}{1-0.8} = 4$ (сутки).

Среднее время пребывания судна у причала

$t_s = \frac{1}{\lambda} L_{сист} = \frac{4}{0,8} = 5$ (суток).

Очевидно, что эффективность разгрузки судов невысока. Для её повышения необходимо уменьшение среднего времени разгрузки судна $\overline{t_{об}}$, либо увеличения числа причалов n.

2)Найти показатели эффективности работы причала.

Известно, что приходящее судно покидает причал (без разгрузки), если в очереди на разгрузку стоит более 3 судов.

По условию m = 3.

- Вероятность того, что причал свободен

$P_0 = \frac{1-0.6}{1-0.8^{3+2}} = 0.297$

- Вероятность того, что приходящее судно покинет причал без разгрузки

$P_{отк} = 0.8^{3+1} \cdot 0.297 = 0.122$.

- Относительная пропускная способность причала

$Q = 1 - 0.122 = 0.878$.

- Абсолютная пропускная способность причала

$A = 0.4 \cdot 0.878 = 0.351$,

т.е. в среднем в сутки разгружается 0,35 судна.

- Среднее число судов, ожидающих разгрузку

$\overline{m} = \frac{0.8^2\left[1-0.8^3(3+1-3\cdot 0.8)\right]}{(1-0.8^{3+2})(1-0.8)} = 0.861$.

- Среднее время ожидания разгрузки

$\bar{t}_j = \frac{0,861}{0,8} = 1,076$ (сутки).

- Среднее число судов, находящихся у причала

$\bar{n} = 0.861 + (1 - 0.297) = 1.564$

- Среднее время пребывания судна у причала

$\bar{t}_s = \frac{1.564}{0.8} = 1.955$ (суток).

Пример 3.4 Железнодорожная касса с двумя окошками продает билеты в два пункта А и В. Интенсивность потока пассажиров, желающих купить билеты, для обоих пунктов одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0.45$ (пассажиров в минуту). На обслуживание пассажиров кассир тратит в среднем2 мин. Рассматриваются два варианта продажи билетов:

Первый – билеты продаются в одной кассе с двумя окошками одновременно в оба пункта А и В;

Второй – билеты продаются в двух специализированных кассах (по одному окошку в каждой), одна только в пункт А, другая – только в пункт В.

Необходимо:

а) сравнить два варианта продажи билетов по основным характеристикам обслуживания;

б) определить, как надо изменить среднее время обслуживания одного пассажира, чтобы по второму варианту продажи пассажиры затрачивали на приобретение билетов в среднем меньше времени, чем по первому варианту.

а) <u>По первому варианту</u> имеем двухканальную СМО, на которую поступает поток заявок интенсивностью $\lambda = 0.45 + 0.45 = 0.9$; интенсивностью потока обслуживания $\mu = 0.5$, трафик-интенсивностью $\rho = \lambda/\mu = 1.8$. Так как, $\frac{\rho}{n} = \frac{1.8}{2} = 0.9 < 1$, то предельная вероятность существует.

Вероятность простоя двух кассиров

$$P_0 = \left(1 + \frac{1.8}{1!} + \frac{1.8^2}{2!} + \frac{1.8^3}{2!(2 - 1.8)}\right)^{-1} = 0.0526.$$

Среднее число пассажиров в очереди

$$\bar{m} = \frac{1.8^3}{2 \cdot 2!\left(1 - \frac{1.8}{2}\right)0.0526} = 7.67$$

Среднее число пассажиров у кассы

$\bar{n} = 7,67 + 1,8 = 9,47$.

Среднее время на ожидание в очереди и покупку билетов соответственно составляет:

$\bar{t}_j = \frac{7.67}{0.9} = 8.52$ (мин),

$\bar{t}_s = \frac{9.47}{0.9} = 10.5$ (мин).

<u>По второму варианту</u> имеем две одноканальные СМО (два специализированных окошка), на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0.45$. По прежнему $\mu = 0.5$, $\rho = 0.9 < 1$, предельная вероятность существует.

Для данного варианта

$$\bar{m} = \frac{0.9^2}{(1-0.9)} = 8.1$$

$$\bar{n} = \frac{0.9}{1-0.9} = 9.0$$

$$\overline{t_f} = \frac{8.1}{0.45} = 18.0 \text{ (мин)},$$

$$\overline{t_s} = \frac{9.0}{0.45} = 20.0 \text{ (мин)}.$$

Итак, по второму варианту увеличились и длина очереди, и среднее время ожидания в ней и в целом на покупку билетов. Такое различие объясняется тем, что в первом варианте (двухканальная СМО) меньше средняя доля времени, которую простаивает каждый их двух кассиров, если он не занят обслуживанием пассажира, покупающего билет в пункт А, и он, следовательно, может заняться обслуживанием пассажира, покупающего билет в пункт В, и наоборот. Во втором варианте такой взаимозаменяемости нет.

