

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный  
аграрный университет имени И. Т. Трубилина»

В. А. Дробот, А. С. Брусенцов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ.  
ПРОСТЫЕ ВИДЫ НАГРУЖЕНИЯ

Учебное пособие

Краснодар  
КубГАУ  
2021

**УДК 621.7.014.2(075.8)**

**ББК 30.121**

**Д75**

**Р е ц е н з е н т ы:**

**Б. Ф. Тарасенко** – профессор кафедры ремонта машин и материаловедения Кубанского государственного аграрного университета, д-р техн. наук, доцент;

**В. В. Терехов** – заведующий кафедрой механики Краснодарского высшего военного авиационного училища летчиков, канд. техн. наук, доцент

**Дробот В. А.**

**Д75** Сопrotивление материалов. Простые виды нагружения : учеб. пособие / В. А. Дробот, А. С. Брусенцов. – Краснодар : КубГАУ, 2021. – 94 с.

**ISBN 978-5-907516-02-1**

В учебном пособии изложены теоретические основы, а также практические указания по выполнению расчетно-проектировочных работ. Приводится методика определения внутренних усилий и построения эпюр различных силовых факторов, положения опасных сечений, а также подбора сечений из условия прочности.

Предназначено для обучающихся по специальности 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, специализация «Технические средства агропромышленного комплекса».

**УДК 621.7.014.2(075.8)**

**ББК 30.121**

© Дробот В. А.,  
Брусенцов А. С., 2021  
© ФГБОУ ВО «Кубанский  
государственный аграрный  
университет имени  
И. Т. Трубилина», 2021

**ISBN 978-5-907516-02-1**

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие сельхозмашиностроения требует совершенствования подготовки специалистов, обладающих навыками проектирования инженерных конструкций.

Высокий уровень подготовки такого специалиста может быть обеспечен лишь разносторонней самостоятельной работой с использованием учебных пособий, в первую очередь для усвоения необходимых теоретических навыков расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Учебное пособие содержит все основные разделы курса сопротивления материалов. Рассмотрены основные понятия, особенности сжатия и растяжения материалов, работа деформации, критерии прочности и предельных напряженных состояний материалов, касательные напряжения, расчет на прочность, теория напряженного состояния, основные законы упругих свойств материалов, жесткость и прочность при кручении, сдвиги и изгибы, температурные напряжения, расчет конструкций по предельной нагрузке и т. д. Изложены теоретические основы, а также указания по выполнению расчетно-проектировочных работ.

# 1 ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ

## 1.1 Основные принципы и гипотезы науки о сопротивлении материалов

Сопротивление материалов – это наука о раздел механики твердого деформируемого тела, изучающий принципы и методы расчета элементов машин и сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочность – способность элемента конструкции выдерживать внешние нагрузки в процессе эксплуатации не разрушаясь.

Жесткость – способность элемента конструкции сохранять первоначальную форму и размеры под действием внешних нагрузок при эксплуатации.

Устойчивость – способность элемента конструкции сохранять первоначальную форму равновесия под действием эксплуатационных нагрузок.

Одним из значимых упрощений при расчете реальных конструкций является схематизация ее элементов. Выбор расчетной схемы сводится к устранению второстепенных факторов, влияющих на работу конструкции незначительно.

Стержень (брус) (рисунок 1.1) – тело, два размера которого (поперечные) малы по сравнению с третьим (длиной).

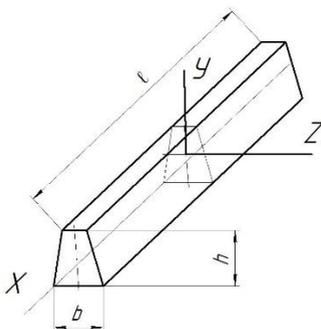


Рисунок 1.1 – Расчетные объекты

Основными понятиями стержня являются:

– ось стержня – линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений, проведенных последовательно;

– поперечное сечение – плоскость, пересекающая стержень и проходящая перпендикулярно его оси.

Стержни, у которых толщина стенки значительно меньше габаритных размеров поперечного сечения, называются тонкостенными.

Основные принципы сопротивления материалов:

1. Принцип сохранения начальных размеров (принцип отвердевания), предполагающий незначительное изменение формы тела в результате действия внешних сил.

2. Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции), говорящий о том, что действие некоторой совокупности сил равносильно сумме независимых действий этих сил.

3. Принцип Сен-Венана, по которому напряжения, в точках тела значительно удаленных от места приложения внешних нагрузок, несущественно зависят от способа приложения нагрузок.

Для облегчения решения вопросов инженерной практики в сопротивлении материалов прибегают к схематизации свойств материалов и пользуются рядом допущений:

1. Материалы предполагаются идеально упругими.

2. Материалы считаются изотропными.

3. Материалы являются однородными.

4. Материал тела предполагается сплошным.

## **1.2 Внешние и внутренние силы. Метод сечений**

Взаимодействие тел с другими телами вызывает появление внешних сил.

В свою очередь, внешние силы порождают внутренние усилия, отражающие силы упругого взаимодействия частей тела.

Определение внутренних сил выполняют методом сечений, который состоит в следующем: мысленно рассекают стержень на части плоскостью после чего изучают равновесие

одной из отсеченных частей (рисунок 1.2), что позволяет определить равнодействующую внутренних силовых факторов и их интенсивность.

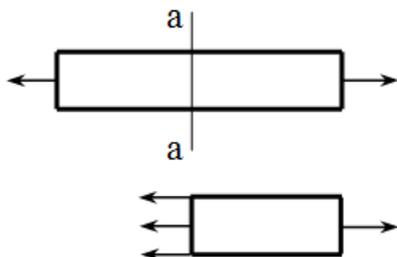


Рисунок 1.2 – Метод сечений

Равнодействующую внутренних сил называют усилием, а величину внутренней силы, приходящуюся на единицу площади сечения – напряжением в данной точке сечения.

В зависимости от характера системы внешних сил, приложенных к стержню, возможны следующие случаи деформации стержня:

1. Растяжение (сжатие) – деформация, при которой внешние силы приводят к силе, направленной по оси стержня (рисунок 1.3).

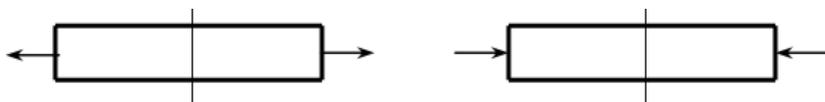


Рисунок 1.3 – Деформация растяжения или сжатия

2. Кручение – деформация, при которой внешние нагрузки приводят к паре сил, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси стержня (рисунок 1.4).

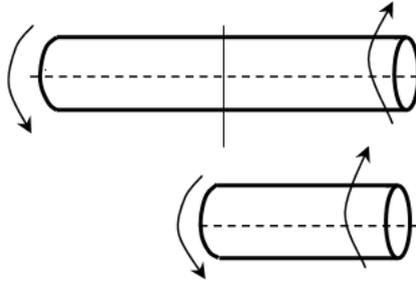


Рисунок 1.4 – Деформация кручения

3. Изгиб – деформация, при которой внешние силы приводятся к паре сил, лежащей в плоскости оси симметрии стержня (рисунок 1.5).

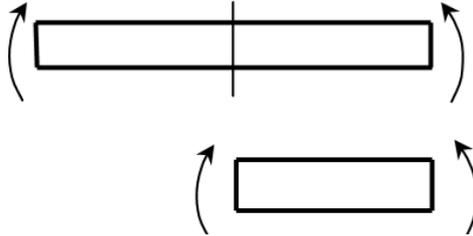


Рисунок 1.5 – Деформация изгиб

### 1.3 Понятие о напряжениях и деформациях

Пусть в точке  $O$  некоторой элементарной площадки  $\Delta F$  (рисунок 1.6 а) действует внутренне усилие величиной  $\Delta P$ .

Предел отношения  $\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = p$  представляет собой полное напряжение в точке рассматриваемой площадки, которое возможно разложить на компоненты (рисунок 1.6 б) нормальные и касательные.

Нормальное напряжение представляет собой проекцию полного напряжения  $\overline{p}$  на нормаль  $\overline{n}$  к сечению и равно  $\sigma = p \cos(\overline{p}, \overline{n})$ .

Касательные напряжение есть проекция полного напряжения  $\vec{p}$  на плоскость площадки и равно  $\tau = p \sin(\vec{p}, \vec{n})$ .

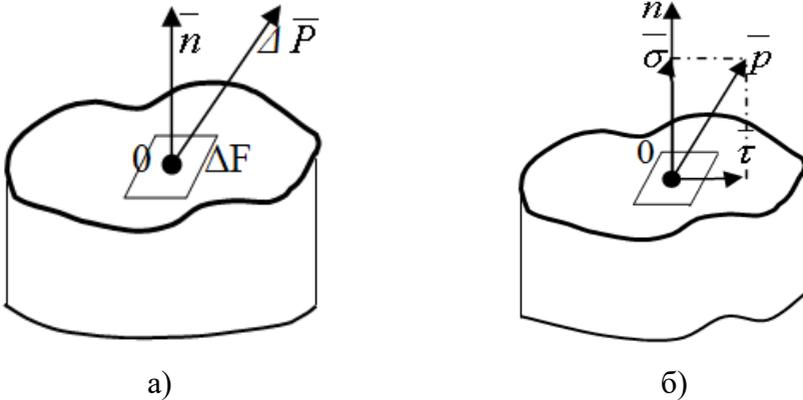


Рисунок 1.6 – Рассматриваемое сечение

Между полным напряжением и его компонентами существует очевидная связь:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2. \quad (1.1)$$

Положение касательного и нормального компонент полного напряжения позволяет считать их скалярными величинами.

Кроме напряжений, приложенные к телу внешние нагрузки, вызывают изменение геометрии тела, то есть деформации.

Выделяют линейные деформации, обусловленные перемещением точек тела вдоль прямых линий и угловые – повороты линий и плоскостей.

При этом если расстояние между двумя точками тела, равно до деформации  $dx$  (рисунок 1.8 а), изменилось на величину  $du$  и стало равным  $dx+du$ , то мы имеем абсолютную линейную деформацию, а ее отношение к первоначальному расстоянию  $\varepsilon = \frac{du}{dx}$  даст нам относительную линейную деформацию по направлению оси  $x$ .

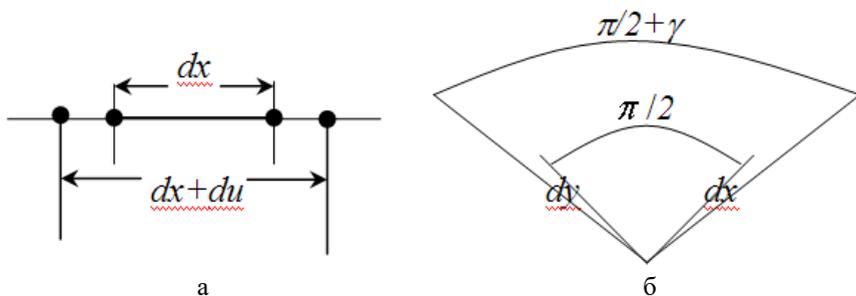


Рисунок 1.8 – Деформации тела

Если же два отрезка тела  $dx$  и  $dy$ , расположенные до деформации под углом  $\pi/2$  (рисунок 1.8 б) после нее повернулись, и угол между ними принял значение  $\pi/2 \pm \gamma$ , то мы имеем угловую деформацию на величину  $\gamma$ .

### Контрольные вопросы

1. Виды деформаций.
2. Упругие деформации. Пластические деформации.
3. Внутренние силы, их определение (метод сечений).
4. Виды напряжений.

## 2 ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

### 2.1 Усилия в поперечном сечении стержня

Центральное растяжение (сжатие) – деформация стержня, вызванная действием сил, порождающих возникновение только продольных усилий  $N$  в поперечных сечениях

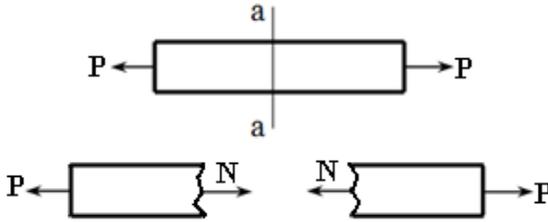


Рисунок 2.1 – Центральное растяжение стержня

Продольная сила является равнодействующей внутренних силовых факторов, возникающих в поперечном сечении стержня и определяется рассматривая условие равновесия одной из отсеченных частей.

Продольная сила численно равна сумме проекций внешних силовых факторов на ось отсеченной части стержня и расположенных по одну сторону от сечения.

При ее определении принимают следующее правило знаков: проекция силы, направленной от сечения и вызывающей растяжение рассматриваемой отсеченной части, принимается положительной, и наоборот, проекция силы, направленной к сечению и вызывающей сжатие берется отрицательной.

По результатам расчета строится эпюра продольных сил  $N$  – график величин внутренних усилий для рассматриваемых поперечных сечений стержня.

### 2.2 Напряжения и деформации при растяжении (сжатии)

Нормальные напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня с постоянной площадью сечения по длине, определяются из выражения:

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (2.1)$$

где  $N$  – усилие в рассматриваемом сечении стержня, Н;  
 $F$  – площадь рассматриваемого сечения стержня, м<sup>2</sup>.

Величина относительной деформация в продольном направлении определяется формулой:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.2)$$

где  $l$  – первоначальный размер в продольном направлении, м;  
 $\Delta l$  – абсолютное изменение размера в продольном направлении, м.

Величина относительной деформации в поперечном направлении:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta v}{v}, \quad (2.3)$$

где  $v$  – первоначальный размер в поперечном направлении, м;  
 $\Delta v$  – абсолютное изменение размера в поперечном направлении, м.

Величина, равная отношению относительной деформации в поперечном направлении к относительной деформации в продольном и характеризующая упругие свойства материалов в поперечном направлении при растяжении или сжатии, называется коэффициентом поперечной деформации (или коэффициентом Пуассона):

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}. \quad (2.4)$$

Коэффициент Пуассона, в зависимости от материала, изменяется пределах  $0 < \mu \leq 0,5$ .

Относительное изменение объема стержня определяет деформацию стержня по всему объему:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V}, \quad (2.5)$$

где  $V$  – первоначальная величина объема, м<sup>3</sup>;

$\Delta V$  – изменение объема, м<sup>3</sup>.

Связь между напряжениями и относительными деформациями в продольном направлении отражается законом Гука:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad (2.6)$$

где  $E$  – коэффициент, называемый модулем продольной упругости (модуль Юнга), МПа

Модуль продольной упругости характеризует упругие свойства материалов в продольном направлении при растяжении или сжатии.

Закон Гука при постоянном по длине стержня значении продольной силы можно выразить следующим образом:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}. \quad (2.7)$$

Произведение  $E \cdot F$  называется жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении-сжатии.

### 2.3 Потенциальная энергия упругой деформации

Потенциальная энергия численно равна работе внешних сил, приложенных к телу, и при статическом растяжении или сжатии и постоянных  $N$  и  $F$  по длине стержня может быть определена по формуле:

$$U = \frac{N^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot F}, \quad (2.8)$$

Удельной потенциальной энергией деформации ( $u, \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^3}$ ) называется потенциальная энергия, отнесенная к единице объема стержня:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E}. \quad (2.9)$$

## 2.4 Механические характеристики материалов

Применительно к инженерной практике можно выделить два вида материалов: первый вид хрупкие, разрушение которых происходит без значительных пластических деформаций, второй вид – пластичные, разрушающиеся с появлением значительных остаточных деформаций.

Наиболее значимые для нас механические характеристики пластичных материалов определяют из опытов на простое растяжение-сжатие стандартных образцов.

Полученная при испытании кривая, отражающая зависимость нагрузки ( $P$ ) от абсолютной деформации ( $\Delta l$ ) называется диаграммой растяжения. В результате анализа этой диаграммы строится кривая, отражающая связь напряжения ( $\sigma$ ) и относительного удлинения ( $\varepsilon$ ), называемая диаграммой напряжений.

