

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
аграрный университет имени И. Т. Трубилина»

В. А. Дробот, А. С. Брусенцов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ.
СЛОЖНЫЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ

Учебное пособие

Краснодар
КубГАУ
2022

УДК 621.7.014.2(075.8)

ББК 30.121

Д75

Р е ц е н з е н т ы:

Б. Ф. Тарасенко – профессор кафедры ремонта машин и материаловедения Кубанского государственного аграрного университета, д-р техн. наук, доцент;

В. В. Терехов – зав. кафедрой механики Краснодарского высшего военного авиационного училища летчиков, канд. техн. наук, доцент

Дробот В. А.

Д75 Сопротивление материалов. Сложные виды деформаций : учеб. пособие / В. А. Дробот, А. С. Брусенцов. – Краснодар : КубГАУ, 2022. – 103 с.

ISBN 978-5-907550-71-1

В учебном пособии рассмотрены основные положения и определения дисциплины. Приведена методика определения внутренних усилий и построения эпюр различных силовых факторов, выбора опасных сечений, а также подбора сечений из условия прочности при сложных видах деформации.

Предназначено для обучающихся по специальности 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, специализация «Технические средства агропромышленного комплекса».

УДК 621.7.014.2(075.8)

ББК 30.121

© Дробот В. А.,
Брусенцов А. С., 2022
© ФГБОУ ВО «Кубанский
государственный аграрный
университет имени
И. Т. Трубилина», 2022

ISBN 978-5-907550-71-1

ВВЕДЕНИЕ

Стремительное развитие новых технологий и техники требует повышения качества подготовки специалистов, обладающих не только знаниями конструкции технических средств, но и навыками их проектирования.

Выполнение этих требований возможно путем организации разносторонней самостоятельной работы с использованием учебных пособий, в первую очередь для усвоения необходимых теоретических навыков расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Элементы технических средств подвержены воздействию сложных видов деформаций, поэтому в данном учебном пособии рассмотрены вопросы, связанные с возникновением в поперечном сечении нескольких внутренних силовых факторов; изложены основы расчета на прочность по динамическим и циклически изменяющимся во времени нагрузкам; приводится методика определения внутренних усилий в тонкостенных оболочках и способы повышения прочности подобных конструкций.

Материалы курса структурированы таким образом, что его последовательное освоение способствует получению теоретических навыков по базовым понятиям дисциплины «Сопротивление материалов».

Предлагаемый практический блок – контрольные вопросы, указания по выполнению расчетно-проектировочных работ, схемы, формулы, тематический библиографический список, направлен на закрепление приобретенных знаний.

1 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

1.1 Общие положения

Сложным сопротивлением называются виды нагружения, при которых в поперечных сечениях одновременно действуют несколько внутренних силовых факторов (рисунок 1).

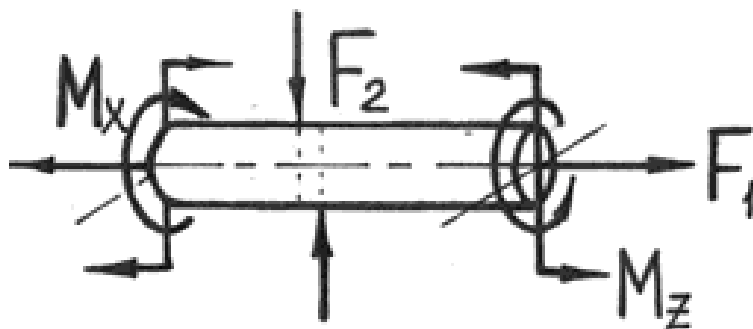
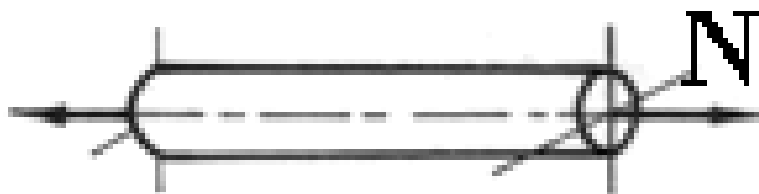


Рисунок 1.1 – Пример нагружения стержня при сложном сопротивлении

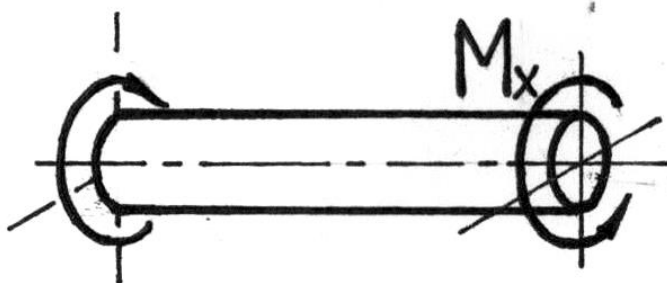
Сложный вид деформации можно рассматривать как сумму простых видов, изученных ранее (растяжение, изгиб, кручение), при которых в сечениях элементов конструкций возникал только один внутренний силовой фактор: нормальная сила N – при растяжении (рисунок 1.2, *а*), крутящий момент M_x – при кручении (рисунок 1.2, *б*), изгибающий момент M_z – при чистом изгибе (рисунок 1.2, *в*). Эти виды нагружения (растяжение, изгиб, кручение) являются простыми.

Основные соотношения, полученные для них, приведены в таблице 1.1

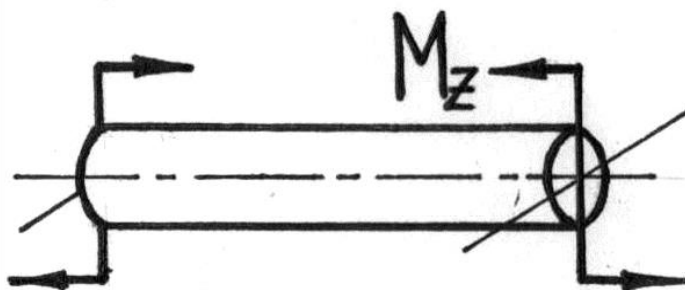
Но при сложном сопротивлении должен быть применен принцип независимости действия сил (частный случай принципа суперпозиции или наложения, используемый в механике деформируемого твердого тела).



a



б



в

Рисунок 1.2 – Примеры простых видов деформации:
a – при растяжении; *б* – при кручении; *в* – при чистом изгибе

Таблица 1.1 – Основные соотношения, полученные для различных видов нагружения

Растяжение	$\sigma = \frac{N}{F}$ Условие прочности: $\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} \leq [\sigma]$	$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}$
Кручение	$\tau = \frac{M_k}{J_\rho} \rho$ Условие прочности: $\tau_{max} = \frac{M_{k\ max}}{W_\rho} \leq [\tau]$	$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_\rho}$
Изгиб	$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$ Условие прочности: $\sigma_{max} = \frac{M_{x\ max}}{W_x} \leq [\sigma]$	$E \cdot I_x \cdot y'' = M_x$

Принцип независимости действия сил заключается в следующем: напряжение (деформация) от группы сил равно сумме напряжений (деформаций) от каждой силы в отдельности. Он справедлив, если функция и аргумент связаны линейной зависимостью. В задачах механики материалов и конструкций становится неприменимым, если:

– напряжения в какой-либо части конструкции от одной из сил или группы сил превышают предел пропорциональности σ_{nc} ;

– деформации или перемещения становятся настолько большими, что нарушается линейная зависимость между ними и нагрузкой.

Например, дифференциальное уравнение изгиба стержня является нелинейным, и вытекающая из него зависимость прогиба f от нагрузки P для консольной балки, изображенной на рисунке 1.3, *a*, также является нелинейной (рисунок 1.3, *б*). Однако, если прогибы балки невелики ($f \ll l$) настолько,

что $(dv/dz)^2 \ll 1$ (так как $dv/dz \approx f/l$), то дифференциальное уравнение изгиба становится линейным (как видно из рисунка 1.3, б, начальный участок зависимости P от f , описываемый этим уравнением, также является линейным).

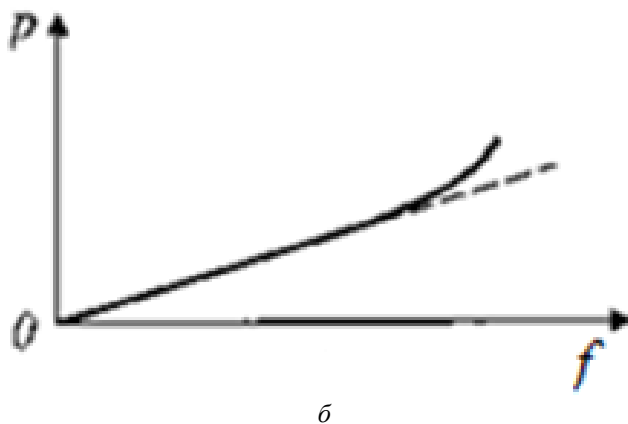
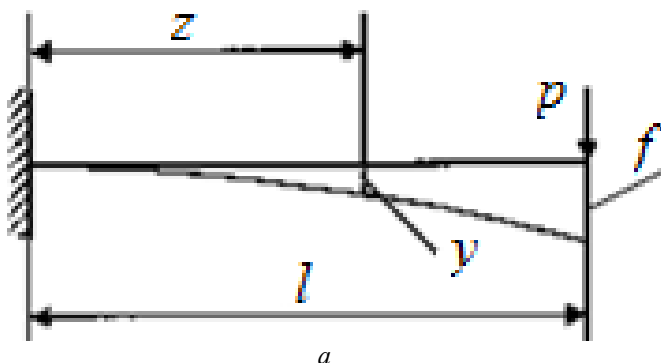


Рисунок 1.3 – Модели изгиба балки:

a – расчетная схема; b – линейное и нелинейное сопротивление

Задачи на сложное сопротивление решаются следующим образом. Определяются напряжения и деформации при действии простейших видов деформации, составляющих сложное

сопротивление, а затем полученные результаты суммируют, используя при необходимости теории прочности.