Можно заметить, что среднее время на покупку билетов по второму варианту увеличилось более чем в 2 раза. Такое значительное увеличение связано с тем, что СМО работает на пределе своих возможностей $(\rho = 0.9)$: достаточно незначительно увеличить среднее время обслуживания $\overline{t_{об}}$, т.е. уменьшить μ и трафик-интенсивность ρ станет больше 1, т.е. очередь начнет неограниченно возрастать.

б) Выше было получено, что по первому варианту продажа билетов при среднем времени обслуживания одного пассажира $\overline{t_{об}}$ = 2 (мин), среднее время на покупку билетов составляет $\overline{t_{f1}}$ = 10,5 (мин). По условию для второго варианта продажи билетов $\overline{t_{f2}} < \overline{t_{f1}}$ или с учетом $\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} < \overline{t_{f1}}$.

Полагая $\rho = \lambda / \mu = \lambda \overline{t_{об}}$, получим $\frac{\overline{t_{об}}}{1-\lambda \overline{t_{об}}} < \overline{t_{f1}}$, откуда можно найти $\overline{t_{об}} < \frac{\overline{t_{f1}}}{1+\lambda \overline{t_{f1}}}$ или

$$\overline{t_{об}} < \frac{0,5}{1 + 0,45 \cdot 0,5} = 1,83.$$

Итак, средние затраты времени на покупку билетов по второму варианту продажи уменьшатся, если среднее время обслуживания одного пассажира уменьшится более чем на 0,17 мин, или более чем на 8,5 %.

Пример 3.5 В универсаме к углу расчета поступает поток (заявок) покупателей с интенсивностью λ = 81 чел. в час. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного покупателя $\overline{t_{об}}$ = 2 мин.

Определить:

1) Минимальное количество контролеров-кассиров n_{min}, при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при $n = n_{min}$.

2) Оптимальное количество $n_{опт}$ контролеров-кассиров, при котором относительная величина затрат $C_{опт}$, связанная с издержками на содержание каналов обслуживания и с пребыванием в очереди покупателей, задаваемая, например, как $C_{опт} = \frac{1}{\lambda} n + 3T_{оч}$, будет минимальна, и сравнить характеристики обслуживания при $n = n_{min}$ и $n = n_{опт}$.

3) Вероятность того, что в очереди будет не более трех покупателей.

По условию λ = 81(1/час) = 1,35(1/мин)

$\rho = \lambda/\mu = \lambda \overline{t_{об}} = 1.35 \cdot 2 = 2.7$.

Очередь не будет возрастать до бесконечности при условии

$\frac{\rho}{n} < 1$,т.е. при $n > \rho = 2.7$. Таким образом, минимальное количество контролеров-кассиров $n_{min} = 3$.

Найдем характеристики обслуживания СМО при n = 3.

- Вероятность того, что в узле расчета отсутствуют покупатели:

$$P_0 = \left(1 + 2.7 + \frac{2.7^2}{2!} + \frac{2.7^3}{3!} + \frac{2.7^4}{3!(3-2.7)}\right)^{-1} = 0.025,$$

т.е. в среднем 2,5% времени контролеры-кассиры будут простаивать.

- Вероятность того, что в узле расчета будет очередь

$$\underline{P} = \left(\frac{2.7^4}{3!(3-2.7)}\right) 0.025 = 0.735.$$

- Среднее число покупателей, находящихся в очереди

$$\overline{m} = \left(\frac{2.7^4}{3 \cdot 3!\left(1 - \frac{2.7}{3}\right)^2}\right) 0.025 = 7.35$$

- Среднее время ожидания в очереди

$$\overline{t_f} = \frac{7.35}{1.35} = 5.44 \text{ (мин)}.$$

- Среднее число покупателей в узле расчета

$$\overline{n} = 7.35 + 2.7 = 10.05$$

- Среднее время нахождения покупателей в узле расчет

$$\overline{t_s} = \frac{10.05}{1.35} = 7.44 \text{ (мин)}.$$

- Среднее число контролеров-кассиров, занятых обслуживанием покупателей

$\overline{k} = 2.7$.