На диаграмме напряжений, пример которой представлен на рисунке 2.2, характерными ординатами отражаются основные значения механических характеристик материалов, называемые пределами:

– *предел пропорциональности* ( $\sigma_{mp}$ ) – максимальное нормальное напряжение, при котором сохраняет свою справедливость линейный закон Гука:

$$\sigma = \varepsilon \cdot tg\alpha \quad \text{или} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (2.10)$$

где  $E = tg\alpha$  – так называемый модуль продольной упругости.

– *предел текучести* ( $\sigma_m$ ) – наибольшее напряжение, при котором рост деформации происходит при неизменной нагрузке.

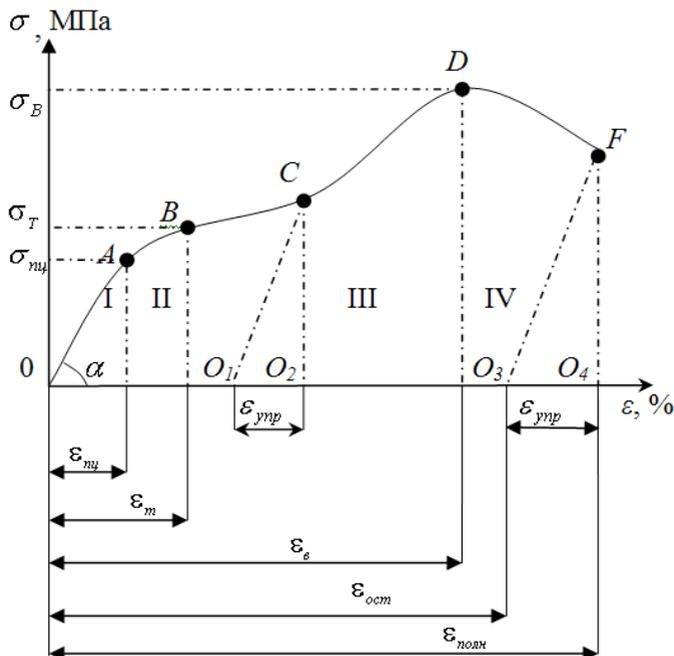


Рисунок 2.2 – Диаграмма напряжений для малоуглеродистой стали

– *предел прочности или временное сопротивление* ( $\sigma_B$ ) – напряжение, вызванное действием максимальной нагрузки на образец.

Кроме того, диаграмму (рисунок 2.2) можно разделить на условные зоны: I – зона пропорциональности, II – зона текучести, III – зона прочности, IV – зона местной текучести.

Полученная диаграмма является диаграммой условных напряжений, так как строилась относительно начальной площади сечения. Истинная диаграмма напряжений, построенная из учета текущей площади сечения, отличается наличием ро-

ста напряжений на участке  $DF$ , в следствие резкого уменьшения размеров поперечного сечения.

Линия  $CO_1$  диаграммы отражает явление наклепа – увеличение предела пропорциональности материала при одновременном уменьшении пластичности

По диаграмме видно наличие двух стадий относительной деформации: упругой, исчезающей после снятия нагрузки и пластической, остающейся после разгрузки. Остаточная деформация при разрыве  $\varepsilon_{ост}$  является характеристикой пластичности.

Максимальное безопасное для работы конструкции напряжение называют допускаемым  $[\sigma]$ .

Допускаемое напряжение элементов конструкций, выполненных из пластичных материалов определяют из условия:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n}. \quad (2.11)$$

Для элементов, выполненных из хрупких материалов условие следующее:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n}. \quad (2.12)$$

где  $n$  – коэффициент безопасности (запаса прочности).

Величина коэффициента должна быть больше единицы.

Условие прочности элемента конструкции:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (2.13)$$

Сечение элемента, в котором  $\sigma = \sigma_{\max}$  называют опасным сечением.

Условие прочности растянутого или сжатого стержня выглядит:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (2.14)$$

## 2.5 Методика расчета статически неопределимых систем

Статически неопределимой называется система, в которой число неизвестных реакций связи превышает количество уравнений равновесия.

При расчете таких систем составляют дополнительные уравнения, отражающие зависимость между деформациями элементов конструкций.

Статически неопределимые конструкции обладают рядом особенностей:

1. Наличие дополнительных связей повышает жесткость статически неопределимых конструкций по сравнению со статически определимыми.

2. Меньшие внутренние усилия, возникающие в статически неопределимых конструкциях по сравнению со статически определимыми при одинаковых значениях внешней нагрузки, делает их более экономичными.

3. Потеря работоспособности лишних связей не всегда вызывает разрушение конструкции, тогда как в статически определимой системе подобное явление приведет к мгновенной геометрической изменчивости.

4. Расчет статически неопределимых конструкций требует предварительного задания геометрических характеристик сечений.

5. Выбор материала элементов конструкций выполняется заблаговременно.

6. Температурное воздействие, осадка опор, погрешности при изготовлении и (или) монтажа вызывают возникновение дополнительных усилий.

Основными методами расчета статически неопределимых систем являются:

1. Метод сил, где в качестве неизвестных рассматриваются усилия – силы и моменты.

2. Метод перемещений, в котором основными неизвестными являются деформационные факторы – углы поворотов и линейные смещения.

3. Смешанный метод при пользовании, которым часть неизвестных представляет собой усилия, а другая часть – перемещения.

Дополнительных уравнений должно быть столько, какова степень статической неопределимости – разность между числом искомых неизвестных усилий и числом независимых уравнений равновесия, которые для данной системы можно составить ( $S = m - n$ ).

Для решения статически неопределимых задач к уравнениям равновесия добавляют условия совместности деформаций, являющиеся уравнениями, связывающими между собой деформации или перемещения отдельных частей тела

Выделяют три стороны решения подобных задач:

– статическая сторона задачи, в которой для определения неизвестных опорных реакций записываем уравнения статики;

– геометрическая сторона задачи (условия совместности деформаций), где рассматривается схема деформирования системы, после чего составляются уравнения изменения длины участка системы до и после деформации;

– физическая сторона задачи, где с помощью закона Гука определяем соотношение между деформациями элементов конструкций.

Решая совместно уравнения равновесия и уравнение совместности деформаций, находим усилия в стержнях.

### **Контрольные вопросы**

1. Продольная (нормальная) сила и ее эпюра.
2. Определение перемещений при растяжении (сжатии).
3. Модуль продольной упругости. Модуль поперечной упругости.
4. Закон Гука при растяжении (сжатии).
5. Напряжения в поперечных сечениях бруса при растяжении (сжатии). Расчет на прочность при растяжении (сжатии).
6. Учет собственного веса при растяжении (сжатии).

# 3 ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ

## 3.1 Напряженное состояние в точке тела

Мерой интенсивности внутренних сил, распределенных по сечениям, служат напряжения – усилия, приходящиеся на единицу площади сечения. Через произвольную точку  $O$  тела проведем секущую площадь с нормалью  $\bar{\nu}$ . Выделим в окрестности точки  $O$  малую площадку  $\Delta F$  (рисунок 3.1). Пусть  $\Delta P$  – равнодействующая внутренних сил, действующих на эту площадку.

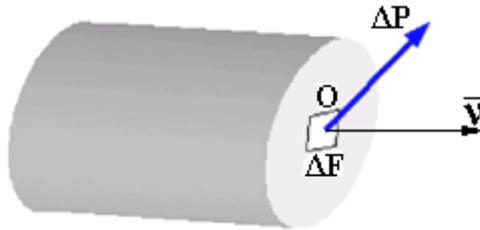


Рисунок 3.1 – Равнодействующая внутренних сил, действующих на площадке

Значение внутренних сил, приходящихся на единицу площади  $\Delta F$  рассматриваемой площадки, будет равно:

$$p_{\nu} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}. \quad (3.1)$$

Величина  $p_{\nu}$  называется полным напряжением в точке  $O$  на площадке  $\Delta F$ .

Единица напряжения – паскаль;  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ . Так как реальные значения напряжений будут выражаться очень большими числами, то следует применять кратные значения единиц, например, МПа (мегапаскаль);  $1 \text{ МПа} = 1 \text{ Н/мм}^2 = 10^6 \text{ Н/м}^2$ .

Напряжения, как и силы, являются векторными величинами. В каждой точке сечения тела полное напряжение  $p_{\nu}$

можно разложить на две составляющие (компоненты) (рисунок 3.2):

1) составляющую, нормальную к плоскости сечения. Эта составляющая называется нормальным напряжением обозначается  $\sigma$  ;

2) составляющую, лежащую в плоскости сечения. Эта составляющая обозначается  $\tau$  и называется касательным напряжением. Касательное напряжение в зависимости от действующих сил может иметь любое направление в плоскости сечения. Для удобства  $\tau$  представляют в виде двух составляющих по направлению координатных осей. Принятые обозначения напряжений показаны на рисунке 3.2.

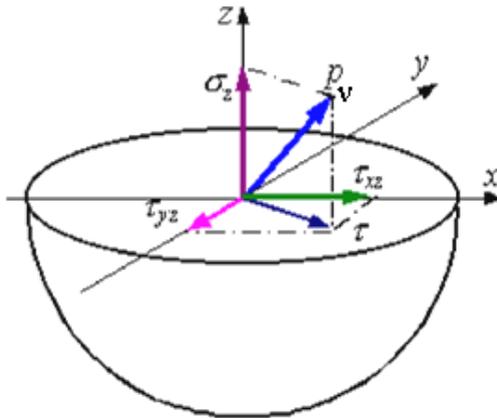


Рисунок 3.2 – Разложение вектора полного напряжения

У нормального напряжения ставится индекс, указывающий какой координатной оси параллельно данное напряжение. Растягивающее нормальное напряжение считается положительным, сжимающее – отрицательным.

Обозначения касательных напряжений имеют два индекса: первый из них указывает, направление действия касательного напряжения (т. е. какой оси параллельно само напряжение), а второй – ориентацию площадки (т. е. какой оси параллельна нормаль к рассматриваемой площадке). Касательные

напряжения на площадках с внешней нормалью, совпадающей с положительным направлением оси координат, считаются положительными, если они направлены тоже по оси координат. На противоположных площадках правило знаков для касательных напряжений противоположно, т. е. касательные напряжения положительны, если они направлены против оси координат.

Так как направления компонент мы связали с осями координат, то впредь компоненты напряжений можно считать скалярными величинами.

Если мысленно вырезать вокруг какой-нибудь точки тела элемент в виде бесконечно малого кубика, то по его граням в общем случае будут действовать напряжения, представленные на рисунке 3.3. Совокупность напряжений на всех элементарных площадках, которые можно провести через какую-либо точку тела называется напряженным состоянием в данной точке.

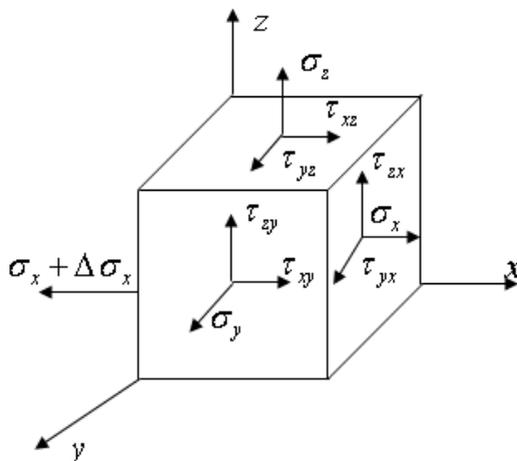


Рисунок 3.3 – Система напряжений в точке

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет определенный физический смысл. Нормальное напряжение возникает, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться. Каса-

тельные напряжения связаны со сдвигом частиц материала по плоскости сечения.

На невидимых гранях куба все компоненты напряжений имеют приращения в виде частных дифференциалов. Например, на левой грани:

$$\begin{aligned}
 \sigma + \Delta\sigma_x, & \quad \Delta\sigma_x = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} \cdot dx; \\
 \tau_{yx} + \Delta\tau_{yx}, & \quad \Delta\tau_{yx} = \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} \cdot dx; \\
 \tau_{zx} + \Delta\tau_{zx}, & \quad \Delta\tau_{zx} = \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} \cdot dx.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Аналогичные выражения можно записать для нижней и тыльной граней куба.

Из условий равновесия куба вытекает закон парности касательных напряжений, который формулируется следующим образом: составляющие касательных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные общему ребру, равны по величине и противоположны по знаку, то есть либо обе направлены к ребру, либо обе направлены от ребра:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \tag{3.3}$$

С учетом закона парности число независимых компонент напряжений, характеризующих напряженное состояние в точке тела, снижается до шести:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ .

Эти шесть компонент при случайном выборе осей полностью характеризуют напряженное состояние в точке.

Компоненты напряжений принято записывать в виде матрицы и называть тензором напряжений:

$$T_H = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

В теории упругости доказано, что через каждую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярных площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки, а также действующие на них нормальные напряжения называются главными.

Главными напряжениями являются для данной точки экстремальными. Их принято обозначать  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , причем:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

В теории упругости показано также, что по площадкам, делящим пополам углы между главными площадками, действуют максимальные касательные напряжения. Их называют главными касательными напряжениями. Через главные нормальные напряжения они выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2); \\ \tau_{23} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3); \\ \tau_{31} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Нормальные напряжения на площадках с экстремальными касательными напряжениями имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2); \\
\sigma_{23} &= \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3); \\
\sigma_{31} &= \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1).
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

### 3.2 Виды напряженного состояния

В зависимости от значений главных напряжений различают три вида напряженного состояния.

1. Линейное напряженное состояние – когда два главных напряжения равны нулю (растяжение или сжатие в одном направлении) (рисунок 3.4).

Пусть известно:

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \sigma_1 = \frac{N}{F}.$$

Полное напряжение по наклонному сечению с площадью  $F_\alpha$  равно:

$$\begin{aligned}
p_\alpha &= \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N}{F} \cos\alpha = \sigma_1 \cdot \cos\alpha, \\
F_\alpha &= \frac{F}{\cos\alpha}.
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

Нормальная и касательная составляющие полного напряжения:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2\alpha, \tag{3.8}$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \sin 2\alpha. \tag{3.9}$$

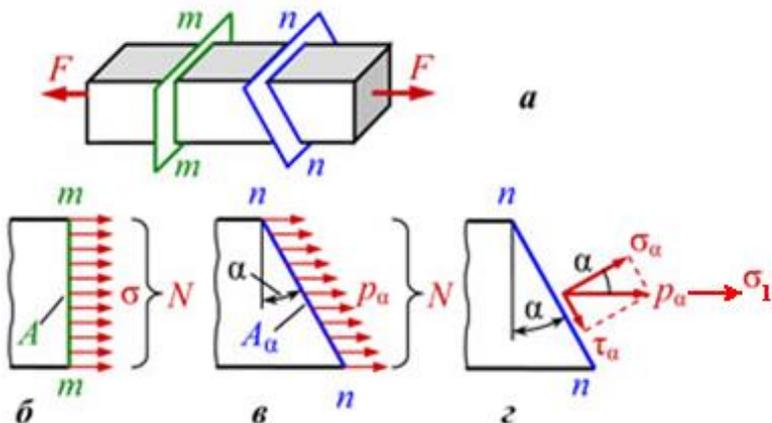


Рисунок 3.4 – Компоненты напряжения при линейном напряженном состоянии

Экстремальные значения нормального напряжения:

- при  $\alpha = 0^\circ$  имеем максимальное напряжение, равное  $\sigma_\alpha = \sigma_1$  (главная площадка перпендикулярна оси элемента);
- при  $\alpha = 90^\circ$  имеем минимальное значение напряжения, равное  $\sigma_\alpha = 0$  (главная площадка параллельна оси элемента).

Экстремальные значения касательного напряжения:

- при  $\alpha = 45^\circ$  имеем максимальное касательное напряжение, равное  $\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2}$ ;
- при  $\alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 90^\circ$  имеем минимальное значение касательного напряжения, равное  $\tau_\alpha = 0$  (главные площадки).

## 2. Плоское напряженное состояние

Напряженное состояние называется плоским или двухосным, если одно из трех главных напряжений равно нулю (рисунок 3.5).