На практике одновременное действие всех силовых факторов встречается крайне редко. Чаще приходится иметь дело с более простыми комбинациями нагружений – косой или пространственный изгиб, внецентренное растяжение или сжатие и изгиб с кручением.

1.2 Расчет балки, подверженной косому или пространственному изгибу

Косым называют изгиб, при котором плоскость действия изгибающего момента, возникающего в сечении, не совпадает ни с одной из главных плоскостей бруса (при этом плоскость действия изгибающего момента обязательно должна проходить через центр тяжести сечения) (рисунок 1.4).

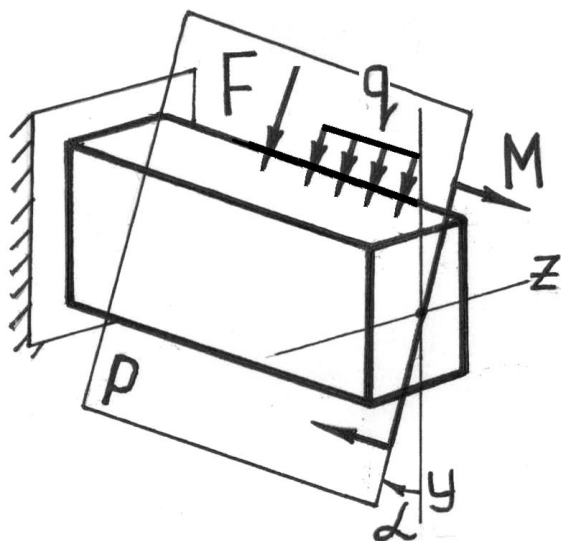


Рисунок 1.4 – Брус, подверженный действию косого изгиба

При косом изгибе изогнутая ось представляет собой плоскую кривую, и плоскость, в которой она расположена, не совпадает с плоскостью действия нагрузки.

В случае пространственного изгиба нагрузка приложена в разных плоскостях, деформированная ось является пространственной кривой.

1.3 Определение внутренних усилий при косом изгибе

При косом изгибе в поперечных сечениях бруса действуют следующие внутренние усилия: M_z , M_y – изгибающие моменты и Q_y , Q_z – поперечные (перерезывающие) силы. Это легко показать мысленно, рассекая стержень и определяя внутренние усилия при косом изгибе консольной балки под действием сосредоточенной силы F на свободном конце (рисунок 1.5):

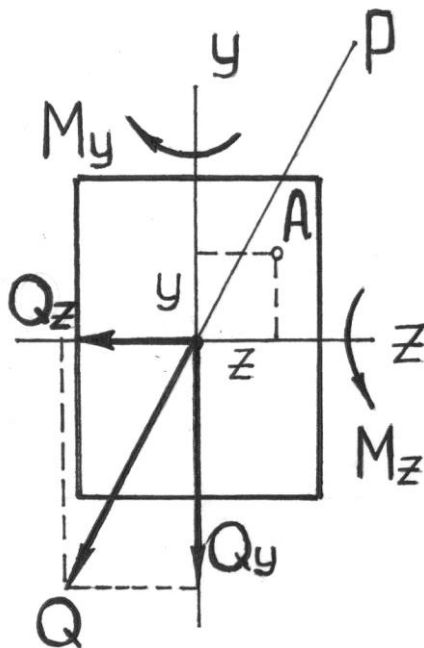


Рисунок 1.5 – Внутренние усилия при косом изгибе стержня

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N = 0; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow Q_y = F \cdot \cos \alpha; \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow Q_z = F \cdot \sin \alpha; \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x = 0; \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y = F \cdot \sin \alpha \cdot x; \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z = F \cdot \cos \alpha \cdot x. \end{aligned}$$

Правило знаков для внутренних усилий: изгибающие моменты – положительны, если вызывают растяжение в положительном квадранте координатной системы zOy ; поперечные силы – положительны, если под их действием отсеченный элемент поворачивается по часовой стрелке.

Таким образом, косой изгиб может быть представлен как совместное действие двух плоских изгибов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях инерции.

Для определения полного изгибающего момента M и полной поперечной силы Q при косом изгибе достаточно определить внутренние усилия для каждого из плоских изгибов в отдельности (т. е. Q_y, M_z и Q_z, M_y), а затем найти их векторную сумму:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}, \quad Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}.$$

1.4 Определение напряжений при косом изгибе

Если разложить внешние силы по главным осям инерции x и y , то получим две системы сил P_x и P_y , каждая из которых вызывает прямой изгиб с изгибающими моментами соответственно M_y и M_x (рисунки 1.6, 1.7). Применяя принцип независимости действия сил, нормальные напряжения σ (рисунок 1.7) определим как алгебраическую сумму напряжений от M_x и M_y :

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \pm \frac{M_x}{I_x} \cdot y \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot x.$$

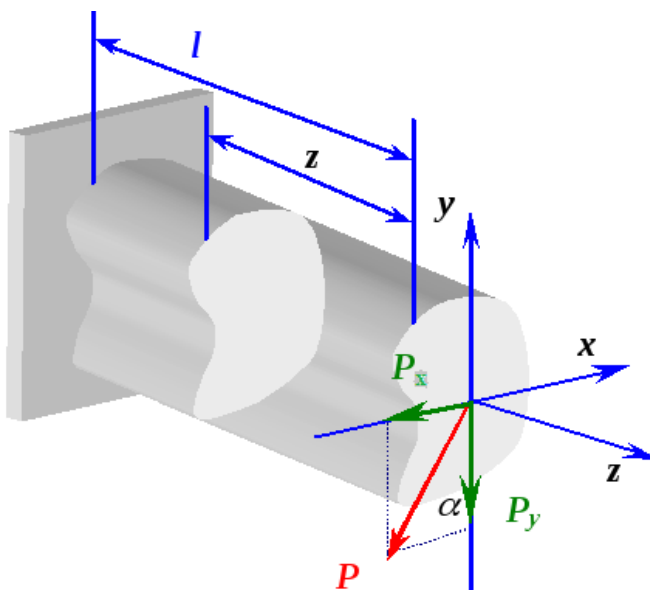


Рисунок 1.6 – Расчетная модель косоуго изгиба бруса

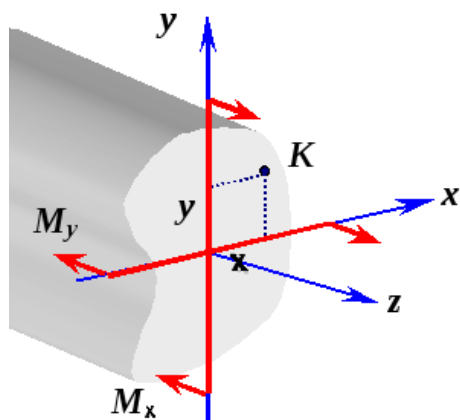


Рисунок 1.7 – Связь нормального напряжения с внутренними изгибающими моментами

Чтобы не связывать себя формальными правилами знаков, слагаемые будем определять по модулю, а знаки – ставить по смыслу.

Таким образом, расчет на косой изгиб с применением принципа независимости действия сил сводится к расчету на два прямых изгиба с последующим алгебраическим суммированием напряжений.

В случае поперечных сечений, имеющих две оси симметрии и выступающие угловые точки (рисунок 1.8) с равными по модулю и максимальными одноименными координатами $|x_A| = x_B = x_C = |x_D| = x_{max}$ и $|y_A| = y_B = y_C = |y_D| = y_{max}$, напряжения в этих точках будут равны:

$$\sigma_{A,B,C,D} = \pm \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{max} \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot x_{max} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}.$$

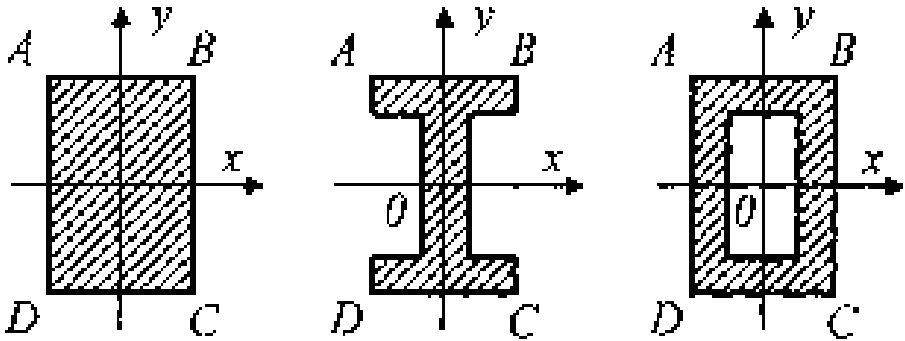


Рисунок 1.8 – Симметричные варианты сечений

Слагаемые в этом выражении рекомендуется определять по модулю, а знаки – ставить по смыслу. Например, на рисунке 1.9 верхний ряд знаков «+» и «-» соответствует напряжениям от M_x , а нижний ряд – от M_y , и напряжения в этих точках будут равны:

$$\sigma_A = -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y},$$

$$\sigma_B = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y},$$

$$\sigma_C = \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y},$$

$$\sigma_D = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}.$$

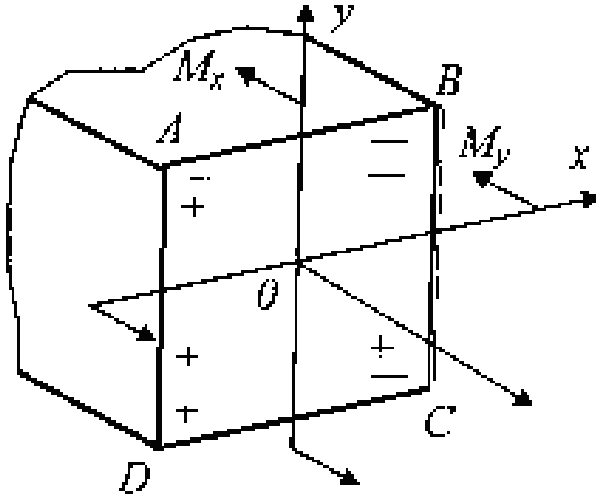


Рисунок 1.9 – Расстановка знаков от действия моментов

Условие прочности для балок из пластичного материала с указанным типом сечений запишется в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

Касательные напряжения от поперечных сил, если нельзя воспользоваться формулой Журавского, допустимо не учитывать.