- Коэффициент (доля) занятых обслуживанием конторолеров-кассиров

$\overline{k_3} = \rho/n = 2.7/3 = 0.9$.

- Абсолютная пропускная способность узла расчета $A = 1.35$ (1/мин).

Анализ характеристик обслуживания свидетельствует о значительной перегрузке узла расчета при наличии трех контролеров-кассиров.

Относительная величина затрат при n = 3.

$$C_{отн} = \frac{1}{\lambda} n + 3T_{оч} = \frac{3}{1.35} + 3 \cdot 5.44 = 18.54.$$

Рассчитаем относительную величину затрат при других значениях n (табл.2).

Как видно из таблицы минимальные затраты получены при $n = n_{опт} = 5$ контролеров-кассиров.

Определим характеристики обслуживания узла расчета при $n = n_{опт} = 5$.

Получим $\underline{P} = 0.091$, $\overline{m} = 0.198$, $\overline{t_f} = 0.146$, $\overline{n} = 2.90$, $\overline{t_s} = 2.15$, $\overline{k} = 2.7$, $\overline{k_3} = 0.54$.

Характеристики работы контролеров-кассиров

Таблица 2

Характеристики обслуживания	Число контролеров-кассиров				
	3	4	5	6	7
Вероятность простоя контролеров-кассиров P_0	0,025	0,057	0,065	0,067	0,067
Среднее число покупателей в очереди $\overline{t_f}$	5,44	0,60	0,15	0,03	0,01
Относительная величина затрат $C_{отн}$	18,54	4,77	4,14	4,53	5,22

Как видно при n = 5 по сравнению с n = 3 существенно уменьшились вероятность возникновения очереди P, длина очереди $\overline{m}$ и среднее время пребывания в очереди $\overline{t_f}$ и соответственно среднее число покупателей $\overline{n}$ и среднее время нахождения в узле расчета $\overline{t_s}$, а также доля занятых обслуживанием контролеров-кассиров $\overline{k}$ и абсолютная пропускная способность узла расчета А естественно не изменилось.

Вероятность того, что в очереди будет не более 3 покупателей, определяется как

$$P(r<3)=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_{5+1}+P_{5+2}+P_{5+3}=1-P_{оп}+P_{5+1}+P_{5+2}+P_{5+3},$$

(когда заняты от 1 до 5 кассиров) (когда в очереди стоят от 1 до 3 покупателей)

где $P_{n+1}=\dfrac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0+...+P_{n+r}=\dfrac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}P_0$.

Получим при n = 5

$$P(r\le 3)=1-\frac{2.7^5}{5!(5-2.3)}0.065+\frac{2.7^6}{5\cdot 5!}0.065+\frac{2.7^7}{5^2\cdot 5!}0.065+\frac{2.7^8}{5^3\cdot 5!}0.065=0.986.$$

Заметим, что в случае n = 3 контролеров-кассиров та же вероятность существенно меньше.

$P(r\le 3)=0.46$.

Задачи

1. Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профилактического ремонта автомашин с одним каналом обслуживания (одной группой проведения осмотра). На осмотр и выявление поступает в среднем 36 машин в сутки. Потоки заявок и обслуживаний – простейшие. Если машина, прибывшая в пункт осмотра не застает ни одного канала свободным, она покидает пункт осмотра необслуженной. Определить вероятности состояний и характеристики обслуживания профилактического пункта осмотра.

Занятие 5-7

2. Решить задачу примера №3.3 для случая n = 4. Найти число каналов, при котором относительная пропускная способность пункта осмотра будет не менее 0,9.
3. Анализируется работа междугороднего переговорочного пункта в небольшом городке. Пункт имеет один телефонный аппарат для переговоров. В среднем за сутки поступает 240 заявок на переговоры. Средняя длительность переговоров (с учетом вызова абонентов в другом городе) составляет 5 мин. Никаких ограничений на длину очереди нет. Потоки заявок и обслуживаний простейшие. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания переговорочного пункта в стационарном режиме.
4. Решить задачу № 3 для случая n = 3 телефонных аппаратов.
5. Решить задачу № 1 при условии, что машина, пребывшая на пункт осмотра, покидает этот пункт лишь в случае, если очереди на осмотр стоят более 5 машин.
6. Решить задачу № 3 при условии, что длина очереди не должна превышать 60 человек.
7. Решить задачу № 1 при условии, что длина очереди не должна превышать 60 человек.

Контрольные вопросы

1.Какие операционные показатели СМО Вам известны?

2.Что такое трафик-интенсивность?