Пусть:

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0.$$

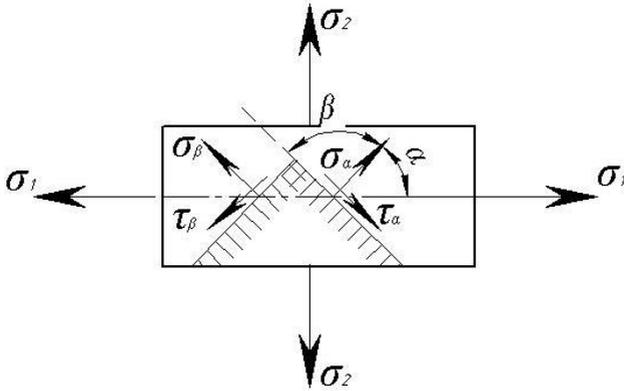


Рисунок 3.5 – Компоненты напряжения при плоском напряженном состоянии

При заданных значениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  напряжения на площадке с нормалью, составляющей угол  $\alpha$  с направлением главного напряжения  $\sigma_1$ , определяется по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha, \quad (3.10)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha, \quad (3.11)$$

- при  $\alpha = 0^\circ$  имеем максимальное напряжение, равное  $\sigma_\alpha = \sigma_1$ ;
- при  $\alpha = 90^\circ$  имеем минимальное значение напряжения, равное  $\sigma_\alpha = \sigma_2$ ;
- при  $\alpha = 45^\circ$  имеем максимальное касательное напряжение, равное  $\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ ;
- при  $\alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 90^\circ$  имеем минимальное значение касательного напряжения, равное  $\tau_\alpha = 0$ .

В случае, когда  $\sigma_2 > 0$ , наибольшее и наименьшее из всех касательных напряжений будут иметь место на площадках, наклоненных под углом в  $45^\circ$  к плоскости напряжений, и равны:

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1}{2}. \quad (3.12)$$

Напряжения, действующие на взаимно перпендикулярных площадках, связаны между собой следующей зависимостью:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (3.13)$$

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \quad (3.14)$$

При заданных значениях нормальных ( $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ ) и касательных ( $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$ ) напряжений на взаимно перпендикулярных площадках элемента (рисунок 3.6) напряжения на площадке с нормалью, составляющей угол  $\alpha$  с направлением  $\sigma_x$ , определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha, \quad (3.15)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha. \quad (3.16)$$

Главные напряжения в этом случае равны:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right]. \quad (3.17)$$

Угол наклона главной площадки  $\alpha$  определяется по формулам:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (3.18)$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_2}. \quad (3.19)$$

В эти формулы напряжения подставляются со своими знаками.

Если при этом оказывается, что  $\operatorname{tg} 2\alpha$  или  $\operatorname{tg} \alpha$  больше нуля (положителен), то угол  $\alpha$  отсчитывается от направления  $\sigma_x$  по ходу часовой стрелки, если же  $\operatorname{tg} 2\alpha$  или  $\operatorname{tg} \alpha$  меньше нуля (отрицателен), то угол отсчитывается против часовой стрелки. Наибольшее и наименьшее касательное напряжения действуют на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам:

$$\tau_{\max}^{\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.20)$$

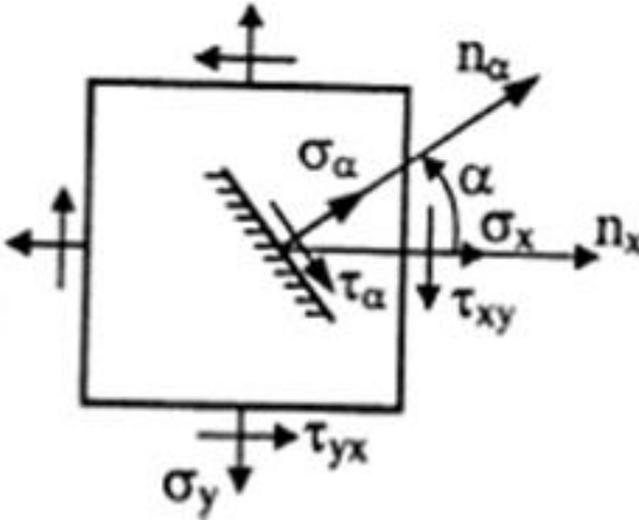


Рисунок 3.6 – Напряжения на площадке с нормалью, составляющей угол  $\alpha$  с направлением  $\sigma_x$

3. Объемное напряженное состояние наблюдается, когда все три главных напряжения отличны от нуля (рисунок 3.7).

При наличии трех главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (рисунок 3.7) нормальное и касательное напряжения на площадке с нормалью  $n$ , составляющей углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  с направлениями соответствующих главных напряжений, определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3, \quad (3.21)$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cdot \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}. \quad (3.22)$$

На площадках, равнонаклоненных к трем главным напряжениям, нормальное и касательное напряжения называются октаэдрическими и равны:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (3.23)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1}. \quad (3.24)$$

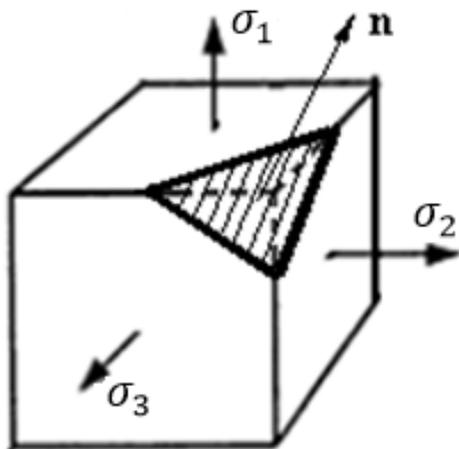


Рисунок 3.7 – Объемное напряженное состояние

### 3.3 Деформации при сложном напряженном состоянии. Связь между напряжениями и деформациями

Связь между линейными упругими деформациями и нормальными напряжениями в направлении этих деформаций выражается обобщенным законом Гука.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Связь между угловыми деформациями и касательными напряжениями:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (3.26)$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  – модуль упругости при сдвиге, МПа.

Главные деформации, т. е. относительные линейные деформации по направлению главных напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Угловые деформации по главным направлениям равны нулю.

Объемная деформация  $\theta$  (относительное изменение объема) может быть выражена так:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.28)$$

Видно, что изменение объема зависит только от суммы главных напряжений, а не от их соотношения. Если принять, что среднее напряжение равно:

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

В этом случае мы получим:

$$\theta = \frac{3(1-2\mu)}{E} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_{cp}}{K}, \quad (3.29)$$

где  $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$  – модуль объемной деформации.

### 3.4 Теории прочности

Наиболее известные в сопротивлении материалов теории прочности:

– первая теория прочности – «Теория наибольших нормальных напряжений».

– вторая теория прочности – «Теория наибольших деформаций».

– третья теория прочности – «Теория наибольших касательных напряжений».

– четвертая теория прочности (энергетическая) – «Теория наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения».

– теория прочности Мора – «Теория предельных напряженных состояний (иногда говорят – V теория прочности)».

Из всех вышеперечисленных теорий прочности наиболее полной, точной и всеобъемлющей является теория Мора. Все её положения были проверены экспериментально. Она подходит как для проверки прочности хрупких материалов (чугун, бетон, кирпич), так и для проверки на прочность пластичных материалов (низкоуглеродистая сталь). Теория наибольших нормальных напряжений и теория наибольших деформаций подходит только для прочностного анализа хрупких материалов, причем только для каких-то определенных условий нагружения, если требовать повышенную точность расчёта. Вот поэтому первые две теории прочности сегодня применять не рекомендуется. Результаты теории наибольших касательных напряжений и теории наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения можно получить в некоторых частных случаях нагружения при применении теории Мора.

В зависимости от условий нагружения материал может находиться в различных механических состояниях: упругом, пластическом и в состоянии разрушения. Под предельным подразумевают такое напряженное состояние, при котором происходит качественное изменение свойств материала – переход от одного механического состояния к другому. Для пла-

стических материалов предельным считается напряженное состояние, соответствующее заметным остаточным деформациям, а для хрупких – такое, при котором начинается разрушение материала.

При линейном напряженном состоянии предельное значение единственного в этом случае главного напряжения может быть непосредственно определено из опыта ( $\sigma_T$  – для пластических материалов и  $\sigma_B$  – для хрупких). Поэтому оценка прочности в этом частном случае проста. В случае сложного напряженного состояния (объемного или плоского) при оценке прочности необходимо учитывать наличие двух или трех отличных от нуля главных напряжений. При этом опасное состояние материала зависит не только от величин главных напряжений, но и от соотношений между ними.

Из-за невозможности экспериментального определения критериев опасного состояния материала при сложном напряженном состоянии пользуются гипотезами, формулирующими условия перехода материала в опасное состояние. На основании таких гипотез построены теории прочности. Эти теории исходят из предпосылок о том, что сложное и линейное напряженные состояния считаются эквивалентными (по прочности), если они при пропорциональном увеличении главных напряжений в одно и то же число раз одновременно становятся опасными. Поэтому оценка прочности материала при любом напряженном состоянии основывается на результатах опытов при простом растяжении (сжатии), и исследуемое напряженное состояние сравнивается с линейным. Для материалов с выраженной пластичностью за опасное (предельное) состояние принимается такое, при котором начинают развиваться остаточные деформации. Для материалов, находящихся в хрупком состоянии, опасным считается такое состояние, которое предшествует началу появления трещин.

Общая запись условия прочности при сложном напряженном состоянии имеет вид:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq [\sigma],$$

где  $\sigma_{\text{пр}}$  – расчетное или приведенное напряжение при сложном напряженном состоянии.

Формулы приведенных напряжений устанавливаются теориями прочности в зависимости от принимаемых гипотез.

*Первая теория прочности* (теория наибольших нормальных напряжений) основана на гипотезе о том, что опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии. Приведенные напряжения при объемном напряженном состоянии:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq [\sigma], \sigma_1 \leq [\sigma] \text{ или } |\sigma_3| \leq [\sigma]. \quad (3.30)$$

Первая теория прочности подтверждается опытами только при растяжении хрупких материалов и лишь в тех случаях, когда все три главные напряжения не однозначны и различны по величине.

*Вторая теория прочности (теория наибольших относительных удлинений)* исходит из гипотезы о том, что разрушение связано с величиной наибольших относительных удлинений. Следовательно, опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшая по модулю относительная линейная деформация достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии.

По этой теории, при  $\varepsilon_{\text{max}} = \varepsilon_1$ , условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq [\sigma], \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (3.31)$$

Вторая теория, как и первая, недостаточно подтверждается опытами. Это объясняется тем, что не учтены особенности строения реальных тел. Первая и вторая теории прочности отображают хрупкое разрушение путем отрыва (в первой это связывается с  $\sigma_{\text{max}}$ , во второй – с  $\varepsilon_{\text{max}}$ ). Поэтому эти теории

рассматриваются только как грубое приближение к действительной картине разрушения.

*Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений)* предполагает, что появление опасного состояния обусловлено наибольшими касательными напряжениями.

Условие прочности можно записать следующим образом:

$$\tau_{max} \leq [\tau] \text{ или } \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (3.32)$$

где  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{пр}$  – приведенное (расчетное) напряжение по третьей теории прочности.

Третья теория прочности отображает наступление текучести в материале, а также разрушение путем сдвигов. Она хорошо подтверждается опытами с пластическими материалами, одинаково сопротивляющимися растяжению и сжатию при условии, что главные напряжения имеют разные знаки.

*Четвертая теория прочности или энергетическая теория прочности (теория наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения)* исходит из предпосылки о том, что количество потенциальной энергии формоизменения, накопленной к моменту наступления опасного состояния (текучести материала), одинаково как при сложном напряженном состоянии, так и при простом растяжении.

Условие прочности по этой теории имеет вид:

$$\sigma_{пр} \leq [\sigma] \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma]. \quad (3.33)$$

Четвертая теория прочности отображает наступление текучести. Она хорошо подтверждается опытами с пластическими материалами, имеющими одинаковый предел текучести при растяжении и сжатии.

*Теория прочности Мора (теория предельных состояний)* исходит из предположения, что прочность материалов в общем случае напряженного состояния зависит от величины и

знака наибольшего  $\sigma_1$  и наименьшего  $\sigma_3$  главных напряжений. Учитывая это предположение, любое напряженное состояние можно изобразить кругом Мора (рисунок 3.8), построенным на главных напряжениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .



Рисунок 3.8 – Круги напряжений Мора

Если для какого-либо материала известны данные о его опасных состояниях при различных соотношениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , то изображая каждое опасное состояние при помощи круга Мора, получим семейство таких предельных кругов. Вычертив их общую огибающую, получим область прочности. Но получение действительной огибающей предельных кругов для всевозможных напряженных состояний неосуществимо. В практических приложениях предельную огибающую заменяют касательной к кругам растяжения и сжатия.

Для получения допустимого напряженного состояния необходимо построить круги Мора по значениям  $[\sigma]$ , полученным на основании опытов на одноосное растяжение и сжатие.

Для выяснения вопроса о прочности в некоторой точке тела строят круг напряжений по действующим в этой точке  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Если круг будет расположен между прямыми, то материал имеет избыточную прочность, а если будет пересекать эти прямые, то материал имеет недостаточную прочность. Круг,

касающийся прямых, характеризует состояние, которое является допускаемым.

Условие прочности:

$$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (3.34)$$

где  $k$  – коэффициент неравнопрочности материала.

$$k = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}. \quad (3.35)$$

Для равнопрочных материалов  $k = 1$ . Наилучшие результаты формула дает для смешанных напряженных состояний, когда  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_3 < 0$ . Тогда круг Мора располагается между предельными кругами растяжения и сжатия.

Теория рекомендована для материалов различного сопротивления растяжению и сжатию, хрупких материалов.

### **Контрольные вопросы**

1. Полное напряжение и его составляющие.
2. Что такое напряженное состояние в точке?
3. Закон парности касательных напряжений.
4. Виды напряженного состояния.
5. Теории прочности.

## 4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

### 4.1 Основные понятия и определения

Деформации и напряжения в брусе существенно зависят от размеров и формы его поперечных сечений. Поэтому во всех расчетных формулах обязательно присутствуют геометрические характеристики этих сечений. При одноосном растяжении и сжатии такой характеристикой является площадь сечения. В теории кручения и изгиба используются более сложные геометрические характеристики, так как в этих случаях напряжения и деформации зависят не только от площади, но и от формы сечения.

На рисунке 4.1 изображено произвольное сечение, отнесенное к некоторой системе координат  $(x, y)$ :  $F$  – величина площади сечения;  $dF$  – элементарная часть этой площади;  $x, y$  – координаты элементарной площадки;  $\rho$  – радиус-вектор;  $C$  – центр тяжести площади сечения.

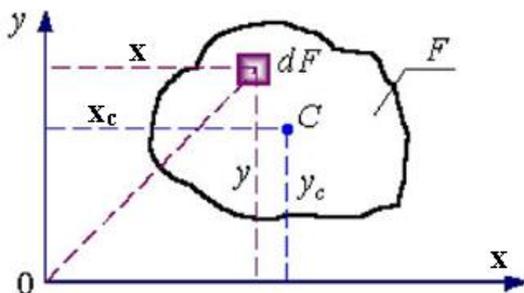


Рисунок 4.1 – К определению геометрических характеристик сечения

Площадь  $F$ , ограниченная произвольной кривой, определяется по формуле:

$$F = \int_F dF, \text{ м}^2. \quad (4.1)$$

Статические моменты площади  $F$  относительно осей  $X$  и  $Y$  определяются по формулам:

$$S_y = \int_F x \cdot dF, \quad S_x = \int_F y \cdot dF. \quad (4.2)$$

Размерность статического момента сечения –  $[M^3]$ .

Если известна величина площади  $F$  и координаты ее центра тяжести, то  $S_x$ ,  $S_y$  определяются по формулам:

$$S_y = F \cdot x_c, \quad S_x = F \cdot y_c. \quad (4.3)$$

Отсюда, если известна площадь и статические моменты, то координаты центра тяжести площади  $F$  определяются по формулам:

$$x_c = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (4.4)$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными. Относительно любых центральных осей статические моменты сечения равны нулю.

Центр тяжести сечения лежит на оси симметрии сечения. Если сечение имеет хотя бы две оси симметрии, то центр тяжести лежит на пересечении этих осей.