При проведении расчетов на прочность условие прочности составляется для опасной точки поперечного сечения, в которой нормальные напряжения достигают максимальных значений. Самой нагруженной точкой в сечении произвольной

формы является точка, наиболее удаленная от нейтральной линии, разделяющей растянутую и сжатую зоны сечения.

В связи с этим большое значение приобретают вопросы, связанные с определением положения нейтральной линии.

Положив $\sigma = 0$, получим уравнение нейтральной линии:

$$\pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} = 0.$$

Так как напряжения в точках поперечного сечения будут пропорциональными расстояниям от нейтральной линии, то максимальные напряжения (σ_{max}) будут возникать в наиболее удаленных от нее точках.

Силовая плоскость – это плоскость действия результирующего момента $M_{рез}$ (рисунок 1.10), φ – угол наклона силовой плоскости к вертикали.

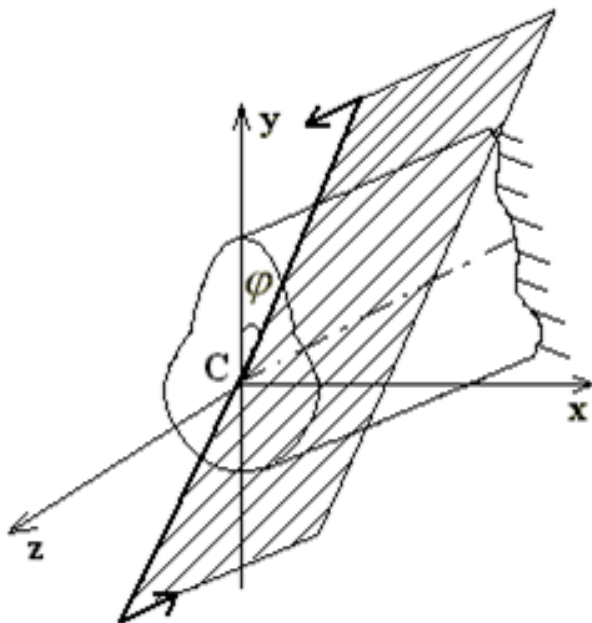


Рисунок 1.10 – Силовая плоскость

$$\begin{aligned}
 M_{\text{рез}} &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2}, \\
 \operatorname{tg} \varphi &= \frac{M_y}{M_x}, \\
 \operatorname{tg} \alpha &= -\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{I_x}{I_y}.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Свойства нейтральной линии:

1) если $J_x \neq J_y$, то $\alpha \neq \varphi$, т. е. силовая плоскость и нейтральная линия не являются перпендикулярными;

2) если $J_x = J_y$, то из (1.1) следует, что $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi$, т. е. нейтральная линия и силовая плоскость перпендикулярны. В этом случае стержень испытывает плоский изгиб (примерами таких стержней являются стержни с сечением – круг, кольцо, квадрат);

3) знак «минус» в формуле (1.1) указывает, что силовая плоскость и нейтральная линия при косом изгибе проходят через противоположные квадранты.

Для определения опасных точек сечения следует построить касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной линии. Точки касания и будут являться опасными (точки A и B на рисунке 1.11).

Для некоторых сечений (прямоугольник, двутавр, швеллер и т. п.) наиболее напряженные точки расположены в углах этих сечений, т. е. их можно найти без определения положения нейтральной линии (рисунок 1.12).

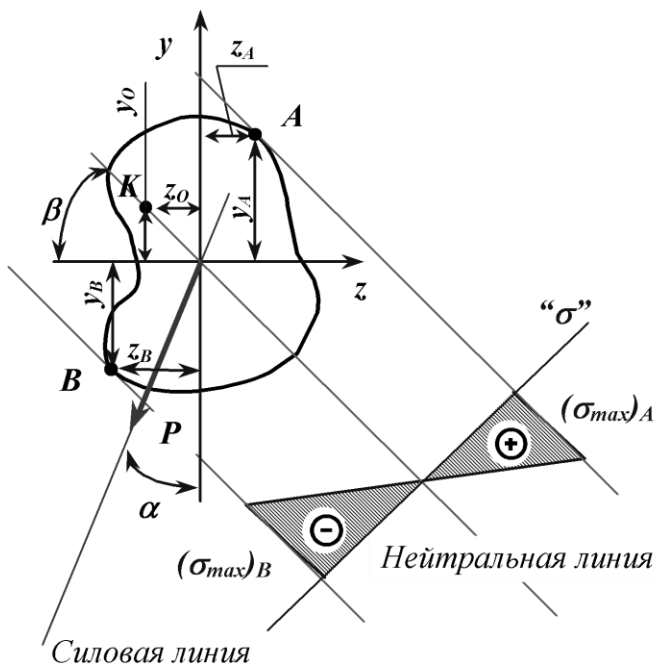


Рисунок 1.11 – Положение нейтральной линии при косом изгибе

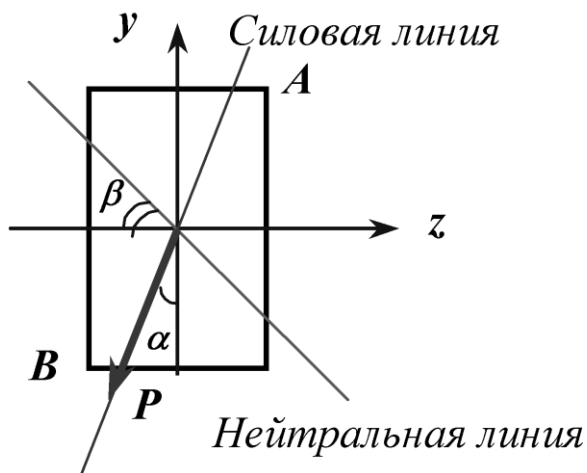


Рисунок 1.12 – Положение нейтральной линии и опасных точек сечения при косом изгибе для прямоугольника

Условия прочности составляют в зависимости от свойств того материала, из которого изготовлен элемент конструкции (брус).

Для хрупкого материала используют два условия прочности – для опасной точки, где имеет место растяжение (в нашем случае точка A на рисунке 1.11), и для точки, где происходит сжатие (точка B):

$$\sigma_{\max}^p = \frac{M_z}{J_z} y_A + \frac{M_y}{J_y} z_A \leq [\sigma_p],$$
$$|\sigma_{\max}^c| = \frac{M_z}{J_z} y_B + \frac{M_y}{J_y} z_B \leq [\sigma_c].$$

Необходимость использования двух условий прочности для хрупкого материала объясняется разными механическими свойствами материала при растяжении и сжатии. Хрупкий материал плохо сопротивляется растяжению и хорошо – сжатию.

Для пластичного материала, одинаково сопротивляющегося и растяжению, и сжатию, используют одно условие прочности для точки поперечного сечения, в которой действует максимальное по абсолютной величине нормальное напряжение:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z \leq [\sigma],$$

где z и y – координаты данной точки.

При расчетах на прочность касательными напряжениями от поперечных сил пренебрегают, так как их влияние незначительно.

1.5 Определение перемещений при косом изгибе

Перемещения при косом изгибе определяют по принципу независимости действия сил, т. е. рассчитывают прогибы Δ_z и Δ_y в направлении главных осей, а величину полного прогиба в любом сечении балки получают геометрическим суммированием: $\Delta = \sqrt{\Delta_z^2 + \Delta_y^2}$.

Например, для балки, изображенной на рисунке 1.13, прогиб конца консоли определится следующим образом:

$$\Delta_y = \frac{P_y \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_z} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{3 \cdot E \cdot I_z} \cdot l^3,$$

$$\Delta_z = \frac{P_z \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{P \cdot \sin \alpha}{3 \cdot E \cdot I_y} \cdot l^3,$$

$$\Delta = \sqrt{\Delta_z^2 + \Delta_y^2}.$$

Направление полного перемещения ($tg \varphi$) определится величиной отношения Δ_z / Δ_y :

$$tg \varphi = \frac{\Delta_z}{\Delta_y} = \frac{P \cdot \sin \alpha \cdot 3 \cdot E \cdot I_z}{3 \cdot E \cdot I_y \cdot P \cdot \cos \alpha} = \frac{I_z}{I_y} \cdot tg \alpha.$$

Направление полного прогиба при косом изгибе перпендикулярно нейтральной линии и не совпадает с направлением внешней силы (рисунок 1.13).