3.В чем отличие расчета одноканальных СМО и многоканальных СМО?

4.В чем заключается расчет систем массового обслуживания?

5.С помощью какого показателя определяют разрешающую способность СМО?

ЛИТЕРАТУРА: [2,4, 6, 7] .

Список рекомендуемой литературы

1 Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. – М.: Изд-во «Советское радио», 1971. – 520с.

2 Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. - М.: Изд-во «Мир», 1965. – 302с.

Занятие 8

Определение среднего числа покупателей и времени ожидания

Задача. Стадион небольшого города обслуживает **касса** с одним окном. В дни проведения соревнований численность покупателей билетов возрастает и интенсивность покупок составляет 0,45 человек/мин. Кассир затрачивает на обслуживание болельщика в среднем 2 минуты. Определить среднее число покупателей у **кассы** и среднее время, затрачиваемое болельщиком на приобретение билета.

Решение. Данная процедура обслуживания моделируется одноканалыюй системой массового обслуживания с ожиданием без ограничений на длину очереди и на время ожидания. Параметры системы:
число каналов п = 1;
интенсивность входного потока X = 0,45 человек/мин.
среднее время обслуживания одной заявки 7^ = 2 мин.
Следовательно, интенсивность потока обслуживания ц будет составлять: р. = 1/Тоб = 0,5 (человек/мин), а нагрузка системы р определится как р = 0,45/0,5 = 0,9 (эрланга).
Среднее время, которое болельщик затрачивает на приобретение билета, складывается из среднего времени пребывания в очереди. Его можно подсчитать по формуле:

$$T_{\text{сис.}} = \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{1-0,9} = 20\,(\text{мин}).$$

Среднее число покупателей у **кассы** определится как

$$N_{\text{сис.}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,9}{1-0,9} = 9\,(\text{человек}).$$

Таким образом, получаем следующий результат: очередь у кассы в среднем составляет 9 человек, а время, затрачиваемое болельщиком на приобретение входного билета на стадион,-20 минут. Очевидно, что такой результат не является удовлетворительным и в "пиковые" периоды администрации стадиона следует подключать к продаже билетов еще одного кассира.

Занятие 9

Моделирование ситуаций и выработка управленческих решений

Станковая задача

Имеется группа из трех станков, каждый из которых может производить два типа деталей, назовем их условно деталями А и Б.

Производительность каждого из станков по разным типам деталей, как правило, различна:

станок № 1 производит в одну минуту 5 деталей А или 5 деталей Б,

станок № 2 производит в одну минуту 6 деталей А или 2 детали Б,

станок № 3 производит в одну минуту 5 деталей А или 3 детали Б.

Необходимо выполнить два условия(два ограничения):

– ни один из станков не должен простаивать;

– продукция должна быть комплектна, т. е. количество произведенных деталей А должно равняться количеству деталей Б (это, например, могут быть гайки и болты).

Возможное решение.

Все расчеты будем производить исходя из общей продолжительности времени работы в 6 часов = 360 минут (одна смена). Попробуем на все это время загрузить станок № 1 деталями А. Станки № 2 и № 3 также загрузим на все время работы, но деталями Б.

Результат такого решения изобразим следующим образом: слева от вертикальной черты покажем время загрузки станков по различным деталям, а справа – соответствующее количество произведенной продукции (произведение времени работы на минутную производительность).

Итак, глазомерное решение см. в табл. 2.

Таблица 2

Станок	Продолжительность работы станка, мин		Производительность станка (количество деталей за время работы)	
	А	Б	А	Б
№1	360	0	1800	0
№2	0	360	0	720
№3	0	360	0	1080
Общее количество 1800 + 1800 = выпущенной продукции = 3600 деталей				

Решение полностью отвечает поставленным условиям: во-первых, все станки полностью загружены в течение рабочего времени; во-вторых, количество произведенных деталей А равно количеству деталей Б.

Остается, однако, открытым главный вопрос планирования: является ли решение наилучшим в данных условиях? Нельзя ли составить другой план распределения станков, который отличался бы наибольшей производительностью?

Обоснованием такого оптимального решения занимается математическое программирование. Суть метода удобнее всего выразить с помощью наглядного геометрического представления, графика (рис. 3). Здесь показан построенный по правилам математического программирования многоугольник OABCD (он заштрихован). Многоугольник соответствует условиям нашей задачи и представляет собой область допустимых планов распределения времени работы станков № 2 и № 3 над деталью А. По соответствующим осям графика отмечена продолжительность работы этих станков. (В своих расчетах мы вполне можем обойтись двумя станками и одной деталью, так как по этим данным нетрудно рассчитать и все остальные.)