Для сложного сечения, состоящего из  $n$  простейших фигур, координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (4.5)$$

где  $x_i, y_i$  и  $F_i$  – координаты центров тяжести и площади сечений отдельных фигур.

Осевые моменты инерции площади  $F$  определяются по формулам:

$$I_y = \int_F x^2 \cdot dF, \quad I_x = \int_F y^2 \cdot dF. \quad (4.6)$$

Центробежный момент инерции площади  $F$  определяется по формуле:

$$I_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF. \quad (4.7)$$

Полярный момент инерции (относительно начала координат) площади  $F$  определяется по формуле:

$$I_\rho = \int_F \rho^2 \cdot dF. \quad (4.8)$$

Так как  $\rho^2 = y^2 + z^2$ :

$$I_\rho = I_x + I_y. \quad (4.9)$$

Размерность моментов инерции –  $[M^4]$ .

Осевые моменты инерции всегда можно представить как произведения площади фигуры на квадраты некоторых вспомогательных величин, имеющих размерность длины и называемых радиусами инерции. Следовательно, радиусы инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$  определяются по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}. \quad (4.10)$$

Осевые и полярный моменты инерции, представляющие собой пределы сумм положительных величин, всегда положительны. Центробежный момент инерции может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю, так как координаты  $x$  и  $y$  входят в его выражение в первых степенях.

## 4.2 Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей

Пусть известны осевые  $I_{x_c}, I_{y_c}$  и центробежный  $I_{x_y}$  моменты инерции сечения относительно его центральных осей и требуется определить моменты инерции  $I_x, I_y, I_{xy}$  того же сечения относительно осей  $x$  и  $y$ , параллельных данным центральным (рисунок 4.2). Тогда согласно рисунка 4.2 и формулам (4.6) и (4.7) в принятых выше обозначениях имеем:

$$I_x = I_{x_c} + 2 \cdot y_c \cdot S_{x_c} + y_c^2 \cdot F, \quad (4.11)$$

$$I_y = I_{y_c} + 2 \cdot x_c \cdot S_{y_c} + x_c^2 \cdot F, \quad (4.12)$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + y_c \cdot S_{y_c} + x_c \cdot S_{x_c} + x_c \cdot y_c \cdot F. \quad (4.13)$$

Учитывая, что относительно центральных осей статические моменты  $S_{x_c}, S_{y_c}$  равны нулю, получаем следующую зависимость между моментами инерции при переходе от центральных осей к любым параллельным осям:

$$I_x = I_{x_c} + y_c^2 \cdot F, \quad (4.14)$$

$$I_y = I_{y_c} + x_c^2 \cdot F, \quad (4.15)$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + x_c \cdot y_c \cdot F. \quad (4.16)$$

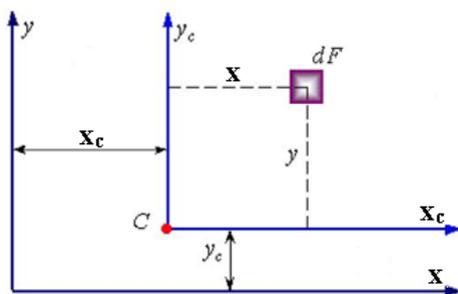


Рисунок 5.2 – Параллельный перенос осей

При переходе от нецентральных осей к также нецентральному в формулах перехода (4.11) – (4.13) должны быть сохранены слагаемые с  $S_x$  и  $S_y$ . Из формул (4.14) – (4.16) видно, что наименьшее значение имеют осевые моменты инерции относительно центральных осей сечения, так как величины  $y_c^2 F$  и  $x_c^2 F$  всегда положительны. Центробежный момент при переходе от центральных осей к нецентральному в зависимости от знака произведения координат  $x_c$  и  $y_c$  может увеличиваться или уменьшаться.

### 4.3 Моменты инерции простейших фигур

В расчетной практике часто встречаются сечения в виде простейших фигур (прямоугольников, кругов, треугольников и т. п.) или их комбинаций. При вычислении моментов инерции таких фигур обычно пользуются заранее выведенными расчетными формулами. Рассмотрим некоторые из простых фигур.

Прямоугольник и параллелограмм (рисунок 4.3). Выделим элементарную полоску площадью  $dF = bdy$  и подставим это значение  $dF$  под знак интеграла (4.6):

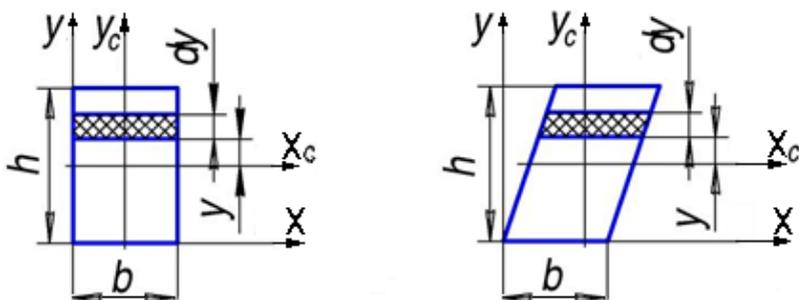


Рисунок 4.3 – К определению основных геометрических характеристик прямоугольника и параллелограмма

$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Следовательно, момент инерции прямоугольника и параллелограмма с основанием  $b$  и высотой  $h$  относительно центральной оси, параллельной основанию равен:

$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.17)$$

Моменты инерции этих фигур относительно осей, проходящих через основание, находим по формуле (4.14):

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{bh^3}{3}. \quad (4.18)$$

Моменты инерции прямоугольника относительно осей  $y_c$  и  $Y$  вычисляются по формулам (4.17) и (4.18), где  $b$  заменяется на  $h$ , а  $h$  на  $b$ :

$$I_{y_c} = \frac{hb^3}{12}. \quad (4.19)$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{hb^3}{3}. \quad (4.20)$$

Треугольник с основанием  $b$  и высотой  $h$  (рисунок 4.4).

Разобьем треугольник на элементарные полоски, параллельные его основанию. Площадь такой полоски:

$$dF = b_y \cdot dy = b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot dy.$$

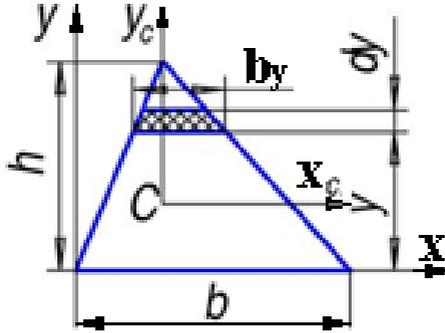


Рисунок 4.4 – К определению основных геометрических характеристик треугольника

Тогда момент инерции треугольника относительно оси, проходящей через основание равен:

$$I_x = \int_0^h b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot y^2 \cdot dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.21)$$

Подсчитывая по формулам переноса момент инерции треугольника относительно центральной оси, параллельной основанию, получаем:

$$I_{xC} = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \frac{b}{h} \cdot (hy^2 - y^3) \cdot dy = \frac{b}{h} \left( h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Bigg|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} = \frac{bh^3}{36}. \quad (4.22)$$

Круг и полукруг диаметра  $d$  (рисунок 4.5). Подсчитываем сначала полярный момент инерции круга. Для этого выделим в сечении окружностями радиуса  $\rho$  и  $\rho + d\rho$  элементарное кольцо площадью  $dF = 2\pi\rho d\rho$  и вычислим  $I_\rho$  по формуле (4.8):

$$I_{\rho} = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}. \quad (4.23)$$

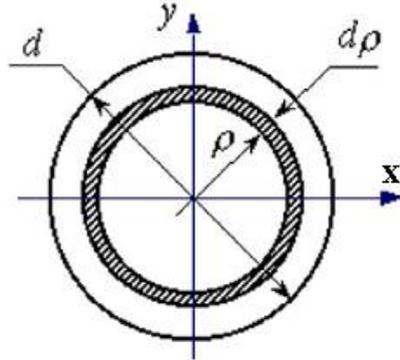


Рисунок 4.5 – К определению основных геометрических характеристик круга

Обычно размеры круглого сечения выражают через диаметр  $d$  и подсчитывают  $I_{\rho}$  по формуле:

$$I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (4.24)$$

Осевые моменты инерции круга найдем с помощью соотношения (4.9). В силу симметрии круга  $I_x = I_y$ , для осевых моментов инерции круга получаем выражение:

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (4.25)$$

Центральные оси  $x$  и  $y$  делят круг на четыре совершенно одинаковые части с равными моментами инерции относительно этих осей. Следовательно, моменты инерции круга и полукруга относительно осей  $x$  и  $y$  должны быть равны соответственно учетверенным и удвоенным моментам инерции

относительно тех же осей одной четверти круга. Из сказанного следует, что моменты инерции полукруга относительно оси симметрии  $x$  и оси  $y$ , проходящей через его основание (рисунок 4.6), будут одинаковы и равны половине момента инерции круга:

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{128}, \quad (4.26)$$

а момент инерции относительно центральной оси  $x_c$ :

$$I_{x_c} = \frac{\pi d^4}{256}. \quad (4.27)$$

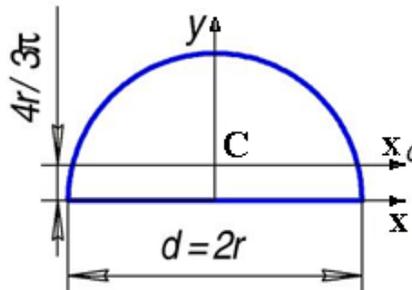


Рисунок 4.6 – К определению основных геометрических характеристик полукруга

#### 4.4 Вычисление моментов инерции сложных фигур

Всякую сложную фигуру обычно можно разбить на ряд простейших фигур, моменты инерции которых относительно их центральных осей известны. Применяв формулы переноса осей инерции, можно определить момент инерции сложной фигуры, алгебраически суммируя моменты инерции простых фигур относительно общей оси – центральной оси сложной фигуры.

Например, осевой момент инерции толстостенного кольца с внешним диаметром  $D$  и внутренним  $d$  (рисунок 4.7) отно-

нительно любой центральной оси может быть найден как разность моментов инерции большого и малого кругов:

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4), \quad (4.28)$$

где  $\alpha = d/D$  – коэффициент полости.

Полярный момент инерции кольца находится аналогично:

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4). \quad (4.29)$$

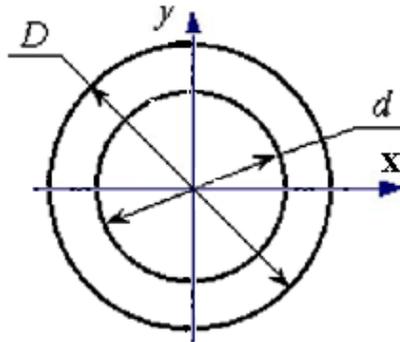


Рисунок 4.7 – Толстостенное кольцо

#### 4.5 Изменение моментов инерции при повороте осей координат

Предположим, что задана система осей координат и известны моменты инерции  $I_x, I_y$  и  $I_{xy}$  фигуры относительно этих осей. Повернем оси координат на некоторый угол  $\alpha$  против часовой стрелки и определим моменты инерции той же фигуры относительно новых осей координат  $u$  и  $v$ .

Из рисунка 4.8 следует, что координаты какой-либо точки в обеих системах координат связаны между собой соотношениями:

$$u = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha;$$

$$v = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha.$$

Момент инерции:

$$I_u = \int_F v^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.30)$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.31)$$

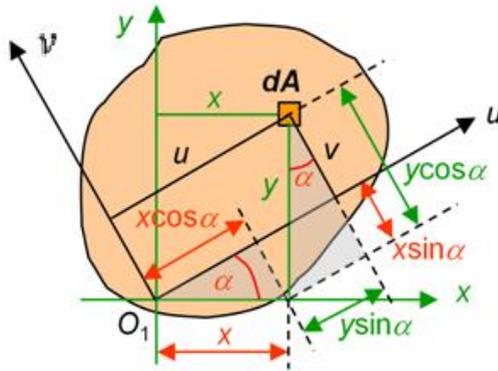


Рисунок 4.8 – Поворот координатных осей

Центробежный момент инерции:

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (4.32)$$

Из полученных уравнений видно, что:

$$I_u + I_v = I_x + I_y,$$

т. е. сумма осевых моментов инерции при повороте осей координат остается величиной постоянной. Поэтому, если относительно какой-либо оси момент инерции достигает миниму-

ма, то относительно перпендикулярной ей оси он имеет минимальное значение.

#### 4.6 Главные оси и главные моменты инерции

Из формул (4.30) – (4.32) видно, что при повороте осей координат центробежный момент инерции меняет знак, и, следовательно, существует такое положение осей, при котором центробежный момент равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции сечения обращается в нуль, называются главными осями, а главные оси, проходящие через центр тяжести сечения – главными центральными осями инерции сечения.

Моменты инерции относительно главных осей инерции сечения называются главными моментами инерции сечения и обозначаются через  $I_1$  и  $I_2$ , причем  $I_1 > I_2$ . Обычно, говоря о главных моментах, подразумевают осевые моменты инерции относительно главных центральных осей инерции.

Предположим, что оси  $u$  и  $v$  главные. Тогда:

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

Отсюда:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (4.33)$$

Уравнение (4.33) определяет положение главных осей инерции сечения в данной точке относительно исходных осей координат. При повороте осей координат изменяются также и осевые моменты инерции.

Главные оси инерции являются осями, относительно которых осевые моменты инерции сечения достигают экстремальных значений.

Для упрощения вычисления главных моментов инерции применяют формулу:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (4.34)$$

Знак плюс перед радикалом соответствует большему  $I_1$ , а знак минус – меньшему  $I_2$  из моментов инерции сечения.

Если моменты инерции сечения относительно главных осей одинаковы, то все оси, проходящие через ту же точку сечения, являются главными и осевые моменты инерции относительно всех этих осей одинаковы:  $I_u = I_v = I_y = I_x$ . Этим свойством обладают, например, квадратные, круглые, кольцевые сечения.

#### 4.7 Моменты сопротивления площади сечения

Осевым моментом сопротивления площади сечения  $F$  относительно данной оси называется отношение момента инерции площади относительно этой же оси к расстоянию от оси до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \quad (4.35)$$

Размерность момента сопротивления –  $[M^3]$ . Отношение полярного момента инерции площади сечения к наибольшему радиусу-вектору этой площади, называется полярным моментом сопротивления:

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}}. \quad (4.36)$$

Для прямоугольника:

$$W_x = \frac{bh^2}{6}, \quad W_y = \frac{hb^2}{6}. \quad (4.37)$$

Для круга:

$$W_x = W_y = W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3, W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (4.38)$$

### **Контрольные вопросы**

1. Статические моменты сечения.
2. Определение положения центра тяжести сечения сложной формы.
3. Моменты инерции сечения простейших фигур.
4. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей.
5. Вычисление моментов инерции сложных сечений.

## 5 КРУЧЕНИЕ

### 5.1 Общие понятия

Кручением называется деформация стержня, возникающая при действии внешних пар сил, лежащих в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня.

Стержень, работающий на кручение, называют валом.

Моменты внешних пар называют скручивающими моментами и обозначают  $M$ .

Внутренние силы в поперечных сечениях при кручении приводятся к одному силовому фактору – крутящему моменту и обозначают  $M_k$ .

В соответствии с методом сечений крутящий момент в произвольном сечении стержня равен алгебраической сумме внешних крутящих моментов, приложенных к отсеченной части вала (правой или левой).

Эпюра – графическое изображение изменения крутящего момента по длине стержня.

### 5.2 Напряжения при кручении брусьев сплошного и кольцевого сечений. Закон Гука при кручении

Теория кручения стержней основана на следующих предположениях:

- ось стержня после деформации остается прямой;
- расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными, т. е. удлинения (укорочения) волокон отсутствуют;
- поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к оси бруса после деформации (гипотеза плоских сечений);
- радиусы поперечных сечений, поворачиваясь на некоторый угол  $\varphi$ , остаются прямыми.

Справедливость этих допущений подтверждена экспериментальными и точными решениями, полученными методами теории упругости.

Таким образом, при кручении возникают только касательные напряжения  $\tau$ , прямо пропорциональные расстоянию от центра до точки сечения и направленные перпендикулярно радиусу – вектору  $\rho$  (расстоянию от центра сечения до рассматриваемой точки) данной точки. В центре сечения касательные напряжения равны нулю, а у поверхности имеют максимальное значение.