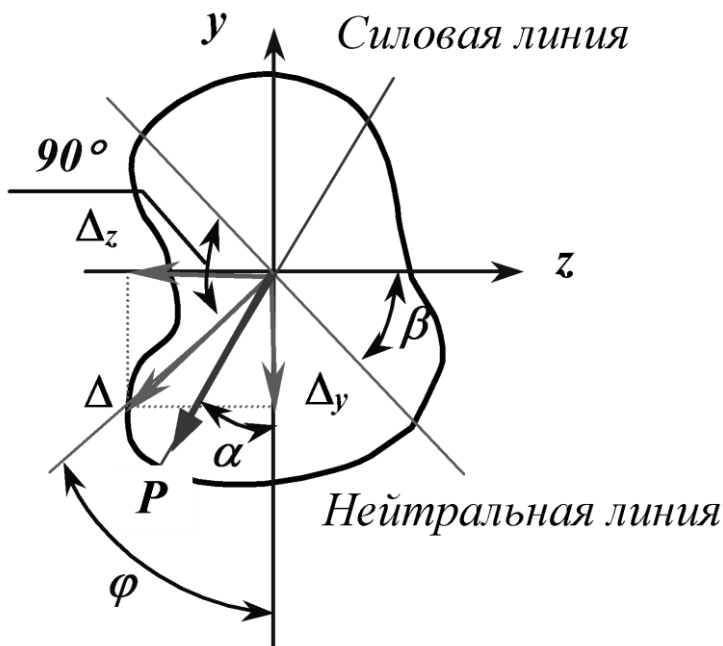


Рисунок 1.13 – Перемещение при косом изгибе

При косом изгибе (впрочем, как и при остальных видах нагружения) имеем три задачи расчета на прочность:

- 1) проверка прочности;
- 2) подбор сечения [определить W_z (размеры сечения), при заданном отношении W_z/W_y];
- 3) проверка по несущей способности (определить M).

Порядок проверки прочности балки, работающей в условиях косоугольного или пространственного изгиба, тот же, что и для балки, работающей при плоском поперечном изгибе. Для этого необходимо:

– построить эпюры внутренних усилий (изгибающих моментов). Для построения эпюр внутренних усилий раскладываем нагрузки на вертикальную и горизонтальную составляющие. Вертикальная составляющая вызывает изгиб относи-

тельно горизонтальной оси y , горизонтальная – относительно оси z ;

– выбрать опасные сечения – это сечения, где имеет место наиболее неблагоприятное сочетание изгибающих моментов;

– в опасных сечениях найти опасные точки – точки с максимальными нормальными напряжениями;

– записать условие прочности в этих точках. Из условия прочности либо подобрать размеры поперечного сечения, либо найти допустимую нагрузку, либо просто сделать вывод о возможности безопасной эксплуатации конструкции.

1.6 Внецентренное сжатие или растяжение

Вторым практически важным случаем сложения деформаций от изгиба и от продольных сил является так называемое внецентренное сжатие или растяжение, вызываемое одними продольными силами. Этот вид нагружения довольно распространен в технике, так как в реальной ситуации почти невозможно приложить растягивающую нагрузку точно в центре тяжести.

Внецентренным растяжением-сжатием называется случай, когда равнодействующая сил, приложенных к отброшенной части стержня, направлена параллельно оси стержня, но не совпадает с этой осью (рисунок 1.14).



Рисунок 1.14 – Пример внецентренного растяжения (сжатия)

Внецентренное растяжение (сжатие) испытывают короткие стержни. Все сечения являются равноопасными, поэтому нет необходимости в построении эпюр внутренних силовых факторов.

Представим, что после проведения разреза равнодействующая P сил, действующих на отброшенную часть и приложенная к оставшейся, проходит через точку с координатами $(x_p; y_p)$ в главных центральных осях поперечного сечения (рисунок 1.15).

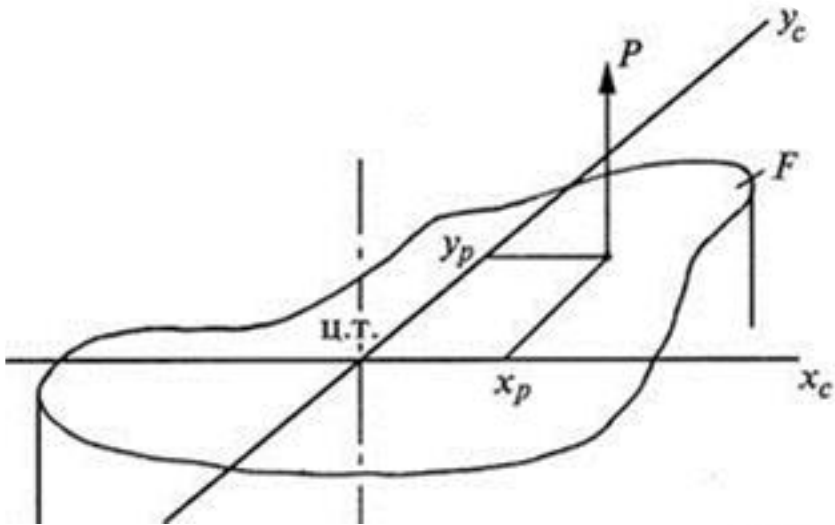


Рисунок 1.15 – Сечение стержня при внецентренном растяжении

Приведем силу P в центр тяжести сечения, т. е. направим вдоль оси стержня (сила N). При этом появятся две пары сил M_{x_c} и M_{y_c} относительно главных центральных осей (рисунок 1.16).

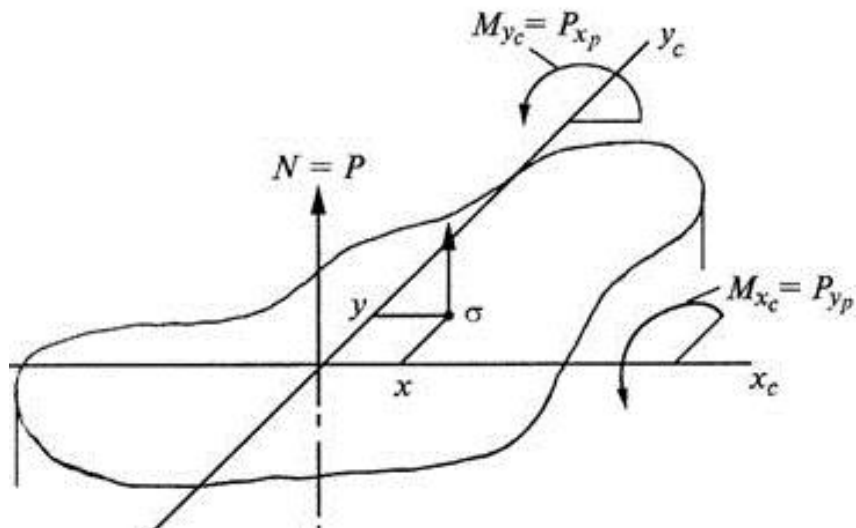


Рисунок 1.16 – Приведение действующей силы к центру тяжести сечения

Таким образом, в поперечном сечении стержня при внецентренном растяжении и сжатии возникают три внутренних силовых фактора: нормальная сила N и два изгибающих момента M_{x_c} и M_{y_c} относительно главных центральных осей поперечного сечения.

Для вычисления нормального напряжения в поперечном сечении в окрестности точки с произвольными координатами x, y воспользуемся принципом независимости действия сил. Будем вычислять нормальное напряжение от каждого внутреннего силового фактора в отдельности и результат сложим:

$$\sigma(x, y) = \frac{N}{F} + \frac{M_{x_c}}{I_{x_c}} \cdot y + \frac{M_{y_c}}{I_{y_c}} \cdot x. \quad (1.2)$$

По этой формуле можно вычислять нормальные напряжения в точках поперечного сечения стержня при совместном действии осевой силы и двух изгибающих моментов. В нашем случае все три внутренних силовых фактора зависят от вне-

центренно приложенной силы P (рисунок 1.16). Подставив соответствующие выражения в (1.2), получим:

$$\sigma(x, y) = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_P}{I_{x_c}} \cdot y + \frac{P \cdot x_P}{I_{y_c}} \cdot x.$$

Вынесем величину нормального напряжения при осевом растяжении $\sigma = P/F$ за скобки:

$$\sigma(x, y) = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_P \cdot F}{I_{x_c}} \cdot y + \frac{x_P \cdot F}{I_{y_c}} \cdot x \right).$$

Введем понятие о радиусе инерции относительно оси:

$i = \sqrt{\frac{I}{F}}$ – такое расстояние от рассматриваемой оси до условной точки, где сосредоточена вся площадь сечения

Тогда момент инерции можно найти по формуле:

$$I = i^2 \cdot F. \quad (1.3)$$

Применив (1.3) в выражении $\sigma(x, y)$, получим:

$$\sigma(x, y) = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_P \cdot y}{i_{x_c}^2} + \frac{x_P \cdot x}{i_{y_c}^2} \right). \quad (1.4)$$

Мы получили формулу нормальных напряжений в поперечном сечении при внецентренном растяжении или сжатии. Если сила растягивающая, то перед скобкой ставится знак «+», если сила сжимающая, то ставится «-».