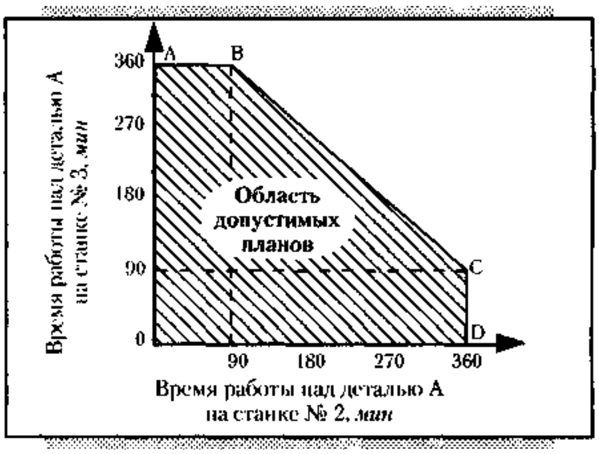


Рис. 3. График решения станковой задачи

Любая точка заштрихованной области допустимых планов, как видно из ее названия, даст нам какой-либо один возможный план, отвечающий обоим принятым условиям – ограничениям. Так, например, точка О соответствует нашему глазомерному плану: время работы над деталью А на станках № 2 и № 3 равно нулю.

В поисках наилучшего плана посмотрим, какой план распределения станков дает другие точки области. Вот, скажем, точка В. Как видно из графика, этой точке соответствует время работы над деталью А станка № 2, равное 90 минутам, станка № 3 – 360 минутам. По этим данным нетрудно составить второй план распределения станков, причем время, отводимое на производство детали Б станками № 2 и № 3, получится как дополнение до 360 минут времени, снятого с графика,– станки не должны простаивать. Что касается станка № 1, то его время работы подбирается таким, чтобы общее количество деталей А и Б совпадало.

Второе решение, следовательно, будет выглядеть так (табл. 3).

Таблица 3

Станок	Продолжительность работы станка, мин		Производительность станка (количество деталей за время работы)	
	А	Б	А	Б
№1	0	360	0	1800
№2	90	270	540	540
№3	360	0	1800	0
Общее количество выпущенной продукции = 4680 деталей	2340 + 2340 =			

Оптимальному решению соответствует одна из вершин многоугольника допустимых планов, а именно та, для которой общая производительность окажется максимальной. В нашем случае это вершина С.
Действительно, рассчитывая известным уже нам путем план распределения станков для этой точки, получим следующее решение (табл. 4).

Таблица 4

Станок	Продолжительность работы станка, мин		Производительность станка (количество деталей за время работы)	
	А	Б	А	Б
№1	0	360	0	1800
№2	360	0	2160	0
№3	90	270	450	810
Общее количество выпущенной продукции	2610 + 2610 = 5220 деталей			

Мы получили план почти наполовину (на 45 %) лучше, чем глазомерный. И этот существенный прирост, подобно и предыдущему улучшению, ничего (если не считать умственных усилий на планирование) не стоит. Никакого дополнительного расхода каких-либо ресурсов не потребовалось. Те же станки, те же детали, те же станочники работают то же время. Не меняются и производительности станков. Эффект здесь чисто интеллектуальный, «умственный», – за счет рационального распределения ресурсов оборудования (кстати, латинское слово «рационалист» означает «разумный»).

Может возникнуть, правда, вопрос: а нельзя ли обойтись в подобных задачах без какого-либо специального математического аппарата, идя путем простого перебора всех возможных вариантов решения? Этот соблазн следует тут же отмести.