Величину касательных напряжений можно найти интегрированием моментов по площади сечения стержня (рисунок 5.1).

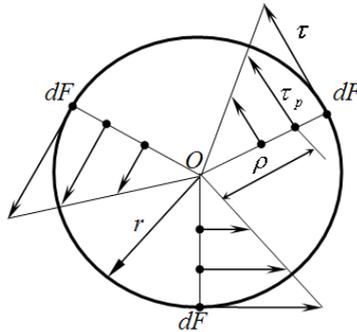


Рисунок 5.1 – Эпюра касательных напряжений при кручении

Усилие, приложенное к элементарной площадке  $dF$ , равно  $dP = \tau_{\rho} dF$ , а его момент относительно центра сечения равен:

$$dM_k = \tau_{\rho} \cdot \rho \cdot dF .$$

(5.1)

Крутящий момент  $M_k$  можно найти как интеграл, распространённый по площади сечения,

$$M_k = \int_F \tau_{\rho} \cdot \rho \cdot dF . \quad (5.2)$$

Рассматривая напряжённое состояние в сечении вала как чистый сдвиг, можно воспользоваться законом Гука:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (5.3)$$

где  $\gamma = r \frac{d\varphi}{dx}$  – угол сдвига на поверхности вала ( $\rho = r$ ), а  $\frac{d\varphi}{dx}$  – производная от угла закручивания вала по его длине (относительный угол закручивания).

В точке, находящейся на расстоянии  $\rho$  от центра, относительный угол закручивания равен:

$$\gamma_\rho = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$

Формула (5.3) для напряжений в этой точке получит вид

$$\tau_\rho = \rho \cdot G \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.4)$$

Подставляя эту формулу в (5.2) и вынося за знак интеграла постоянные при интегрировании величины, получим:

$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 dF = M_k. \quad (5.5)$$

Обозначим  $\int_F \rho^2 dF = J_p$ . Сумма произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до центра сечения, является геометрической характеристикой данного сечения и называется полярным моментом инерции сечения.

В частности, для круга

$$J_p = \int_0^r 2\pi \cdot \rho \cdot \rho^2 d\rho = 2\pi \int_0^r \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi \cdot r^4}{2}.$$

Из (5.5) после подстановки  $J_p$  найдем относительный угол закручивания  $\theta$  :

$$G \frac{d\varphi}{dx} \cdot J_p = M k ;$$
$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M k}{G \cdot J_p} . \quad (5.6)$$

Далее подстановкой (5.6) в (5.4) найдем закон распределения  $\tau$  по радиусу при кручении круглого стержня:

$$\tau_\rho = \frac{M k}{J_p} \cdot \rho . \quad (5.7)$$

Наибольшего значения напряжения достигают у поверхности вала (для вала круглого сплошного сечения):

$$\tau_{\max} = \frac{M k}{J_p} \cdot r .$$

Эту формулу принято записывать в виде:

$$\tau_{\max} = \frac{M k}{W_p} , \quad (5.8)$$

где  $W_p = \frac{J_p}{r}$  – момент сопротивления сечения при кручении.

$$\text{Для круга } W_p = \frac{\pi r^3}{2} .$$

### 5.3 Расчет брусев на прочность и жесткость при кручении

Условие прочности вала (или участка вала) при кручении (с  $M = \text{const}$  по длине вала) имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau]. \quad (5.9)$$

Для круглого стержня:

$$\tau_{\max} = \frac{2M_k}{\pi \cdot r^3} \leq [\tau].$$

Допускаемое напряжение как и при чистом сдвиге следует принимать равными  $[\tau] = (0,55 \div 0,60) \cdot [\sigma]$ . Здесь  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение при растяжении.

На практике величина  $[\tau]$  для сталей в зависимости от сорта стали и характера нагрузки колеблется в пределах  $20 \div 100$  МПа.

Как известно, при кручении происходит взаимный поворот соседних сечений и угол этого поворота  $\varphi$  называется углом закручивания. При расстоянии между сечениями, равном  $l$ , угол закручивания будет равен:

$$\varphi = \int_0^l \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_0^l \frac{M_k}{G \cdot J_p} dx, \quad (5.10)$$

где  $\frac{d\varphi}{dx}$  – относительный угол закручивания.

Если  $M_k = \text{const}$  по длине участка, то

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p}. \quad (5.11)$$

Величину  $GJ_p$  называют жесткостью при кручении. Она отражает влияние геометрии сечения и упругих свойств материала на деформируемость вала.

Полный угол закручивания вала можно получить алгебраическим суммированием углов закручивания на участках. Величина полного угла закручивания необходима для проверки

вала на жесткость. Условие жесткости круглого вала при кручении имеет вид:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p} \leq [\varphi], \quad (5.12)$$

где  $[\varphi]$  – допускаемый угол закручивания вала.

Практикой разработаны следующие допустимые пределы для оптимального угла закручивания:

- в обычных условиях эксплуатации  $[\theta] = 0,3 \frac{\text{град}}{\text{м}}$  ;
- при переменных нагрузках  $[\theta] = 0,25 \frac{\text{град}}{\text{м}}$  ;
- при ударных нагрузках  $[\theta] = 0,15 \frac{\text{град}}{\text{м}}$  .

Очевидно, что для вала (или участка вала) с постоянным по длине  $M_k$  , условию жесткости (5.12) можно придать следующий вид:

$$\theta_{\max} = \frac{M_k}{G \cdot J_p} \leq [\theta]. \quad (5.13)$$

Таким образом, размеры вала необходимо определять из условия прочности и условия жесткости.

#### 5.4 Расчет цилиндрических винтовых пружин

Рассмотрим пружину с известными параметрами:

$d$  – диаметр проволоки;

$D$  – средний диаметр пружины;

$n$  – число витков.

Приближенный метод расчёта пружин заключается в следующем.

В поперечном сечении витка пружины действует два силовых фактора: крутящий момент ( $M_k$ ) и поперечная сила ( $P = Q$ ) (рисунок 5.2).

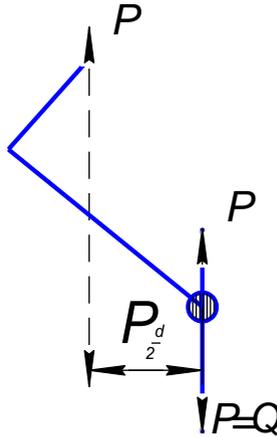


Рисунок 5.2 – Рассматриваемый виток пружины

Крутящий момент определяется как произведение поперечной силы на плечо:

$$M_k = \frac{P \cdot D}{2}. \quad (5.14)$$

Касательное напряжение ( $\tau_1$ ), возникающее от крутящего момента, определяется по формуле:

$$\tau_1 = \frac{M_k}{W_P} = \frac{P \cdot D}{2 \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3}. \quad (5.15)$$

Касательное напряжение ( $\tau_2$ ), возникающее от поперечной силы, определим по формуле:

$$\tau_2 = \frac{Q}{F} = \frac{P}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2}, \quad (5.16)$$

где  $F$  – площадь сечения витка,  $\text{м}^2$ .

Максимальное напряжение, возникающее в пружине равно:

$$\tau_{max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right). \quad (5.17)$$

Величиной  $\frac{d}{2D}$  приблизительно равной 0,1–0,05 пренебрегаем по сравнению с единицей. Тогда формула получит вид:

$$\tau = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3}. \quad (5.18)$$

С учётом действия всех неучтенных силовых факторов для определения касательного напряжения принимают формулу:

$$\tau = k \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3}, \quad (5.19)$$

где  $k$  – коэффициент, зависящий от индекса.

### **Контрольные вопросы**

1. Определение напряжений при кручении.
2. Определение деформаций при кручении.
3. Расчет на прочность по допускаемым напряжениям при кручении.
4. Расчет на жесткость при кручении.

## 6 ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ

### 6.1 Понятие о деформации изгиба.

#### Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил

Поперечный изгиб стержня возникает при действии на него сил, перпендикулярных его оси лежащих в плоскости симметрии стержня, или пар сил, плоскости которых проходят через ось. Стержень при таком нагружении принято называть балкой.

Деформация изгиба состоит в том, что ось балки искривляется, поперечные сечения балки наклоняются друг к другу, волокна балки удлиняются с выпуклой стороны и укорачиваются с вогнутой. Слой, в котором волокна не меняют своей длины, называется нейтральным слоем. Прямая, по которой нейтральный слой пересекается с поперечным сечением, называется нейтральной осью.

Балка воспринимает давление от других элементов конструкции и передает их на опоры. Эти давления и реакции опор являются внешними силами балки (нагрузками).

Существующие опоры балок, при всем многообразии их конструкций, относятся к одному из трех видов: шарнирно-неподвижная опора, шарнирно-подвижная опора и защемление.

Шарнирно-неподвижная опора ( $A$ , рисунок 6.1) позволяет опорному сечению свободно поворачиваться вокруг шарнира  $A$ , но не допускает перемещения этого сечения вдоль оси. Опора этого вида в ответ на нагружение балки порождает две неизвестные реакции  $N_A$  и  $H_A$ .

Шарнирно-подвижная опора ( $B$ , рисунок 6.1) в отличие от неподвижной допускает осевое перемещение опорного сечения и потому порождает только одну неизвестную (по величине) реакцию  $R_B$ .

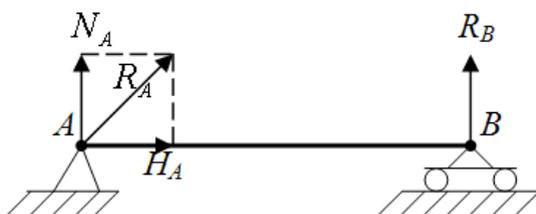


Рисунок 6.1 – Шарнирно-неподвижная и шарнирно-подвижная опоры

Защемление (рисунок 6.2) получается из шарнирно-неподвижной опоры уничтожением шарнира и, следовательно, не допускает никаких перемещений опорного сечения. Защемление порождает три неизвестных реакции: силы  $N_A$ ,  $H_A$  и опорный момент  $M_A$ .

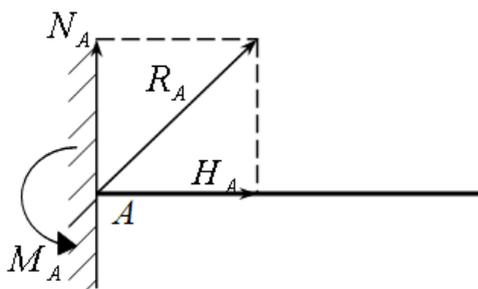


Рисунок 6.2 – Защемление

Устройство опор балок далеко не всегда соответствует схемам, приведенным выше. Чтобы отнести опору к тому или иному виду, надо установить – допускает ли ее устройство хотя бы небольшой поворот или перемещение. При этом надо иметь в виду, что деформации балок весьма малы.

Для определения напряжений в сечениях балки необходимо уметь выражать внутренние силы (усилия) в любом сечении через внешние силы.

При изгибе балки в любом ее поперечном сечении возникают элементарные касательные и нормальные усилия, которые приводятся к силе  $Q$  и паре с моментом  $M$ .

Сила  $Q$  складывается из элементарных касательных усилий и называется поперечной силой.

Для выражения силы  $Q$  через внешние силы применяют метод сечений. Рассекают балку на две части плоскостью и рассматривают равновесие левой отсеченной части.

Поперечная сила  $Q$  численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на плоскость самого сечения.

Поперечная сила в сечении считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена вверх, а справа – вниз, и отрицательна в противоположном случае (рисунок 6.3).

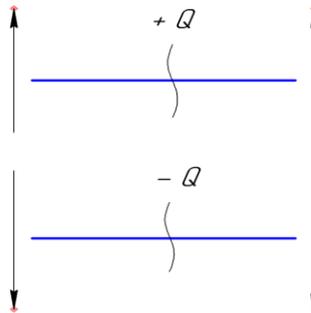


Рисунок 6.3 – Определение знака поперечной силы

Момент внутренних сил  $M$  складывается из моментов элементарных нормальных усилий и называется изгибающим моментом.

Изгибающий момент  $M$  в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно поперечной оси сечения.

Изгибающий момент принято считать положительным, если внешняя нагрузка изгибает балку выпуклостью вниз или стремится повернуть левую часть балки по направлению хода часовой стрелки, а правую часть против хода часовой стрелки

и отрицательным, если внешняя нагрузка изгибает балку выпуклостью вверх или стремится повернуть левую часть балки против хода часовой стрелки, а правую часть по направлению хода часовой стрелки.

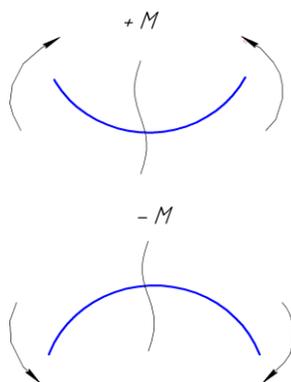


Рисунок 6.4 – Определение знака изгибающего момента

Графики распределения перерезывающих сил и изгибающих моментов по длине балки называют эпюрами.

При построении эпюры  $Q$  и  $M$  балку разбивают на участки, границами которых являются точки приложения сосредоточенных сил и окончания действия распределенных нагрузок.

На каждом участке берут произвольное сечение и составляют аналитические выражения для  $Q$  и  $M$ , которые справедливы в пределах рассматриваемого участка.

Для построения эпюры на данном участке достаточно получить две точки – в начале и в конце участка. Подставив в найденные выражения  $Q$  и  $M$  абсциссу начала и конца участка, определяют их величины.

Положительные значения  $Q$  и  $M$  откладывают вверх от оси эпюры, отрицательные вниз.

Эпюра  $M$  получается построенной со стороны сжатых волокон.

Ниже для примера построены эпюры  $Q$  и  $M$ .

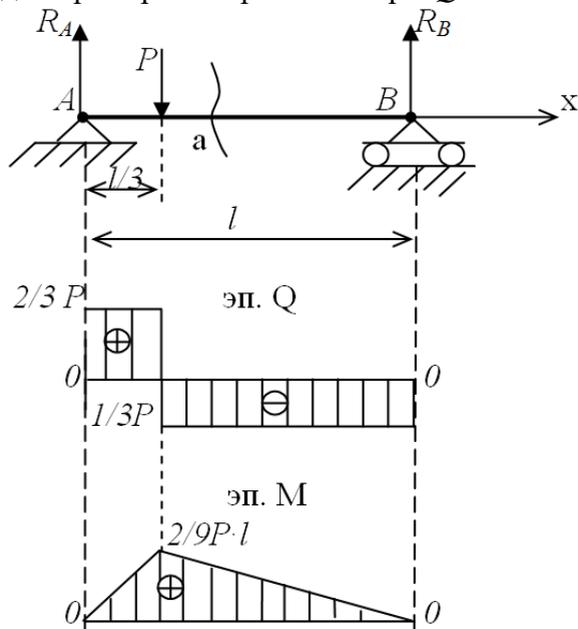


Рисунок 6.5 – Эпюры  $Q$  и  $M$  для заданной балки

Реакции опоры:

$$\sum M_A = 0. \quad R_B l - P \cdot l/3 = 0,$$

$$R_B = P/3.$$

$$R_B + R_A = P,$$

$$R_A = 2/3 P.$$

В сечении  $x=a$ .

$$Q_a = R_a - P = -1/3 P$$

или

$$Q_a = -R_B = -1/3 P.$$

$$M_a = \frac{2}{3} P \frac{1}{3} l = \frac{2}{9} Pl \quad \text{или} \quad M_a = \frac{1}{3} P \frac{2}{3} l = \frac{2}{9} Pl.$$

Между изгибающим моментом  $M$ , поперечной силой  $Q$  и интенсивностью распределённой нагрузки  $q$  установлены (Д. И. Журавским) следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x), \quad \frac{dQ(x)}{dx} = q, \quad \text{или} \quad \frac{dQ(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = q. \quad (6.1)$$

Проверку эпюр  $Q$  и  $M$  осуществляют на основании правил, вытекающих из дифференциальных зависимостей:

- на участках балки, где нет распределенной нагрузки, эпюра  $Q$  ограничена горизонтальной прямой, а эпюра  $M$  – наклонной прямой;

- на участках балки с равномерно распределенной нагрузкой эпюра  $Q$  ограничена прямой наклоненной линией, а эпюра  $M$  – параболой;

- на участках балки с положительной  $Q$  момент возрастает, а на участках, где  $Q$  отрицательна – убывает;

- в сечениях, где  $Q$  меняет знак, изгибающий момент имеет экстремальное значение. Если  $Q$  меняет знак с «+» на «–», то момент максимален, если с «–» на «+», то минимален;

- в сечении, где приложена сосредоточенная сила на эпюре  $Q$  будет «скачек» на величину и в направлении приложенной силы, а на эпюре  $M$  – излом графика;

- в сечении, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре  $M$  получается «скачек» на величину момента. Если момент действует по часовой стрелке – «скачек» вверх, если против часовой стрелки – вниз;

- если на участке поперечная сила равна нулю, то эпюра  $M$  ограничена горизонтальной прямой.