В этой формуле координаты точки, где определяются напряжения, входят в первой степени. Следовательно, если величины напряжений откладывать в масштабе в виде аппликата перпендикулярно плоскости поперечного сечения, то кон-

цы этих отрезков будут лежать на плоскости, наклоненной к плоскости поперечного сечения. Будем называть эту плоскость плоскостью напряжений. Известно, что две наклоненные плоскости пересекаются по линии. В нашем случае в точках этой линии $\sigma = 0$ – это нулевая линия, которая описывается уравнением:

$$1 + \frac{y_P \cdot y}{i_{x_c}^2} + \frac{x_P \cdot x}{i_{y_c}^2}. \quad (1.5)$$

Анализируя (1.5) можно сделать вывод, что нейтральная линия при внецентренном растяжении и сжатии не проходит через центр тяжести, а отсекает на главных центральных осях отрезки a_{x_c} и a_{y_c} . Полагая последовательно в (1.5) $x = 0$ и $y = 0$, получим:

$$\begin{aligned} a_{x_c} &= -\frac{i_{y_c}^2}{x_P}, \\ a_{y_c} &= -\frac{i_{x_c}^2}{y_P}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из формул (1.6) следуют некоторые закономерности, связывающие положения полюса (т. е. точки приложения силы) и нейтральной линии, которые удобно использовать для анализа решения задачи. Перечислим самые важные из этих закономерностей:

– нейтральная линия всегда расположена в квадранте, противоположном тому, в котором находится полюс (рисунок 1.17);

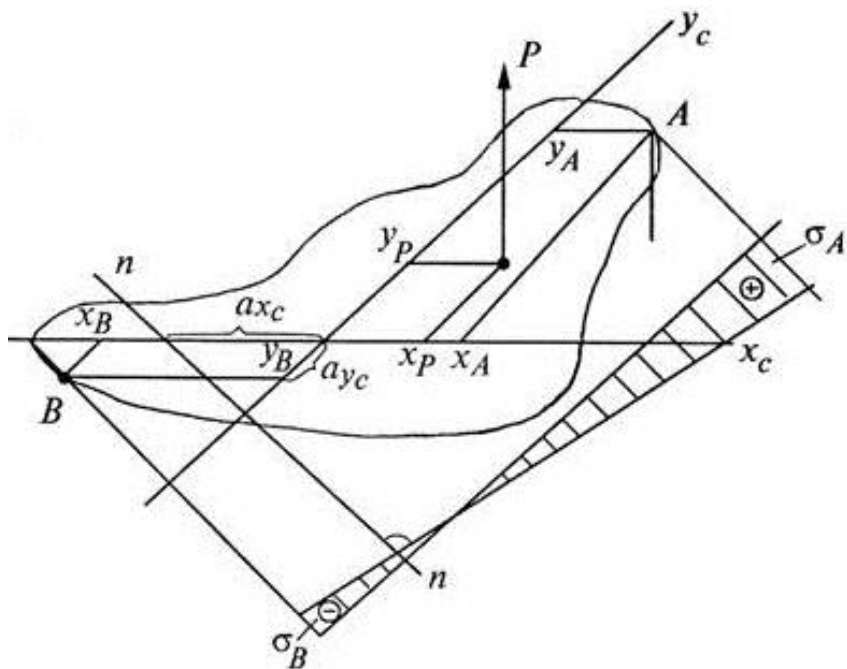


Рисунок 1.17 – Положение нейтральной линии

- если полюс находится на одной из главных осей, то нейтральная линия перпендикулярна этой оси;
- если полюс приближается к центру тяжести сечения, то нейтральная линия удаляется от него;
- если полюс движется по прямой линии, то нейтральная линия поворачивается вокруг неподвижной точки.

Для сечений со сложным контуром знание положения нулевой линии очень важно. Вспоминая про понятие плоскость напряжений, можно утверждать, что наибольшие по величине нормальные напряжения возникают в точках поперечного сечения наиболее удаленных от нулевой линии. Если взглянуть на плоскость напряжений вдоль нулевой линии, то она будет видна в виде линии, соединяющей аппликаты напряжений, т. е. в виде эпюры напряжений, отложенной от линии перпендикулярной нулевой линии (рисунок 1.17).

Наибольшее растягивающее нормальное напряжение возникает в точке A :

$$\sigma_A = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p y_A}{i_{x_c}^2} + \frac{x_p x_A}{i_{y_c}^2} \right) > 0, \quad (1.7)$$

а наибольшее сжимающее нормальное напряжение возникает в точке B :

$$\sigma_B = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p y_B}{i_{x_c}^2} + \frac{x_p x_B}{i_{y_c}^2} \right) < 0. \quad (1.8)$$

Таким образом, при внецентренном растяжении кроме растягивающих нормальных напряжений в поперечном сечении могут возникнуть и сжимающие. При внецентренном сжатии – наоборот.

Если материал стержня одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности получает такой вид:

$$|\sigma_{max}| = P \left(\frac{1}{F} + \frac{y_p \cdot y_1}{I_x} + \frac{x_p \cdot x}{I_y} \right).$$

Хрупкий материал обладает различными свойствами в условиях растяжения и сжатия – плохо сопротивляется растяжению и хорошо сжатию, условия прочности составляют для двух точек: где действуют максимальные растягивающие (точка A) и максимальные сжимающие (точка B) напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{Pmax} = \sigma_A &= \frac{N}{F} + \frac{M_y \cdot x_A}{I_y} + \frac{M_x \cdot y_A}{I_x} \leq [\sigma_p], \\ |\sigma_{с max}| = \sigma_B &= \frac{N}{F} - \frac{M_y \cdot x_B}{I_y} - \frac{M_x \cdot y_B}{I_x} \leq [\sigma_c]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для поперечных сечений с выступающими углами, у которых обе главные оси инерции являются осями симметрии (прямоугольник, двутавр и др.), $y_I = y_{max}$, $x_I = x_{max}$. Поэтому формула упрощается, и мы имеем:

$$|\sigma_{max}| = P \cdot \left(\frac{1}{F} + \frac{y_P}{W_x} + \frac{x_P}{W_y} \right) \leq [\sigma].$$

Если же материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо проверить прочность стержня как в растянутой, так и в сжатой зонах.

1.7 Ядро сечения при внецентренном сжатии

При конструировании стержней из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (бетон), необходимо добиться того, чтобы все сечение работало лишь на сжатие. Этого можно достигнуть, не давая точке приложения силы P слишком далеко отходить от центра тяжести сечения, ограничивая величину эксцентриситета.

Конструктору желательно заранее знать, какой эксцентриситет при выбранном типе сечения можно допустить, не рискуя вызвать в сечениях стержня напряжений разных знаков. Здесь вводится понятие о так называемом ядре сечения. Этим термином обозначается некоторая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой можно располагать точку приложения силы P , не вызывая в сечении напряжений разного знака.

На рисунке 1.18 поясняется данное определение ядра сечения.

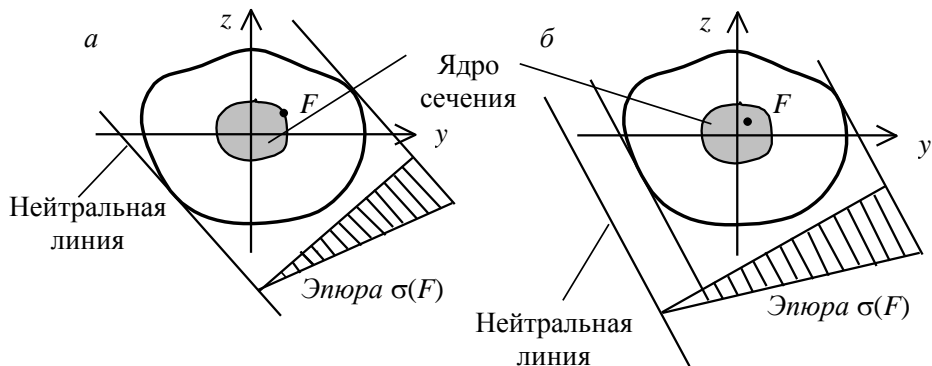


Рисунок 1.18 – Ядро сечения произвольного сечения

При приложении силы P в точке на границе ядра сечения с координатами $(x_я; y_я)$ нулевая линия будет касательной к контуру поперечного сечения в точке B (рисунок 1.19) и отсекает на главных центральных осях отрезки a_{x_c} и a_{y_c} .

Применяя (1.6), получим:

$$\begin{aligned} x_я &= -\frac{i_{y_c}^2}{a_{x_c}}, \\ y_я &= -\frac{i_{x_c}^2}{a_{y_c}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Формулы (1.10) описывают алгоритм вычисления координат точек границы ядра сечения:

- 1) проводится касательная к контуру поперечного сечения и определяются отрезки a_{x_c} и a_{y_c} ;
- 2) по формуле (1.10) определяются координаты $x_я$ и $y_я$.

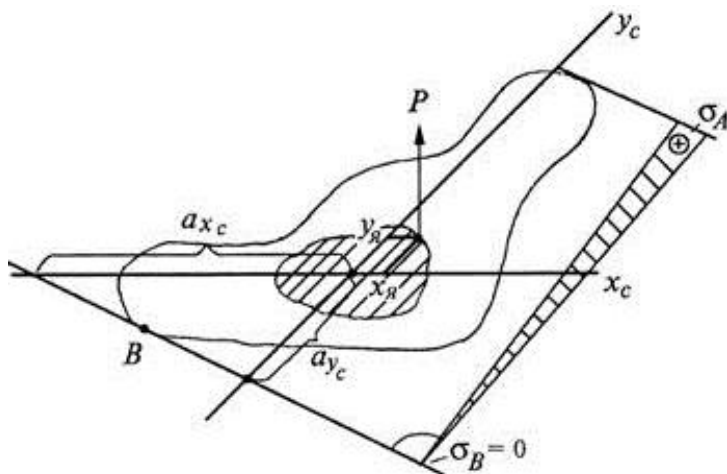


Рисунок 1.19 – Положение нейтральной линии при приложении силы на границе ядра сечения

Такая процедура проводится со всеми касательными. Для сложного криволинейного контура чем больше будет проведено касательных, тем точнее будет найден контур ядра сечения.

Можно доказать, что если касательная будет вращаться вокруг угла контура сечения, если он есть, то соответствующая точка на контуре ядра будет перемещаться по прямой линии, соединяющей точки ядра, соответствующие крайним положениям касательных.

Если контур поперечного сечения представляет собой многоугольник, то контур ядра сечения тоже будет иметь форму многоугольника, но необязательно с тем же количеством углов (их может быть меньше).

Для прямоугольного сечения ядро будет ромбом с диагоналями, равными одной трети соответствующей стороны сечения. Поэтому прямоугольное сечение при расположении силы по главной оси работает на напряжения одного знака, если точка приложения силы не выходит за пределы средней трети стороны сечения.