Расчет показывает, что перебор всех возможных вариантов решений подобных задач не под силу даже самому большому коллективу вычислителей.
Уместно отметить еще несколько интересных моментов, связанных с решением данной задачи. Полученный нами оптимальный план – это не просто правильный, допустимый план распределения оборудования, по которому можно работать, – такими были и оба предыдущих. Они обеспечивали как беспростойность оборудования, так и комплектность продукции. Оптимальный план помимо того, что он должен отвечать этим требованиям, должен быть еще обязательно самым эффективным. В данном случае это означает требование максимума деталей. Действительно, как уже отмечалось, оптимизация обязательно должна предусматривать обращение одного из показателей в максимум (или минимум). Но только одного показателя. Нельзя вести оптимизацию по нескольким показателям одновременно. Между тем мы часто слышим: «максимум продукции при минимуме издержек». А правильно будет: «максимум продукции при данном уровне издержек» или «минимум издержек при данном уровне продукции».
И еще один важный вывод, к которому подводит станковая задача: оптимизация возможна лишь по верхнему уровню управления, для всей производственной системы в целом. В данном случае это означает, что мы получили оптимальный план лишь для всех трех станков вместе. А для каждого в отдельности? Тут оптимальности может и не быть. В нашей задаче оптимальный план явно не понравится станочнику, работающему на станке № 3: при большей производительности – 5 деталей в минуту – план предлагает ему работать всего 90 минут, а при меньшей – 3 детали в минуту – целых 270 минут. Но тут уже ничего не поделаешь: чтобы получить оптимальный, сбалансированный план предприятия, кому-то на нижнем уровне приходится работать в неоптимальном режиме. И значительно дешевле компенсировать издержки «внизу», чем лишиться огромного эффекта оптимизации работы целого предприятия.
Несколько слов о существе решения станковой задачи. Идея математического программирования заключается в том, чтобы вместо сплошного (иногда говорят – слепого или дурного) перебора всех возможных вариантов вести перебор выборочный, направленный на скорейшее последовательное улучшение результата. Поэтому в нашей задаче мы и рассматривали не все точки области допустимых планов (их бесчисленное множество), а только вершины многоугольника, одна из которых и дала нам наилучшее решение.

Занятие 10

Задача раскроя.

Изготовление многих видов современной промышленной продукции начинается с раскроя материала. Выкраивают не только одежду и обувь, но и детали корпуса корабля, кузова автомобиля, фюзеляжа самолета. Раскраивают ткани и кожу, бумагу и стекло, металл и пластмассу. Кроить можно по-разному...

Перед нами листы дефицитного материала размером 6 х 13 метров (рис. 4). Из каждого такого листа необходимо выкроить по несколько заготовок двух видов: заготовки А – размером 5х4 метра и заготовки Б – размером 2х3 метра. Задача заключается в том, чтобы получить как можно больше заготовок обоих видов с наименьшим количеством отходов. Кроме того, как и в задаче со станками, необходимо обеспечить комплектность заготовок: на 1 заготовку А должно приходиться 5 заготовок Б. Как вести раскрой? Какое решение принять?

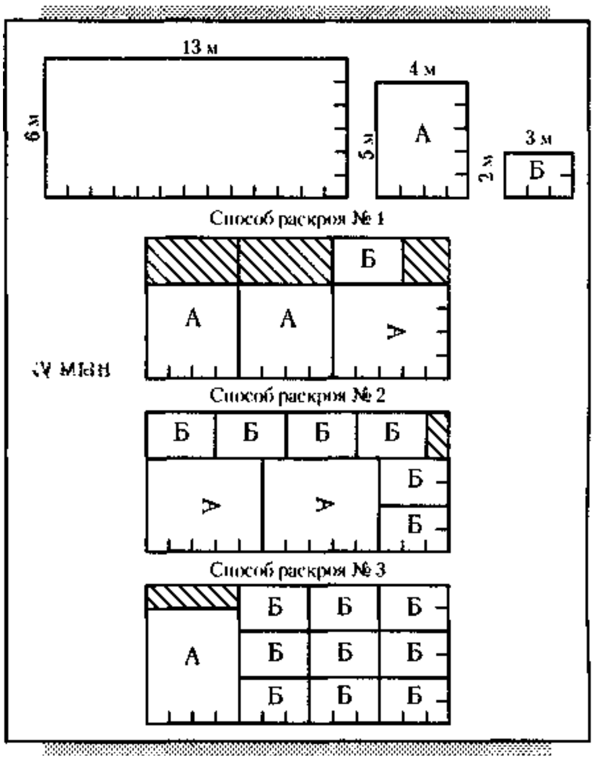


Рис. 4. Способы раскроя материала

Прежде всего, нужно установить все возможные способы раскроя наших листов по требуемым заготовкам. Начнем с того, что постараемся получить с одного листа как можно больше заготовок А – они крупнее, чем Б, и для них труднее подыскать место на листе. Оказывается, однако, что более трех заготовок А с листа выкроить невозможно. Исходя из этого предусмотрим способы раскроя для получения трех, двух и одной заготовки А и наибольшего возможного количества заготовок Б с листа. Каждому способу дадим номер:

способ № 1: 3 заготовки А и 1 заготовка Б;
способ № 2: 2 заготовки А и 6 заготовок Б;
способ № 3: 1 заготовка А и 9 заготовок Б.