## 6.2 Нормальные напряжения при изгибе

Если система внешних сил, приложенных к балке, приводится к парам сил, то есть поперечные силы в сечениях отсут-

ствуют, то деформация балки называется чистым изгибом (рисунок 6.6). При чистом изгибе в сечениях балки действуют только нормальные напряжения  $\sigma$ , которые приводятся к изгибающему моменту  $M$ .

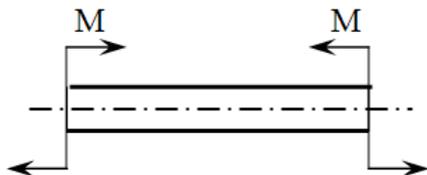


Рисунок 6.6 – Пример чистого изгиба

Практически чистый изгиб осуществим только при условии, что собственный вес балки мал по сравнению с внешними нагрузками.

В основу теории чистого изгиба положены следующие предположения (допущения):

1. При чистом изгибе плоские поперечные сечения остаются плоскими (гипотеза плоских сечений).
2. Продольные волокна друг на друга не давят и испытывают простое линейное растяжение или сжатие.
3. Деформации волокон и, следовательно, нормальные напряжения изменяются только по высоте сечения (по ширине сечения остаются постоянными).

Кроме того, следует иметь в виду следующие ограничения:

1. Балка имеет плоскость симметрии, и все внешние силы лежат в этой плоскости.
2. Материал балки подчиняется закону Гука, причем модуль упругости при растяжении и сжатии одинаков.
3. Соотношения между размерами балки обеспечивают условия плоского изгиба, при котором ось балки остается в плоскости действия внешних сил.

Для отыскания нормальных напряжений при изгибе применяют метод сечений.

Балку, подвергающуюся чистому изгибу парами  $M$ , разрежем сечением 1-1 на две части и рассмотрим равновесие одной части, например, левой (рисунок 6.7).

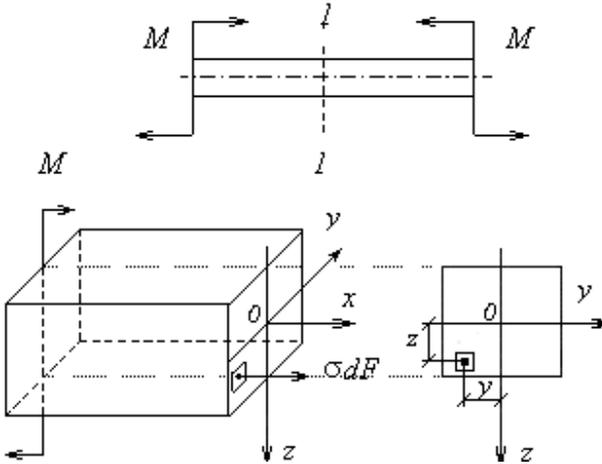


Рисунок 6.7 – Сечение балки при чистом изгибе

Плоскость координат  $xoy$  совместим с нейтральным слоем, положение которого пока неизвестно. Ось  $z$  направим вниз по линии пересечения плоскости симметрии с плоскостью сечения 1-1.

Для равновесия пространственной системы сил можно записать шесть известных уравнений статики. В данном случае три из них по очевидным причинам обращаются в тождества:

$$\sum Y = 0, \sum Z = 0, \sum M_x = 0. \quad (6.2)$$

Остальные три приводят к следующим результатам:

$$\sum X = 0, \int_F \sigma dF = 0, \quad (6.3)$$

$$\sum M_y = 0, \int_F \sigma z dF = M, \quad (6.4)$$

$$\sum M_z = 0, \int_F \sigma y dF = 0. \quad (6.5)$$

Однако найти  $\sigma$  из этих уравнений невозможно, пока неизвестен закон распределения  $\sigma$  по высоте сечения, и неизвестно положение нейтральной оси. Для решения этих вопросов рассмотрим деформацию балки. Выделим элемент балки длиной  $dx$  и установим его вид после деформации (рисунок 6.8).

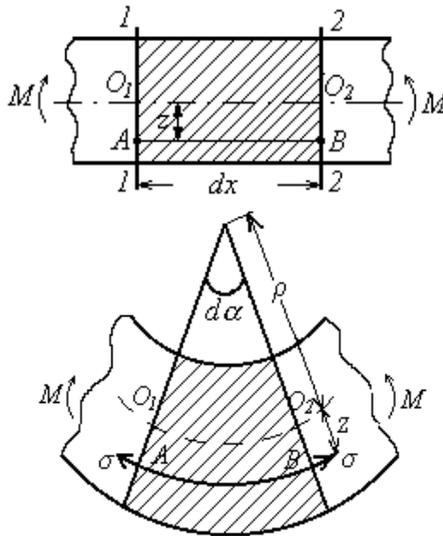


Рисунок 6.8 – Элемент балки, подверженный действию внешнего изгибающего момента

Найдём удлинение волокна  $AB$  лежащего на расстоянии  $z$  от нейтрального слоя. Первоначальная длина  $l$  волокна  $AB$  равна  $O_1O_2$ , или  $l = \rho d\alpha$ , где  $\rho$  – радиус кривизны нейтрального слоя.

После деформации длина волокна измеряется по дуге  $AB$  и будет равна:

$$l + \Delta l = (\rho + z) \cdot d\alpha.$$

Отсюда абсолютное и относительное удлинения,  $\Delta l$  и  $\epsilon$ , равны:

$$\Delta l = (\rho + z) \cdot d\alpha - \rho \cdot d\alpha = z \cdot d\alpha;$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon = \frac{z}{\rho}. \quad (6.6)$$

Таким образом, относительные удлинения волокон пропорциональны их расстояниям до нейтрального слоя.

Исходя из гипотезы об отсутствии давления волокон друг на друга и закона Гука, заключаем, что каждое волокно испытывает простое растяжение (сжатие) под действием нормальных напряжений

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{E \cdot z}{\rho}. \quad (6.7)$$

На нейтральной оси (при  $z = 0$ )  $\sigma = 0$ . При переходе в сжатую зону ( $z < 0$ )  $\sigma$  меняют знак вместе с  $z$  (становятся сжимающими). Наибольшего значения  $\sigma$  достигают при  $z = z_{max}$ , т. е. в крайних волокнах (рисунок 6.9).

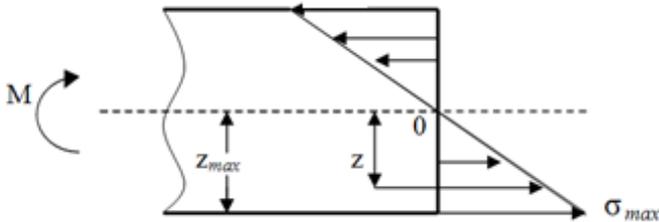


Рисунок 6.9 – Эпюра нормальных напряжений при изгибе

Подставим  $\sigma$  (6.7) в уравнение (6.3) и получим:

$$\int_F \sigma dF = \int_F \frac{E}{\rho} z dF = 0.$$

При  $\frac{E}{\rho} = const$  имеет место  $\int_F \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_F z dF = 0$ .

Следовательно,

$$\int_F z \cdot dF = S_y = 0. \quad (6.8)$$

Этот интеграл ( $S_y$ ) является статическим моментом площади сечения относительно нейтральной оси  $y$ . Его равенство нулю означает, что нейтральная ось является центральной (проходит через центр тяжести сечения).

Таким образом, положение нейтральной оси и нейтрального слоя вполне определено.

Подставим  $\sigma$  (6.7) в уравнение (6.5) и получим:

$$\begin{aligned} \int_F \sigma \cdot y \cdot dF &= \frac{E}{\rho} \int_F y \cdot z \cdot dF = 0, \\ \int_F y \cdot z \cdot dF &= J_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Этот интеграл ( $J_{yz}$ ) называется центробежным моментом инерции относительно осей  $y$  и  $z$ . Для сечения, симметричного относительно оси  $z$  он равен нулю.

Этим подтверждается, что соблюдены требования плоского изгиба о наличии плоскости симметрии балки и расположении внешних сил в этой плоскости.

Заметим, что оси, относительно которых центробежные моменты инерции равны нулю, называются главными осями инерции сечения.

Наконец, подставим  $\sigma$  (6.7) в уравнение (6.4) и получим:

$$\begin{aligned} \int_F \sigma \cdot z \cdot dF &= M, \quad \frac{E}{\rho} \int_F z^2 \cdot dF = M, \\ \frac{E}{\rho} &= \frac{M}{J_y}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где  $J_y = \int_F z^2 \cdot dF$  – осевой момент инерции площади сечения

относительно оси  $y$  (сумма произведений площадок  $dF$  на квадраты их расстояний до оси  $y$ ).

Подставим (6.10) в (6.7) и получим формулу для вычисления  $\sigma$  при чистом изгибе:

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{J}. \quad (6.11)$$

Индекс  $y$  опущен, так как  $J$  всегда вычисляется относительно нейтральной оси сечения.

Из (6.10) можно записать  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$ .

Отсюда следует, что произведение  $EJ$  характеризует способность балки сопротивляться искривлению (изгибу) в зависимости от формы и размеров сечения и материала балки. Величину  $EJ$  называют жесткостью балки при изгибе.

Формулу максимальных напряжений в сечении балки:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{J} z_{max}$$

принято записывать в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W}, \quad (6.12)$$

где  $W = \frac{J}{z_{max}}$  – осевой момент сопротивления сечения.

В итоге из (6.11) следует, что нормальные напряжения в любой точке сечения прямо пропорциональны величине изгибающего момента и расстоянию от точки до нейтральной оси

и обратно пропорциональны моменту инерции сечения относительно нейтральной оси.

Для проверки прочности балки по нормальным напряжениям необходимо найти опасное сечение, в котором  $M = M_{\max}$ . Тогда условие прочности по нормальным напряжениям можно записать в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (6.13)$$

Если материал балки неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо составить два условия прочности:

$$\sigma_p = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma_p] \text{ и } \sigma_{сж} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma_{сж}]. \quad (6.14)$$

Из условия прочности следует, что осевой момент сопротивления  $W$  характеризует влияние формы и размеров сечения балки на ее прочность.

### 6.3 Касательные напряжения при изгибе

Рассмотрим общий случай прямого изгиба, когда в сечениях балки наряду с изгибающими моментами  $M$  действуют также перерезывающие силы  $Q$ , к которым приводятся касательные напряжения  $\tau$ . Относительно  $\tau$  сделаем следующие предположения:

- 1) направления  $\tau$  параллельны силе  $Q$ , которая является их равнодействующей;
- 2) касательные напряжения на площадках, расположенных на равных расстояниях от нейтральной оси равны между собой.

В теории упругости доказано, что эти предположения (предложенные Д. И. Журавским) вполне приемлемы для балок прямоугольного сечения.

Выясним закон распределения  $\tau$  по высоте сечения. Для этого, выделим сечениями  $mn$  и  $m_1n_1$  элемент балки длиной  $dx$ , отсечем его нижнюю часть плоскостью  $PP_1$ , параллельной нейтральному слою, и рассмотрим равновесие отсечённого элемента (рисунок 6.10).

Фасадные грани отсечённого элемента свободны от напряжений. На грани, параллельной нейтральному слою, в соответствии с законом парности действуют:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Их равнодействующая равна  $\tau_{xz} b dx$ .

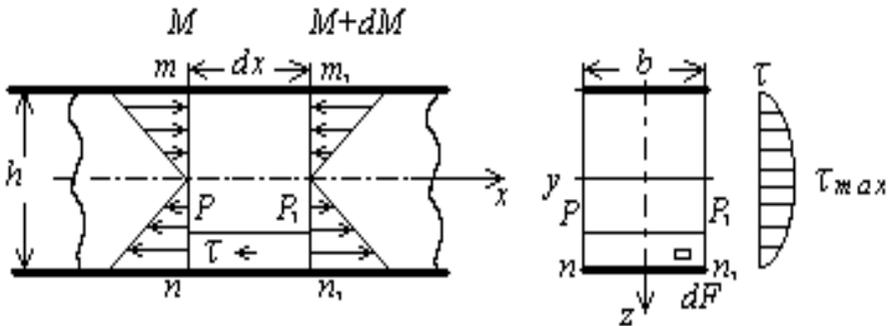


Рисунок 6.10 – Касательные напряжения при изгибе, эпюра касательных напряжений

Напряжения на  $\tau_{zx}$  на боковых гранях элемента (в сечениях  $mn$  и  $m_1n_1$ ) в рассмотрение не входят, как перпендикулярные оси  $x$ .

Нормальные напряжения на левой грани элемента (в сечении  $mn$ ) на площадке  $dF$  создают усилие:

$$\sigma \cdot dF = \frac{M \cdot z}{J} \cdot dF. \quad (6.15)$$

Сумма этих усилий по площади грани равна:

$$\int_{z_1}^{h/2} \frac{M \cdot z}{J} \cdot dF, \quad (6.16)$$

где  $z_1$  – расстояние от нейтрального слоя до плоскости  $PP_1$ .

Аналогично, на правой грани элемента (в сечении  $m_1n_1$ ) действует суммарное осевое усилие:

$$\int_{z_1}^{h/2} \frac{M + dM}{J} \cdot z \cdot dF. \quad (6.17)$$

Усилия  $\tau_{xz} b dx$  и усилия (6.16), (6.17) должны удовлетворять уравнению равновесия отсечённого элемента:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0, \text{ или} \\ \tau_{xz} \cdot b \cdot dx &= \int_{z_1}^{h/2} \frac{M + dM}{J} \cdot z \cdot dF - \int_{z_1}^{h/2} \frac{M}{J} \cdot z \cdot dF, \text{ откуда} \\ \tau_{xz} &= \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{bJ} \int_{z_1}^{h/2} z \cdot dF. \end{aligned}$$

В этом уравнении  $\frac{dM}{dx} = Q$ , а  $\int_{z_1}^{h/2} z \cdot dF = S_y^0$  – статический

момент площади отсечённой части сечения относительно нейтральной оси.

В итоге для вычисления касательных напряжений при прямом изгибе получается следующая формула (формула Журавского):

$$\tau = \frac{Q \cdot S_y^0}{J \cdot b}. \quad (6.18)$$

Из (6.18) следует, что закон распределения  $\tau$  по высоте сечения определяется законом изменения  $S_y^0$  от координаты  $z$ .

Для прямоугольного сечения  $dF = b \cdot dz$  и

$$S_y^0 = \int_{z_1}^{h/2} b \cdot z \cdot dz = \left. \frac{b \cdot z^2}{2} \right|_{z_1}^{h/2} = \frac{b}{8} (h^2 - 4 \cdot z_1^2).$$

Момент инерции площади прямоугольного сечения относительно нейтральной оси  $y$  равен:

$$J = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

После подстановки в (6.18) выражений  $S_y^0$  и  $J$  для прямоугольной балки получаем:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{b \cdot h} \left( 1 - \frac{4 \cdot z^2}{h^2} \right). \quad (6.19)$$

Отсюда следует, что  $\tau$  изменяются по высоте сечения по параболическому закону (рисунок 6.10). Максимум  $\tau$  достигают в точках нейтральной оси ( $z=0$ ), а у краёв сечения ( $z=\pm h/2$ ) они обращаются в нуль.