Для круглого сечения радиуса r очертание ядра будет по симметрии кругом радиуса r_0 . Возьмем какое-либо положение нейтральной оси, касательное к контуру. Ось Oy расположим перпендикулярно к этой касательной. Тогда:

$$a_y = r; a_z = \infty; Z_{я} = r_0 = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{\frac{\pi \cdot r^4}{4 \cdot \pi \cdot r^2}}{r} = -\frac{r}{4}.$$

Таким образом, ядро представляет собой круг с радиусом, вчетверо меньшим, чем радиус сечения.

Для двутавра нейтральная ось при обходе контура не будет пересекать площади поперечного сечения, если будет касаться прямоугольного контура $ABCD$, описанного около двутавра (рисунок 1.20, *а*). Следовательно, очертание ядра для двутавра имеет форму ромба, как и для прямоугольника, но с другими размерами.

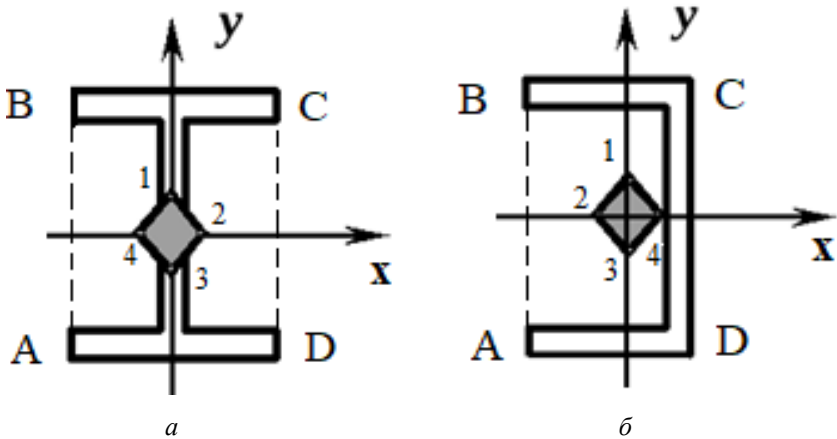


Рисунок 1.20 – Ядро сечения:

а – для двутавра; *б* – для швеллера

Для швеллера, как и для двутавра, точки 1, 2, 3, 4 контура ядра (рисунок 1.20, *б*) соответствуют совпадению нейтральной оси со сторонами прямоугольника $ABCD$.

1.8 Совместное действие изгиба с кручением

Силы, действующие на валы (давление на зубья шестерен, натяжение ремней, собственный вес вала и шкивов и т. п.), вызывают в поперечных сечениях валов следующие внутренние силовые факторы: $M_{кр} = M_x$, M_y , M_x , Q_y , Q_z . Таким образом, в любом поперечном сечении одновременно возникают нормальные напряжения от изгибов в двух плоскостях, а также касательные напряжения от кручения и поперечных сил.

Для расчета вала в первую очередь необходимо установить опасные сечения. С этой целью должны быть построены эпюры изгибающих моментов M_y , M_z и крутящего момента $M_{кр}$.

Нагрузки, действующие на вал, разлагаем на составляющие вдоль координатных осей, а затем строим эпюры изгибающих моментов M_y и M_z в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

При изгибе вала круглого или кольцевого сечения в каждом из его сечений имеет место прямой изгиб под действием результирующего изгибающего момента (рисунок 1.21).

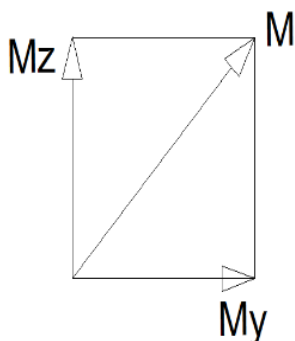


Рисунок 1.21 – Направление результирующего изгибающего момента

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \quad (1.11)$$

Направление вектора результирующего момента определим, вычислив угол α между вертикальной осью Z и M из $\tan \alpha = \frac{M_y}{M_z}$.

Вектор момента M в разных сечениях может иметь различные направления, в силу чего даже при отсутствии распределенных нагрузок эпюра M может быть криволинейной. Это позволяет строить эпюры M упрощенным способом, несколько завышая значения суммарного изгибающего момента M на участках между переломами эпюры: величины суммарного изгибающего момента M вычисляются лишь для тех сечений, в которых на эпюрах M_y и M_z есть переломы. Эти величины откладываются в масштабе по одну сторону от оси на эпюре M и соединяются кривой линией.

Далее строим эпюру $M_{кр} = M_x$ и ищем опасные сечения, в которых одновременно велики M и $M_{кр}$. Сопоставляя эпюры, построенные в одном масштабе, находим опасные сечения. Далее в опасном сечении нужно найти опасные точки.

Определим положение нейтральной линии и строим эпюры нормальных напряжений от результирующего изгибающего момента M , которые изменяются пропорционально расстоянию точек от нейтральной линии. Очевидно, опасными являются точки, наиболее удаленные от нейтральной линии, в которых одновременно и нормальные напряжения от изгиба и касательные напряжения от кручения имеют наибольшие значения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}. \quad (1.12)$$

При изгибе с кручением элемент в опасной точке находится в плоском напряженном состоянии. Главные напряжения определяем по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}), \\ \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}).\end{aligned}\tag{1.13}$$

В данном случае сложного напряженного состояния влиянием касательных напряжений от поперечных сил пренебрегаем, так как они значительно меньше касательных напряжений, вызванных кручением.

Для проверки прочности элемента, выделенного у опасной точки, нужно, выбрав соответствующую теорию прочности, воспользоваться одной из формул для определения эквивалентного напряжения, например, по четвертой теории прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].\tag{1.14}$$

Подставляя значение σ_{max} и τ_{max} и учитывая, что $W_\rho = 2W$, получим:

$$\sigma_{\text{ЭКВ IV}} = \frac{\sqrt{0,75M_{\text{кр}}^2 + M_z^2 + M_y^2}}{W} \leq [\sigma].\tag{1.15}$$

Числитель этой формулы представляет собой приведенный момент, действие которого эквивалентно совместному действию трех моментов (согласно принятой теории прочности). Следовательно, в случае необходимости подобным же образом можно получить формулы для приведенных моментов и по другим теориям прочности.

Теперь условия прочности можно заменить одной простой формулой:

$$\sigma_{\text{ЭКВ IV}} = \frac{M_{\text{ПРИВ}}}{W} \leq [\sigma]. \quad (1.16)$$

При совместном действии изгиба с кручением стержни круглого сечения рассчитывают на изгиб от приведенного момента $M_{\text{прив}}$.

На практике часто встречаются стержни некруглого сечения, подверженные действию крутящих и изгибающих моментов. При загрузении такого бруса, например, системой сил, вызывающих в сечении изгибающие моменты M_x , M_y и крутящий $M_{кр}$, расчет проводят по следующей схеме. Внешние силы раскладывают на составляющие, приводя их к оси вала. Для нахождения опасного сечения строят эпюры M_x , M_y и $M_{кр}$.

Установив по эпюрам опасное сечение находят опасную точку в нем, для чего строят эпюры напряжений от всех силовых факторов.

В случае, когда σ_{max} от изгиба не совпадают с τ_{max} от кручения, для выявления одной опасной точки приходится рассматривать сочетание напряжений в нескольких точках. Обычно бывает достаточно трех точек: одной из угловых, одной посередине длинной и одной посередине короткой сторон прямоугольника.

Обычно касательные напряжения от поперечных сил малы, и ими можно пренебречь.

Эквивалентные напряжения согласно IV теории прочности и теории Кулона–Мора равны:

– в точке посередине длинной стороны

$$\sigma_{\text{ЭКВ IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma], \quad (1.17)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ M}} = \frac{1-m}{2} \frac{M_x}{W_x} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (1.18)$$

– в точке посередине короткой стороны

$$\sigma_{\text{ЭКВ IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_{\text{кр}}}{\alpha h b^2}\right)^2} \leq [\sigma], \quad (1.19)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ M}} = \frac{1-m}{2} \frac{M_y}{W_y} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_{\text{кр}}}{\alpha h b^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (1.20)$$

Таким образом, наиболее опасная точка определяется только в результате вычисления эквивалентных напряжений во всех трех точках. При этом в каждом конкретном случае положение наиболее опасной точки зависит от соотношения моментов M_x , M_y и $M_{\text{кр}}$.

1.9 Пример расчета вала при сложном сопротивлении

Для заданного вала (рисунок 1.22, а) постоянного сечения определить диаметр, используя третью теорию прочности. При расчете левую опору считать шарнирно-неподвижной, правую – шарнирно-подвижной.

Размеры вала – $a = 0,1$ м, $b = 0,5$ м, $c = 0,1$ м, $z_2 = 0,05$ м.

Нагрузки, приложенные к валу – $P_1 = 1$ кН, $P_2 = 2$ кН, $P_3 = 4$ кН, $P_4 = 3$ кН, $P_5 = 4$ кН.

$$z_1 = \frac{F_4}{F_1} \cdot z_2 = \frac{3}{1} \cdot 0,05 = 0,15 \text{ м.}$$

Допускаемое напряжение $[\sigma] = 80$ МПа.