Заметим, что при всех способах раскроя часть площади листа остается неиспользованной и идет в отходы. На рис. 4 эта площадь заштрихована.

Для составления оптимального плана раскроя материала построим график, подобный тому, который мы рисовали в задаче со станками. На рис. 5 по оси X отложено количество заготовок А, а по оси Y – число заготовок Б. При этом каждому способу раскроя соответствует своя точка на графике. Так, точка «способ № 2» стоит на пересечении двух заготовок А и шести заготовок Б. Точки – способы раскроя – указывают границы области допустимых планов.

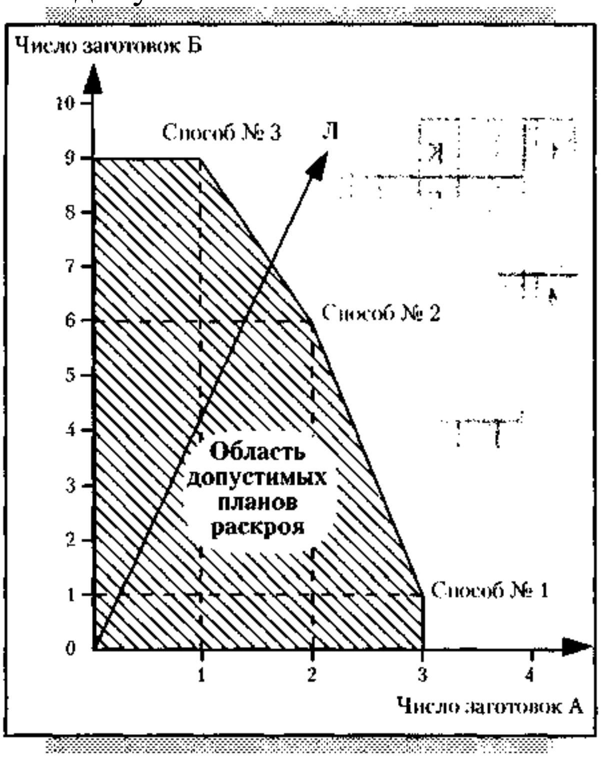


Рис. 5. График раскроя материала

Для того чтобы обеспечить комплектность заготовок, необходимо ограничиваться лишь теми точками области допустимых планов, которые лежат на луче ОЛ. Он построен таким образом, что все его точки соответствуют требуемому отношению заготовок А и Б:

$$\frac{\text{число заготовок А}}{\text{число заготовок Б}} = \frac{1}{5}.$$

Какой же план раскроя наиболее рационален? Очевидно, тот, которому соответствует точка, наиболее отдаленная от начала координат, – ведь при этом число заготовок будет наибольшим. Этот план дает точка, лежащая на пересечении луча ОЛ с границей области допустимых планов – линией, соединяющей способы № 2 и № 3. Она находится как раз посередине между упомянутыми способами. Итак, оптимальный план раскроя заключается в том, что половина листов кроится способом № 2, а половина – способом № 3.

Проверим теперь наш оптимальный план на партии в 200 листов. Половину – 100 листов раскроим по способу № 2 и получим 100 х 2 = 200 заготовок Б. Всего же по-

лучилось 300 заготовок А и 1500 заготовок Б – комплектность 1 к 5 соблюдена. А чем этот план лучше других? На этот вопрос ответят следующие любопытные цифры.
Предположим, что тот, кто ведет раскрой, не знает современных методов обоснования решений и действует без расчета, «на глазок». Не исключено, что он станет раскраивать наши 200 листов способами № 1 и № 3. Для того чтобы иметь возможность сравнивать глазомерный план с оптимальным, примем, что способом № 1 раскраивалось 50, а способом № 3–15 листов. Вот что при этом получается.
50 листов, раскроенные по способу № 1, дают:
50 x 3 = 150 заготовок А и 50 x 1 = 50 заготовок Б;
150 листов, раскроенных по способу № 3, дают:
150 x 1 = 150 заготовок А и 150 x 9 = 1350 заготовок Б.
Всего получается 300 заготовок А и 1400 заготовок Б.
А куда же исчезло 100 заготовок Б? Ведь при оптимальном раскрое их было 1500. Их «съел» плохой план. Все они ушли в отходы. Дефицитный материал остался неиспользованным.
Таким образом, рациональный раскрой даже в такой скромной задаче, как наша,– разрезается всего 200 листов – экономит 600 квадратных метров дефицитного материала: 100 заготовок Б x 2 метра x 3 метра = 600 квадратных метров.