При выводе формулы для  $\tau$  мы использовали закон для  $\sigma$ , полученный при чистом изгибе. Правомерность такого подхода объясняется весьма слабым влиянием  $\tau$  на картину чистого изгиба.

Действие касательных напряжений порождает сдвиг, который заставляет сечения балки искривляться. Однако пока поперечная сила остается постоянной по длине, искривление всех сечений получается одинаковым и не влияет на деформации растяжения (или сжатия) продольных волокон.

В случае, когда на балку действует распределённая нагрузка, и величина поперечной силы непрерывно меняется по длине балки, искривление поперечных сечений также не оказывает существенного влияния на деформации продольных волокон от действия изгибающего момента.

Рассмотрим условие прочности материала по касательным напряжениям.

Следует иметь в виду, что чаще всего балка прямоугольного сечения, в которой нормальные напряжения ниже допускаемых, оказывается недогруженной по касательным напряжениям.

Однако в частном случае, когда при большой поперечной силе изгибающий момент невелик, величина касательных напряжений может определять необходимые размеры балки.

Условие прочности балки по касательным напряжениям в общем случае имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}^0}{J \cdot b(z)} \leq [\tau]. \quad (6.20)$$

где  $Q_{\max}$  – поперечная сила в опасном сечении;

$S_{\max}^0$  – максимальное значение статического момента, определяющее  $\tau_{\max}$  по высоте сечения;

$b(z)$  – ширина сечения в том слое, для которого вычисляются напряжения.

В частном случае, для балки прямоугольного сечения условие прочности балки по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\max}}{b \cdot h} \leq [\tau]. \quad (6.21)$$

## 6.4 Определение перемещений при изгибе

При изгибе ось балки искривляется, а поперечные сечения перемещаются поступательно и поворачиваются вокруг нейтральных осей, оставаясь при этом нормальными к изогнутой продольной оси (рисунок 6.11). Деформированная (изогнутая) продольная ось балки называется *упругой линией*, а поступательные перемещения сечений, равные перемещениям  $y = y(x)$  их центров тяжести сечений – *прогибами балки*.

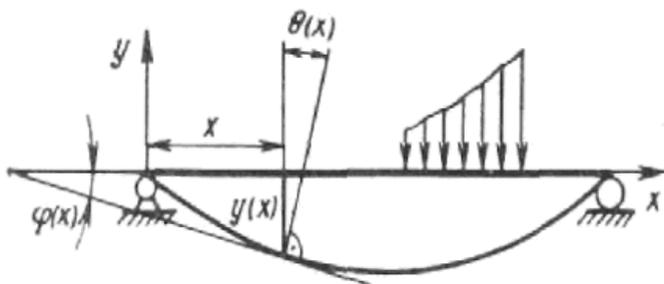


Рисунок 6.11 – Деформации балки при изгибе

Между прогибами  $y(x)$  и **углами поворота** сечений  $\Theta(x)$  существует определенная зависимость. Из рисунка 6.11 видно, что угол поворота сечения  $\Theta$  равен углу  $\varphi$  наклона касательной к упругой линии ( $\Theta$  и  $\varphi$  углы с взаимноперпендикулярными сторонами). Но согласно геометрическому смыслу первой производной  $y' = \text{tg } \Theta$ . Следовательно,  $\text{tg } \Theta = \text{tg } \varphi = y'$ .

При малых деформациях связь между прогибами и углами поворота упрощается и принимает вид  $\Theta = y'$ , форму упругой линии можно описать приближенным дифференциальным уравнением упругой линии балки:

$$y'' = \pm \frac{M_z}{EI_z}. \quad (6.22)$$

Выбор знака в правой части (9.4) определяется направлением координатной оси  $y$ .

Интегрируя уравнение (6.22), находим сначала углы поворота сечений:

$$y' = \Theta = \int \frac{M_z(x)}{EI_z(x)} dx + C_1, \quad (6.23)$$

а после второго интегрирования – прогибы балки:

$$y = \int dx \int \frac{M_z(x)}{EI_z(x)} dx + C_1 x + C_2. \quad (6.24)$$

Данный метод называют методом непосредственного интегрирования. Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий. На участках с различными аналитическими выражениями для изгибающих моментов дифференциальные уравнения упругой линии также различны. Интегрирование этих уравнений при  $n$  участках дает  $2n$  произвольных постоянных. Для их определения к граничным условиям на опорах добавляются условия равенства прогибов и углов поворота на стыке двух смежных участков балки.

Кроме способов определения перемещений сечений балок, основанных на интегрировании дифференциального уравнения упругой линии, существуют более удобные для практических целей энергетические методы. Одним из них является способ определения прогибов и углов поворотов сечений при упругих деформациях балок с помощью интеграла Мора. Этот интеграл может быть получен различными путями, и, в частности, исходя из условия равенства работы внешних сил  $A$  и потенциальной энергии  $U$ , накопленной в деформированной балке.

Интеграл Мора для определения прогибов и углов поворота сечений балок имеет вид:

$$\delta_{CP} = \sum_1^n \int_l \frac{M_z(x) \cdot M_z^1(x)}{EI_z} dx, \quad (6.25)$$

где  $M_z(x)$  – изгибающий момент в текущем сечении балки от заданной нагрузки;  
 $M_z^1(x)$  – изгибающий момент в том же сечении от единичной силы, если ищется прогиб, и единичного момента, если ищется угол поворота сечения.

В 1924 г. А. Н. Верещагин предложил простой графоаналитический прием вычисления интеграла Мора в случаях, когда эпюра  $M_z^1(x)$  или  $M_z(x)$  ограничена прямыми линиями. По существу это прием графоаналитического вычисления

определенного интеграла от произведения двух функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , из которых одна, например  $\varphi(x)$ , линейная, т. е. имеет вид:

$$\varphi(x) = kx + b.$$

Рассмотрим участок балки, в пределах которого эпюра изгибающих моментов от единичной нагрузки ограничена одной прямой линией  $M_z^1 = kx + b$ , а изгибающий момент от заданной нагрузки изменяется по некоторому произвольному закону  $M_z$  (рисунок 6.12).

Тогда в пределах этого участка:

$$\int_l M_z(x) \cdot M_z^1(x) dx = \int_l M_z(x) \cdot (kx + b) dx = k \int_l x \cdot M_z(x) dx + b \int_l M_z(x) dx.$$

Второй интеграл представляет собой площадь  $\omega$  эпюры  $M_z$  на рассматриваемом участке, а первый – статический момент этой площади относительно оси  $y$  и поэтому равен произведению площади  $\omega$  на координату ее центра тяжести  $x_c$ . Таким образом,

$$\int_l M_z(x) \cdot M_z^1(x) dx = \omega \cdot (kx_c + b).$$

Здесь  $kx_c + b$  – ордината  $y_c$  эпюры  $M_z^1$  под центром тяжести площади  $\omega$ . Следовательно,

$$\int_l M_z(x) \cdot M_z^1(x) dx = \omega \cdot y_c. \quad (6.26)$$

Произведение  $\omega y_c$  будет положительным, когда  $\omega$  и  $y_c$  расположены по одну сторону от оси эпюры, и отрицательным, если они находятся по разные стороны от этой оси.

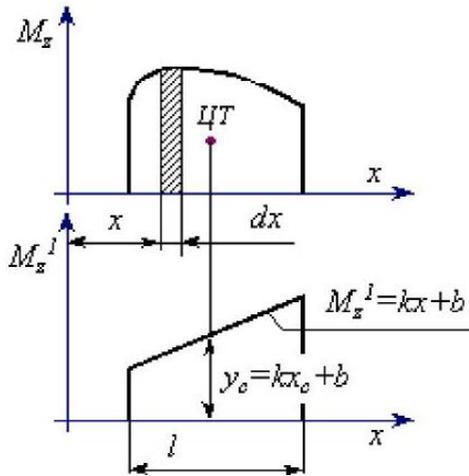


Рисунок 6.12 – Перемножение эпюр способом Верещагина

Итак, по способу Верещагина операция интегрирования заменяется перемножением площади  $\omega$  одной эпюры на ординату  $y_c$  второй (обязательно линейной) эпюры, взятой под центром тяжести площади  $\omega$ .

Важно всегда помнить, что такое «перемножение» эпюр возможно лишь на участке, ограниченном одной прямой той эпюры, с которой берется ордината  $y_c$ . Поэтому при вычислении перемещений сечений балок способом Верещагина интеграл Мора по всей длине балки надо заменить суммой интегралов по участкам, в пределах которых эпюра моментов от единичной нагрузки не имеет изломов. Тогда:

$$\delta_{CP} = \sum_1^n \int_l \frac{M_z(x) \cdot M_z^1(x)}{EI_z} dx = \sum_1^n \frac{\omega \cdot y_c}{EI_z}. \quad (6.27)$$

Более сложные эпюры изгибающих моментов допустимо разбивать на простейшие фигуры, площади  $\omega_i$  и координаты  $y_{ci}$  которых известны, а затем находить произведение  $\omega y_c$  для

такой сложной эпюры суммированием произведений площадей  $\omega_i$  ее частей на соответствующие им координаты  $y_{ci}$ .

Если обе эпюры  $M_z$  и  $M_z^1$  линейные, конечный результат их перемножения не зависит от того, умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй или, наоборот, площадь второй на ординату первой.

Для практического вычисления перемещений по способу Верещагина надо:

1) построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки (основная эпюра);

2) снять с балки заданную нагрузку (но сохранить опоры) и приложить в сечении, перемещение которого ищется, в направлении этого перемещения единичную силу, когда ищется прогиб, или единичную пару, если искомым является угол поворота;

3) построить эпюру изгибающих моментов от единичной нагрузки (единичная эпюра);

4) разбить эпюры от заданных нагрузок на отдельные площади  $\omega_i$  и вычислить ординаты  $y_{ci}$  единичной эпюры под центрами тяжести этих площадей;

5) составить произведение  $\omega_i y_{ci}$  и просуммировать их.

## **6.5 Расчет статически неопределимых балок и плоских рам методом сил**

Расчет статически неопределимых систем рассмотрим на примере.

При расчете статически неопределимых рам методом сил коэффициенты  $(\delta_{11}; \delta_{12}; \dots)$  и свободные члены  $(\Delta_{1P}; \Delta_{2P}; \dots)$  канонических уравнений для прямолинейных элементов с постоянной жесткостью вычисляются по способу Верещагина по формуле:

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{\omega \cdot \eta}{E \cdot I}, \quad (6.28)$$

где  $\omega$  – площадь нелинейной эпюры изгибающих моментов;  
 $\eta$  – ордината линейной эпюры изгибающих моментов  
 под центром площади  $\omega$ .

Вычисление по формуле 6.28 производят на участках, на каждом из которых одна из эпюр должна быть прямолинейна (рисунок 6.13). В тех случаях, когда обе эпюры прямолинейны, можно умножить площадь одной из них на ординату другой, расположенную под центром тяжести первой.

Для заданной статически неопределимой рамы с элементами постоянной жесткости  $E \cdot I$  построить эпюры  $Q$ ,  $M$  и  $N$  и подобрать номер двутавра при  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

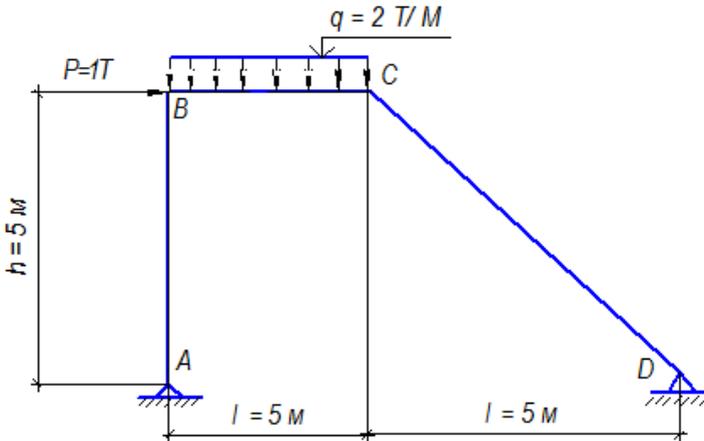


Рисунок 6.13 – Схема рассматриваемой статически неопределимой рамы

1. Устанавливаем степень статической неопределимости:

$$S = 3 \cdot n - m, \quad (6.29)$$

где  $n$  – число замкнутых контуров в раме;  
 $m$  – число одиночных шарниров.

При  $n = 1$ ,  $m = 2$ ,  $S = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ . Рама один раз статически неопределима, то есть содержит одну дополнительную связь.

2. Выбираем основную систему путем устранения горизонтальной связи в опоре  $D$ . Вертикальную связь отбросить нельзя, так как в этом случае оставшиеся три опорных стержня пересекаются в одной точке  $A$ , и система будет мгновенно изменяемой. Взамен отброшенной связи к основной системе прикладывают силу  $X_1$ , заменяющую действие удаленной связи.

3. Составляем каноническое уравнение, которое выражает условие равенства нулю суммарного горизонтального перемещения точки  $D$  от заданной нагрузки и от неизвестной силы  $X_1$ :

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{iP} = 0. \quad (6.30)$$

Для вычисления перемещений, входящих в уравнение в виде коэффициента  $\delta_{11}$ , при неизвестном и свободном (грузового) члена необходимо построить для основной системы эпюры изгибающего момента от силы  $\bar{X}_1 = 1$  и от заданной нагрузки. Обозначим их  $M_P$  и  $\bar{M}_1$ .

4. При построении эпюры  $\bar{M}_1$  ординаты откладываем со стороны сжатого волокна. При вычислении моментов в сечениях пользуемся обычным правилом знаков, считая положительным момент левых сил, направленный против хода часовой стрелки. Выражения  $Q$ ,  $M$  и  $N$  для произвольных сечений не записываем. Ограничиваемся вычислением внутренних усилий в узлах и местах экстремума, а затем проводим линии эпюр, используя дифференциальные зависимости.

Для построения эпюры  $M_p$  загрузим основную систему заданной нагрузкой (рисунок 6.14).