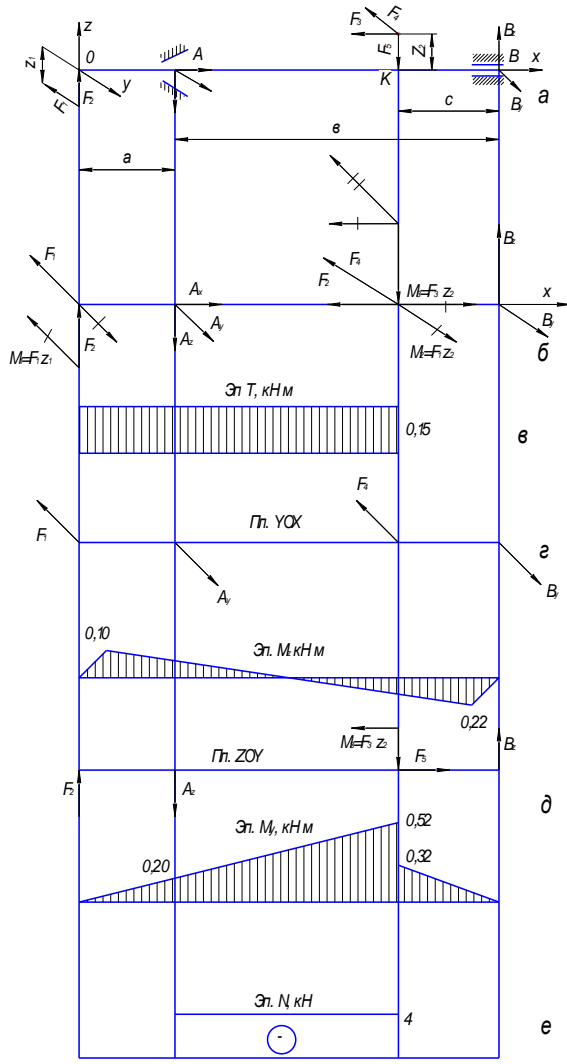


Рисунок 1.22 – Вал, работающий при сложном сопротивлении:

a – схема вала и действующих нагрузок; $б$ – расчетная схема; $в$ – эпюры крутящих моментов T ; $г$ – схема сил, действующих в плоскости YOX и эпюра изгибающих моментов M_z ; $д$ – схема сил, действующих в плоскости ZOX и эпюра изгибающих моментов M_y ; $е$ – эпюра нормальной (продольной) силы N

Составляем расчетную схему

Для составления расчетной схемы приводим силы P_1, P_3 и P_4 к точкам, лежащим на оси вала (рисунок 1.22, б). Перенос каждой силы будет сопровождаться появлением изгибающих и крутящих моментов. Силы P_1 и P_4 , перенесенные на ось вала, будут изгибать вал и создавать внешние крутящие моменты $M_1 = P_1 \cdot z_1$ и $M_2 = P_4 \cdot z_2$. Сила P_3 , перенесенная на ось вала, будет сжимать вал и вызовет появление момента, изгибающего вал, $M_3 = P_3 \cdot z_2$.

Определим опорные реакции

Начало координат помещаем на левом конце вала. Неподвижная опора A имеет три составляющие опорные реакции: A_x, A_y, A_z . Подвижная опора B – две: B_y, B_z . Для определения опорных реакций в плоскости ZOX используем уравнение моментов:

$$\sum M_{B_y} = P_5 \cdot c - P_2(a+b) + A_z \cdot b + P_3 \cdot z_2 = 0,$$

$$A_z = \frac{P_2(a+b) - P_5 \cdot c - P_3 \cdot z_2}{b} = \frac{2 \cdot (0,1 + 0,5) - 4 \cdot 0,1 - 4 \cdot 0,05}{0,5} = 1,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_{A_y} = P_3 \cdot z_2 + B_z \cdot b - P_2 \cdot a - P_5(b-c) = 0,$$

$$B_z = \frac{P_2 \cdot a + P_5(b-c) - P_3 \cdot z_2}{b} = \frac{2 \cdot 0,1 + 4 \cdot (0,5 - 0,1) - 4 \cdot 0,05}{0,5} = 3,2 \text{ кН}.$$

Для определения опорных реакций в плоскости YOX используем уравнения моментов:

$$\sum M_{B_z} = A_y \cdot b - P_1(a+b) - P_4 \cdot c = 0,$$

$$A_y = \frac{P_1(a+b) + P_4 \cdot c}{b} = \frac{1 \cdot (0,1 + 0,05) + 3 \cdot 0,1}{0,5} = 1,8 \text{ кН};$$

$$\sum M_{A_y} = P_4(b-c) - B_y \cdot b - P_1 \cdot a = 0,$$

$$B_y = \frac{P_4(b-c) - P_1 \cdot a}{b} = \frac{3 \cdot (0,5 - 0,1) - 1 \cdot 0,1}{0,5} = 2,2 \text{ кН}.$$

Для определения реакции A_x составим сумму проекций всех сил на ось X :

$$\sum X = A_x - P_3 = 0,$$

$$A_x = P_3 = 4 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности вычисления составляющих опорных реакций вычислим сумму проекций всех сил на ось Y и Z :

$$\sum Y = A_y + B_y - P_1 - P_4 = 1,8 + 2,2 - 1 - 3 = 0,$$

$$\sum Z = P_2 - A_z - P_5 + B_z = 2 - 1,2 - 4 + 3,2 = 0.$$

Строим эпюру крутящего момента T

Внешние моменты $M_1 = P_1 \cdot z_1$ и $M_2 = P_4 \cdot z_2$ приложенные к валу, образуют уравновешенную систему сил. Крутящий момент, определяемый через внешние моменты, будет равен:

$$T = P_1 \cdot z_1 = P_4 \cdot z_2 = 1 \cdot 0,15 = 3 \cdot 0,05 = 0,15 \text{ кН}.$$

Эпюра крутящего момента представлена на рисунке 1.22, в.

Строим эпюры изгибающих моментов M_z и M_y

Определяем изгибающие моменты, действующие в горизонтальной плоскости YOX , т. е. M_z (рисунок 1.22, з).

В точке O : $M_1 = 0$.

В сечении над опорой A : $M_2 = P_1 \cdot a = 1 \cdot 0,1 = 0,1$ кНм.

В точке K : $M_3 = P_1[a + (b - c)] - A_y(b - c)$,

$$M_3 = 1 \cdot [0,1 + 0,5 - 0,1] - 1,8 \cdot (0,5 - 0,1) = -0,22 \text{ кНм.}$$

В сечении над опорой B : $M_4 = 0$.

Определяем изгибающие моменты, действующие в вертикальной плоскости ZOX , т. е. M_y (рисунок 1.22, д).

В точке O : $M_1 = 0$.

В сечении над опорной A : $M_2 = P_2 \cdot a = 2 \cdot 0,1 = 0,2$ кНм.

В точке K : $M_3 = P_2[a + (b - c)] - A_z(b - c)$,

$$M_3 = 2 \cdot [0,1 + 0,5 - 0,1] - 1,2 \cdot (0,5 - 0,1) = 0,52 \text{ кНм.}$$

В сечении чуть правее точки K :

$$M_4 = B_z \cdot c = 3,2 \cdot 0,1 = 0,32 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру нормальной силы N

На ось вала проектируются силы A_x и P_3 , которые будут вызывать сжатие вала на участке между неподвижной опорой A и точкой приложения силы P_3 .

$$N = -A_x = -P_3 = -4 \text{ кН.}$$

Эпюра продольной силы представлена на рисунке 1.22, е.

Определяем внутренние силовые факторы в опасном сечении

Сопоставляя эпюры T , M_z , M_y и N , находим, что опасным является сечение, проходящие через точку K , где одновременно действуют:

$$T = 0,15 \text{ кНм;}$$

$$M_z = 0,52 \text{ кНм;}$$

$$M_y = 0,22 \text{ кНм};$$

$$N = -4 \text{ кН}.$$

Определяем диаметр вала

Диаметр вала из расчета на изгиб с кручением изначально определяем без учета действия продольной силы:

$$d = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{np}}{[\sigma]}},$$

где M_{np} – приведенный момент, кН·м,

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение, МПа.

По 3-й теории прочности приведенный момент равен:

$$M_{np} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} = \sqrt{0,52^2 + 0,22^2 + 0,15^2} = 0,59 \text{ кНм}.$$

Тогда диаметр вала равняется:

$$d = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 0,59 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6}} = 0,0419 \text{ м}.$$

Округляем до ближайшего значения $d = 42 \text{ мм}$.

Проверяем прочность найденного диаметра вала с учетом действия продольной силы:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{M}{W}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{T}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma],$$

где A – площадь поперечного сечения вала, м²;

W – осевой момент сопротивления, м³;

W_p – полярный момент сопротивления, м³.

Для вала круглого поперечного сечения:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,042^2}{4} = 13,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

Для вала круглого поперечного сечения осевой момент сопротивления равен:

$$W = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = 0,1 \cdot d^3 = 0,1 \cdot 0,042^3 = 7,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

Для вала круглого поперечного сечения полярный момент сопротивления равен:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 0,2 \cdot d^3 = 0,2 \cdot 0,042^3 = 14,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Подставляя найденные значения, получим:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{4 \cdot 10^3}{13,8 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,52 \cdot 10^3}{7,4 \cdot 10^{-6}} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{0,15 \cdot 10^3}{14,8 \cdot 10^{-6}} \right)^2} = 75,9 \text{ Мпа.}$$

Условие выполняется.

Контрольные вопросы

1. Косой изгиб. Внецентренное сжатие.
2. Напряжения при косом изгибе.
3. Что такое силовая плоскость?
4. Свойства нейтральной линии.
5. Изгиб с кручением.

2 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

2.1 Общие положения

Под устойчивостью упругого тела понимают его способность сохранять состояние равновесия при внешних относительно малых воздействиях (возмущениях).

Упругое равновесие тела называют неустойчивым, если тело, будучи выведенным из него, в исходное состояние не возвращается.

Между этими двумя состояниями существует переходное (критическое) состояние, при котором тело находится в безразличном равновесии. Это означает, что тело может сохранять исходное состояние, но может и потерять его при незначительном воздействии.

Устойчивость формы равновесия тела зависит от величины приложенных к нему нагрузок. Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости исходной формы равновесия тела, называется критической ($P_{кр}$).