Составление расписаний (Задача директора)
Сущность этой задачи заключается в следующем.
На прием к директору записалось несколько посетителей. Секретарь директора составил список в алфавитном порядке, указав для каждого требующуюся ему ориентировочную продолжительность приема. Фамилии записавшихся обозначены в списке их заглавными буквами (табл. 5).
На весь прием директор, как видно из таблицы, отвел 2 часа =120 минут, поэтому пришлось ограничиваться всего шестью посетителями. Является ли составленное расписание наилучшим?

Таблица 5

№ п/п	Фамилия (начальная буква)	Продолжительность приема, мин	Время ожидания, мин
1	Б	25	0
2	Д	15	25
3	Е	10	40
4	К	5	50
5	С	35	55
6	Т	30	90
Суммарное время 120 мин = = 2 часа		260 мин = = 4 часа 20 мин	

С точки зрения общей продолжительности приема любая очередность посетителей равнозначна: суммарное время приема не меняется при любой его последовательности. А с точки зрения ожидания в очереди? Подсчитаем общее время ожидания как сумму времени ожидания всех посетителей. В нашем алфавитном списке оно составляет 260 минут = 4 часа 20 минут. Понятно, что это время желательно было бы уменьшить: ведь время ожидания – зря потраченное время. Но вот можно ли это сделать? Приведет ли расписание с другой последовательностью приема к экономии общего времени ожидания при сохранении намеченного суммарного времени приема?
Оказывается, получение такого расписания возможно. В одном из методов исследования операций – так называемой теории расписаний – доказывается, что наименьшее суммарное время ожидания получается при составлении расписания в порядке нарастания продолжительности приема.

Составим такое расписание (табл. 6).

№ п/п	Фамилия (начальная буква)	Продолжительность приема, мин	Время ожидания, мин
1	К	5	50
2	Е	10	5
3	Д	15	15
4	Б	25	30
5	Т	30	55
6	С	35	85
Суммарное время 120 мин = 2 часа		= 190 мин = = 3 часа 10 мин	

Полученное оптимальное расписание позволяет уменьшить суммарное время ожидания на 1 час 10 минут. Это значительное сэкономленное время можно использовать на полезные дела.

Задача о назначениях

На предприятии подготовлен резерв для замещения однородных должностей начальников производства (скажем, начальников производственных участков). Руководители предприятия, кадровая служба составили список резерва (в алфавитном порядке) и путем экспертного опроса установили, приблизительно конечно, степень соответствия каждого кандидата каждой из возможных вакансий. Например, установлено, что кандидат А для замещения должности IV подходит примерно в два раза лучше, чем для должности II, для замещения должности I кандидат Б в два раза хуже, чем В, и т. д. Придавая таким характеристикам численную форму, можно составить таблицу соответствия кандидатов различным должностям (табл. 9).

Таблица 9

Кандидат	Должность				
	I	II	III	IV	V
А	10	20	50	40	60*
Б	40*	20	30	10	80
В	80	50*	30	30	70
Г	60	70	20*	10	40
Д	50	70	60	10*	40

Как будет проходить подбор кандидатов на должность? Решим эту задачу сначала глазомерно.

Первый по алфавиту кандидат А лучше всего отвечает должности V. Закрепим за ним эту должность, поставив в правом верхнем углу соответствующей клетки звездочку.

Следующего кандидата – Б лучше всего было бы назначить на должность V, но она уже занята. Поэтому направим его на наиболее подходящую из оставшихся – должность I. И так далее.

Оценку полученного штатного расписания произведем так, как мы это делали в задачах математического программирования – суммируя оценки соответствующих назначений:

60 + 40 + 50 + 20 + 10 = 180.

Хорошее ли это расписание? Ответить на такой вопрос можно, лишь зная оптимальный вариант. Получить его путем сплошного перебора всех возможных расписаний, как мы уже знаем, практически нельзя: при распределении всего 10 кандидатов по 10 должностям число возможных вариантов измеряется миллионами.

Существуют, к счастью, приемы направленного перебора вариантов, построенные на основе методов исследования операций. Применение этих приемов выводит на следующее оптимальное штатное расписание (табл. 10).

Таблица 10

Кандидат	Должность				
	I	II	III	IV	V
А				*	
Б					*
В	*				

Г		*			
Д			*		

Оценка качества данного расписания:
40 + 80 + 80 + 70 + 60 = 330.
Оценка показывает, что оптимальное расписание почти в два раза лучше, чем глазомерное.