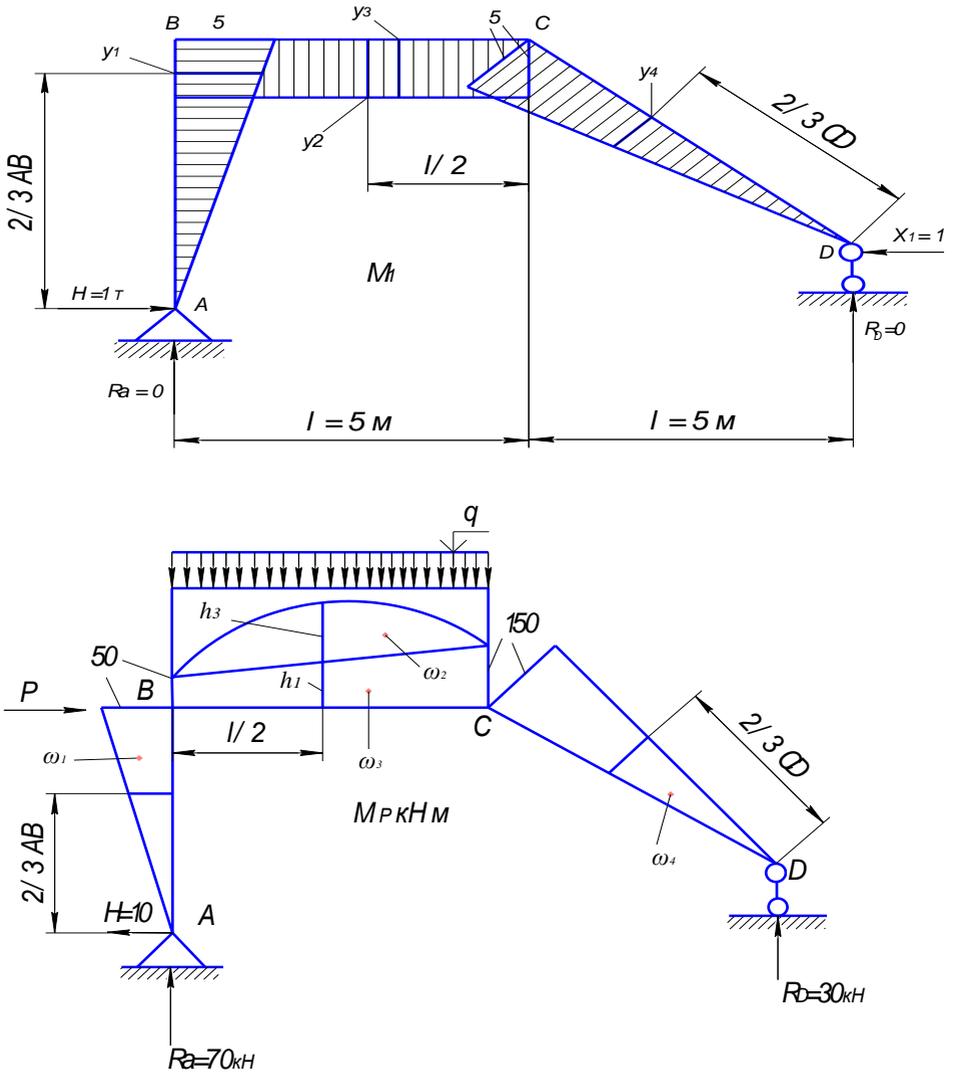


Рисунок 6.14 – Эпюры моментов от единичной силы  $\overline{M}_1$  и от заданных сил  $M_p$

5. Вычисляем перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{iP}$  по способу Верещагина. Для определения перемещения  $\delta_{11}$  умножим площади  $\omega$  на ординаты  $y$ , взятые из одной и той же эпюры  $\bar{M}_1$ :

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 7,08 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right) = \\ &= \frac{1}{EI} (41,7 + 125 + 59,2) = \frac{225,9}{EI}.\end{aligned}\quad (6.31)$$

$$\begin{aligned}\Delta_{iP} &= -\frac{1}{EI} \left( \frac{5 \cdot 50}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 62,5 \cdot 5 \cdot 5 + 100 \cdot 5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 7,08 \cdot \frac{2}{3} \cdot 50 \right) = \\ &= -\frac{1}{EI} (417 + 1040 + 2500 + 177) = -\frac{5727}{EI}.\end{aligned}\quad (6.32)$$

6. Определим неизвестную силу.

Подставляя найденные значения из (6.31) и (6.32) в уравнение (6.30), получим:

$$X_1 = \frac{-\Delta_{iP}}{\delta_{11}} = \frac{-572,7}{225,9} = 25,4 \text{ кН}.$$

После определения неизвестных усилий, определение реакций и построение эпюр внутренних силовых факторов производится как в обычной статически определимой системе.

7. Строим окончательные эпюры  $Q$ ,  $M$  и  $N$ .

Окончательную эпюру моментов получим путем непосредственного построения. Для этого к основной системе прикладываем найденное неизвестное усилие  $X_1$  и заданную нагрузку (рисунок 6.15).

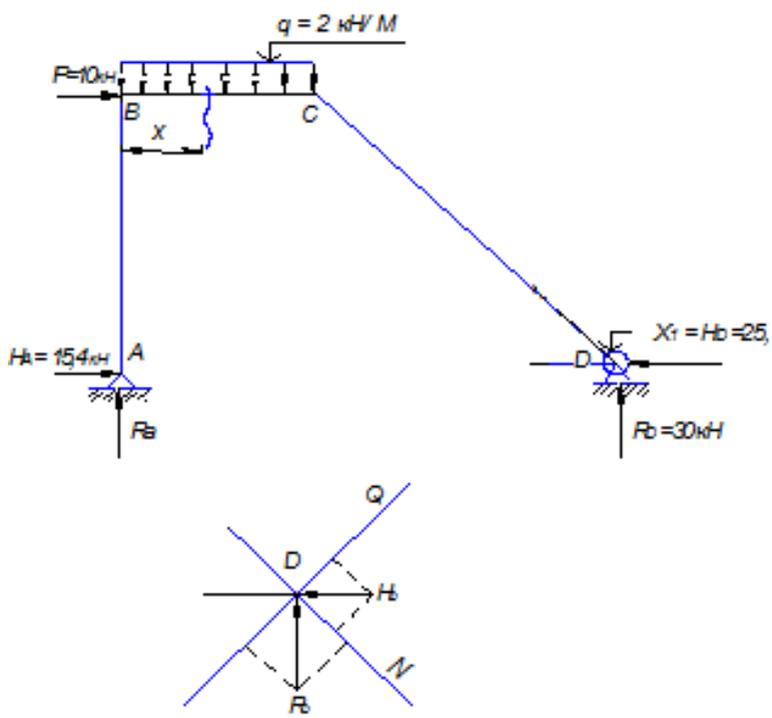


Рисунок 6.15 – Основная система

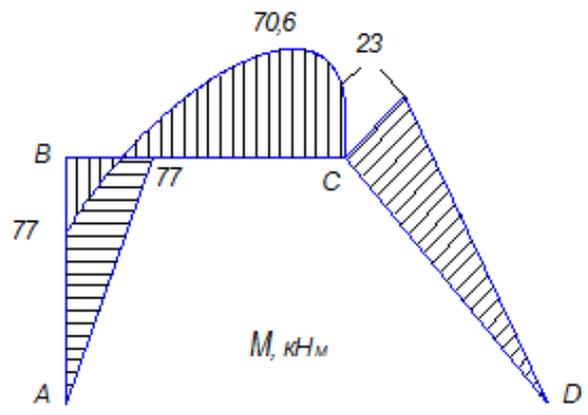


Рисунок 6.16 – Эпюра  $M$ , кНм

Строим эюру  $Q$ .

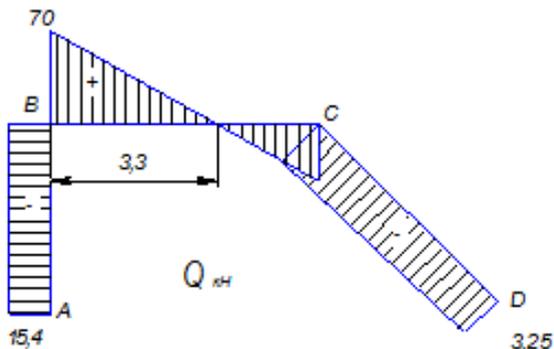


Рисунок 6.17 – Эюра  $Q$ , кН

Строим эюру  $N$

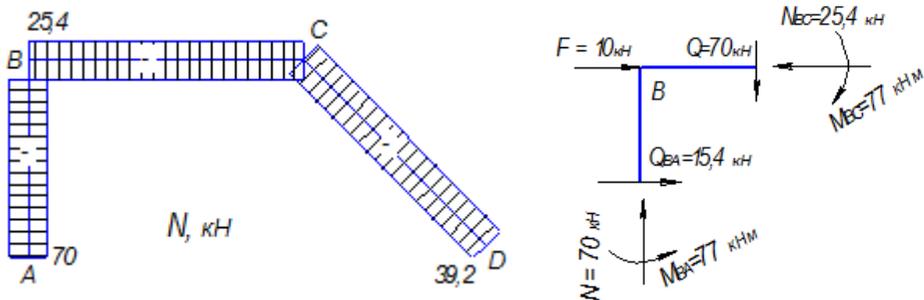


Рисунок 6.18 – Эюра  $N$ , кН

8. Проверяем правильность построения эюр  $Q$ ,  $M$  и  $N$ , проверяем условие равновесия деформации.

Статистическая проверка состоит в том, что любой узел, вырезанный из нагруженной рамы, должен находиться в равновесии под действием сил и моментов, заменяющих действие отброшенных элементов. Если к рассмотренному узлу

приложены внешние силы и моменты, то они также входят в уравнение равновесия.

Проверка выполнения условий деформации, состоящая в произведении окончательной эпюры изгибающих моментов на эпюру от единичного усилия.

Перемножим эпюры  $M$  и  $\bar{M}_1$ , получим перемещение по направлению отброшенной связи.

9. Подберем сечение элементов рамы.

Расчет на прочность производим только по нормальным напряжениям. По эпюрам  $M$  и  $N$  устанавливаем опасное сечение.

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} + \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

При подборе сечения вначале, пренебрегая действием продольной силы и учитывая только действие изгибающего момента, по пониженному допускаемому напряжению определим момент сопротивления. Затем определим расчетное напряжение учитывая и продольную силу:

### **Контрольные вопросы**

1. Внутренние силовые факторы при изгибе.
2. Дифференциальные зависимости при изгибе.
3. Величина нормальных напряжений при изгибе. Касательные напряжения при изгибе.
4. Расчет на прочность по допускаемым напряжениям при изгибе.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии изложены теоретические основы расчета силовых факторов, возникающих в сечении стержня при различных видах его нагружения.

Рассмотрены основы расчета по определению продольной силы в поперечных сечениях стержня при центральном растяжении-сжатии; усилий, возникающих в стержнях статически неопределимых систем; внутренних силовых факторов при срезе, сдвиге и кручении; поперечной силы и изгибающего момента при прямом поперечном изгибе; перемещение точек систем при прямом поперечном изгибе.

Изложенный материал позволяет понять, что в процессе эксплуатации сооружений и машин их элементы, в той или иной мере участвующие в работе конструкции и подвергающиеся действию различных нагрузок, должны обеспечивать нормальную работу конструкции, удовлетворять необходимым условиям прочности, жесткости и устойчивости. При этом подбираются элементы конструкции, имеющие наиболее рациональные размеры и форму.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абгарян, К. А. Динамика ракет [Текст] / К. А. Абгарян, И. М. Рапопорт. – М. : Машиностроение, 1969. – 378 с.
2. Абрамович, С. Ф. Динамическая прочность судового оборудования [Текст] / С. Ф. Абрамович, Ю. С. Крючков. – Л. : Судостроение, 1967. – 512 с.
3. Авдонин, А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций [Текст] / А. С. Авдонин. – М. : Машиностроение, 1969. – 402 с.
4. Александров, А. В. Соппротивление материалов [Текст] / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М. : Высшая школа, 1995. – 560 с.
5. Ананьев, И. В. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование [Текст] / И. В. Ананьев, П. Г. Тимофеев. – М. : Машиностроение, 1965. – 526 с.
6. Ананьев, И. В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем [Текст] / И. В. Ананьев. – Гостехиздат, 1946. – 223 с.
7. Арсенин, В. Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции [Текст] / В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1966. – 368 с.
8. Бабаков, И. М. Теория колебаний [Текст] / И. М. Бабаков. – 3-е изд. – М. : Наука, 1968. – 560 с.
9. Балабух, Л. И. Строительная механика ракет [Текст] / Л. И. Балабух, Н. А. Алфутов, В. И. Усюкин. – М. : Высшая школа, 1984. – 391 с.
10. Бельский, З. А. Конструкция летательных аппаратов [Текст] / З. А. Бельский, И. П. Власов, В. Н. Зайцев; под ред. С. Н. Кана. – М. : Оборонгиз, 1963. – 709 с.
11. Беляев, Н. М. Соппротивление материалов [Текст] / Н. М. Беляев. – М. : Наука, 1976. – 608 с.

12. Биргер, И. А. Прочность. Устойчивость. Колебания. В 3 т. Т. 3 [Текст] / И. А. Биргер, Я. Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1968. – 567 с.

13. Бредихин, Б. А. Сопротивление материалов [Текст] / Б. А. Бредихин. – 2-е изд., испр. и доп. – Краснодар : КубГАУ, 2006. – 206 с.

14. Булгаков, Б. В. Колебания [Текст] / Б. В. Булгаков. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. – 890 с.

15. Бычков, Д. В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций [Текст] / Д. В. Бычков. – М. : Госстройиздат, 1962. – 475 с.

16. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В. З. Власов, П. Н. Леонтьев. – М. : Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. – 490 с.

17. Гевондян, Т. А. Приборы для измерения и регистрации колебаний [Текст] / Т. А. Гевондян, Л. Т. Киселев. – М. : Машгиз, 1962. – 467 с.

18. Дарков, А. В. Сопротивление материалов [Текст] / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 4-е изд., перераб. – М. : Высшая школа, 1975. – 654 с.

19. Кочетов, В. Т. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособие / В. Т. Кочетов, А. Д. Павленко, М. В. Кочетов. – 3-е изд., перераб. и доп. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 544 с.

20. Маделунг, Э. Математический аппарат физики [Текст] / Э. Маделунг. – М. : Физматгиз, 1961. – 620 с.

21. Пановко, Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем [Текст] / Я. Г. Пановко. – М. : Физматгиз, 1960. – 193 с.

22. Пархиловский, И. Г. Автомобильные рессоры [Текст] / И. Г. Пархиловский. – М. : Машиностроение, 1978. – 232 с.

23. Писаренко, Г. С. Колебание упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале [Текст] : монография / Г. С. Писаренко. – Киев : Наукова думка, 1970. – 380 с.

24. Серенсен, С. В. Динамика машин для испытаний на усталость [Текст] / С. В. Серенсен. – М. : Машиностроение, 1967. – 460 с.
25. Снитко, Н. К. Строительная механика [Текст] / Н. К. Снитко. – 3-е изд., перераб. – М. : Высшая школа, 1980. – 431 с.
26. Сопротивление материалов [Текст] / Г. С. Писаренко, В. А. Агаев, А. Л. Квитка [и др.]. – 5-е изд, перераб. и доп. – Киев : Вища школа, 1986. – 775 с.
27. Сорокин, Е. С. К вопросу неупругого сопротивления строительных материалов при колебаниях [Текст] / Е. С. Сорокин // Научное сообщение ЦНИПС. – М. : Госстройиздат, 1954. – Вып. 15. – С. 76.
28. Теории подобия и размерностей. Моделирование [Текст] / П. М. Алабужев, В. Б. Геронимус, Л. М. Минкевич, Б. А. Шеховцов. – М. : Высшая школа, 1968. – 208 с.
29. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 514 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ.....	4
1.1 Основные принципы и гипотезы науки о сопротивлении материалов.....	4
1.2 Внешние и внутренние силы.....	5
1.3 Понятие о напряжениях и деформациях.....	7
2 ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ.....	10
2.1 Усилия в поперечном сечении стержня.....	10
2.2 Напряжения и деформации при растяжении (сжатии).....	10
2.3 Потенциальная энергия упругой деформации.....	12
2.4 Механические характеристики материалов.....	13
2.5 Методика расчета статически неопределимых систем .....	16
3 ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ.....	19
3.1 Напряженное состояние в точке тела.....	19
3.2 Виды напряженного состояния.....	24
3.3 Деформации при сложном напряженном состоянии. Связь между напряжениями и деформациями.....	29
3.4 Теории прочности.....	31
4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ.....	37
4.1 Основные понятия и определения.....	37
4.2 Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей.....	40
4.3 Моменты инерции простейших фигур.....	41
4.4 Вычисление моментов инерции сложных фигур.....	45

4.5	Изменение моментов инерции при повороте осей координат.....	46
4.6	Главные оси и главные моменты инерции.....	48
4.7	Моменты сопротивления площади сечения.....	49
5	КРУЧЕНИЕ.....	51
5.1	Общие понятия.....	51
5.2	Напряжения при кручении брусьев сплошного и кольцевого сечении. Закон Гука при кручении.....	51
5.3	Расчет брусьев на прочность и жесткость при кручении.....	54
5.4	Расчет цилиндрических винтовых пружин.....	56
6	ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ.....	59
6.1	Понятие о деформации изгиба. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.....	59
6.2	Нормальные напряжения при изгибе.....	64
6.3	Касательные напряжения при изгибе.....	71
6.4	Определение перемещений при изгибе.....	75
6.5	Расчет статически неопределимых балок и плоских рам методом сил.....	80
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	88
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	89

У ч е б н о е   и з д а н и е

**Дробот** Виктор Александрович  
**Брусенцов** Анатолий Сергеевич

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ.  
ПРОСТЫЕ ВИДЫ НАГРУЖЕНИЯ**

*Учебное пособие*

В авторской редакции  
Макет обложки – А. А. Багинская

Подписано в печать 00.00.2020. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Усл. печ. л. – 5,5. Уч.-изд. л. – 4,3.

Тираж 500 экз. Заказ № . – 50 экз.

Типография Кубанского государственного  
аграрного университета.  
350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13