Можно утверждать, что приложение критической нагрузки равносильно разрушению конструкции. Неустойчивая форма равновесия неминуемо будет утрачена, и деформации (напряжения) неограниченно возрастут.

Таким образом, при расчете на устойчивость $P_{кр}$ подобна разрушающей нагрузке при расчете на прочность.

Потеря устойчивости (и разрушение) может наступить при напряжениях, существенно меньших тех, которые допускаются по условию прочности.

Задачу об устойчивости сжатого упругого стержня называют задачей Эйлера.

Представим себе, что под действием осевой силы стержень изогнулся – его ось отклонилась от прямолинейной формы равновесия (рисунок 2.1). Пусть отклонения оси стержня малы, и напряжения не превышают предела пропорциональности.

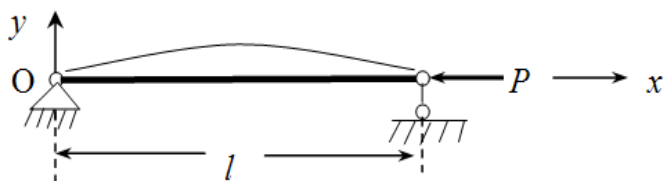


Рисунок 2.1 – Стержень под действием осевой силы

Вертикальные составляющие опорных реакций, очевидно, равны нулю. Поэтому изгибающий момент в произвольном сечении стержня будет равен:

$$M = -P \cdot y, \quad (2.1)$$

где y – прогиб стержня в данном сечении, а знак « \leftarrow » означает, что момент соответствует отрицательной кривизне оси стержня.

Для вывода дифференциального уравнения изогнутой оси стержня рассмотрим выражение:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py. \quad (2.2)$$

Под EJ следует понимать минимальную жесткость стержня. Именно в этой плоскости следует ожидать искривление оси стержня.

Пусть $EJ = const$ вдоль оси стержня, тогда

$$\frac{P}{EJ} = k^2. \quad (2.3)$$

Приведем дифференциальное уравнение (2.2) к виду:

$$y'' + k^2 y = 0. \quad (2.4)$$

Решением этого уравнения будет:

$$y = A \sin kx + B \cos kx. \quad (2.5)$$

Коэффициенты A и B находятся из граничных условий для функции y , т. е. из условий закрепления концов стержня.

На левом конце $x = 0$, $y = 0$, следовательно $B = 0$.

На правом конце $x = l$, $y = 0$, что дает $A \sin kl = 0$, поэтому $A = 0$ или $kl = \pi n$, где $n = 0, 1, 2, 3$.

Однако при $A = 0$ решение является тривиальным – оно соответствует прямолинейной форме стержня. По той же причине следует отбросить корень $kl = 0$.

Таким образом, изогнутая ось является синусоидой с уравнением:

$$y = A \sin kx, \text{ где } k = \frac{\pi n}{l}. \quad (2.6)$$

Подстановка k в (2.3) из (2.6) приводит к формуле Эйлера:

$$P = n^2 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (2.7)$$

Формула Эйлера (2.7) выражает нагрузку, способную удержать в равновесии слегка искривленный стержень. Теоретически эта нагрузка имеет целый ряд значений ($n = 1, 2, 3$). Каждому значению n соответствует своя форма упругой линии (рисунок 2.2).

С практической точки зрения интересно знать наименьшее значение силы P , поэтому следует принять $n = 1$, тогда:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (2.8)$$

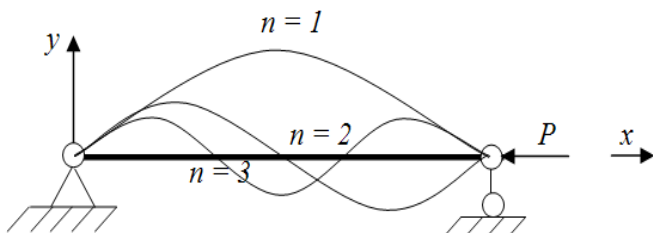


Рисунок 2.2 – Форма упругой линии при различных значениях n

Этому значению критической силы соответствует изгиб стержня по синусоиде с одной полуволной:

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (2.9)$$

Значениям критической силы высших порядков соответствуют упругие линии с двумя, тремя и т. д. полуволнами (рисунок 2.2). Однако, как показывают исследования, эти формы равновесия неустойчивы. Кроме того, при нарастании осевой сжимающей силы в первую очередь реализуется форма равновесия с одной полуволной.

Из уравнения упругой линии (2.9) следует, что при $x = \frac{l}{2}$ прогиб балки равен: $y = y_{\max} = A$.

Вследствие этого A – это прогиб стержня посередине его длины. Поскольку равновесие стержня возможно при любом малом отклонении от прямолинейной формы, то величина A остается неопределенной. Однако прогиб A должен быть настолько мал, чтобы правомерным было применение дифференциального уравнения изогнутой оси стержня (2.2).

Подставим в формулу (2.8) для критической силы $J = i^2 F$, разделим ее на площадь поперечного сечения стержня F и получим формулу критических напряжений:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \text{ или } \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i^2}{l^2}.$$

Введем величину $\lambda = \frac{l}{i}$ – гибкость стержня. Она играет важную роль в проверке стержней на устойчивость. В итоге формула для $\sigma_{кр}$ примет вид:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (2.10)$$

Формула Эйлера получена для стержня с шарнирным опиранием его концов. Для других случаев опирания критическую силу можно получить тем же путем. В результате получается обобщенная формула:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (2.11)$$

где μ – коэффициент длины, отражающий влияние условий закрепления;

μl – приведенная длина стержня.

Формула $\sigma_{кр}$ (2.10) также может быть обобщена на другие случаи закрепления. Достаточно ввести в ее знаменатель приведенную гибкость:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}.$$

Значения μ для различных условий опирания стержня приводятся в справочной литературе. Ниже приведены некоторые из них:

– $\mu = 2$ при одном защемленном и другом свободном конце;

– $\mu = \frac{1}{2}$ при двух защемленных концах;

– $\mu = 0,7$ при защемлении на одном конце и подвижном шарнире на другом;

– $\mu = 1$ при шарнирном опирании обоих концов.

Из формулы (2.10) следует, что критические напряжения для стержня из данного материала с модулем E не зависят от прочности материала. Поэтому для достаточно гибкого стального стержня ($\lambda > 10$) $\sigma_{кр}$ оказываются ниже предела пропорциональности $\sigma_{нц}$ и определяют несущую способность стержня при сжатии.

Однако у стальных стержней с гибкостью меньше предельной ($\lambda < 100$) $\sigma_{кр}$ могут превышать $\sigma_{нц}$.

Опыты показали, что короткие стержни ($\lambda = 30 \div 40$) теряют несущую способность из-за потери прочности материала при сжатии, а не потери устойчивости формы.

Стержни средней гибкости, наиболее широко применяемые на практике, по данным опытов теряют несущую способность из-за потери устойчивости формы, но при напряжениях $\sigma_{нц} < \sigma_{кр} < \sigma_0$.

Для проверки на устойчивость таких стержней применение формулы (2.10) не только принципиально недопустимо, но и крайне опасно по своим последствиям.

Для стержней, теряющих устойчивость за пределом упругости Ф. С. Ясинским предложена следующая эмпирическая формула:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (2.12)$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от материала.

Они подобраны так, чтобы при $\lambda = \lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{нц}}}$ напряжения $\sigma_{кр}$ равнялись $\sigma_{нц}$, а при малых λ напряжения $\sigma_{кр}$ незначительно отличались от опасных напряжений σ_0 . Суще-

ствуют таблицы значений коэффициентов a и b для различных материалов, составленные по экспериментальным данным.

Таблица 2.1 – Коэффициенты формулы Ясинского, МПа

Материал	a	b
Сталь Ст.3	310	1,14
Сталь Ст.5	464	3,62
Кремнистая сталь	589	3,82
Дерево	29,3	0,19

2.2 Основное условие устойчивости

Очевидно, что практически $\sigma_{кр}$ в сжатом стержне допускать нельзя – следует назначать некоторый запас устойчивости. Тогда допускаемое напряжение в расчетах на устойчивость будет выражаться формулой:

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}.$$

Коэффициент запаса устойчивости всегда несколько выше коэффициента запаса прочности. Этим компенсируются неизбежные на практике отклонения: начальной формы стержня, реальных свойств материала и способа приложения силы от принятых в расчете.

Таким образом, условие устойчивости сжатого стержня имеет вид:

$$\sigma \leq [\sigma]_y, \quad (2.13)$$

где σ – действующие в стержне сжимающие напряжения.

Можно связать допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}$$

с допускаемым напряжением на прочность:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n_0}.$$

Из их отношения следует:

$$[\sigma]_y = \varphi \cdot [\sigma], \quad (2.14)$$

где $\varphi = \sigma_{кр} \frac{n_0}{\sigma_0 n_y}$ – коэффициент продольного изгиба, учитывающий уменьшение допускаемого напряжения на прочность.

Очевидно, что график зависимости φ от λ в некотором масштабе является графиком $\sigma_{кр}$ от λ . Иначе говоря, для любого материала можно составить график или таблицу значений φ в функции от гибкости λ . Тогда при известном модуле E и гибкости λ коэффициент φ определяют из таблицы и условие устойчивости (2.13) с учетом (2.14) записывают в виде:

$$\frac{P}{\varphi F} \leq [\sigma]. \quad (2.15)$$

Эта формула при проверочном расчете стержня на устойчивость не требует отыскания критических напряжений.

В проектировочном расчете площадь сечения стержня F подбирают методом последовательных приближений. Суть метода состоит в следующем. Задаются значением φ в первом приближении ($\varphi = \varphi_1$) и по условию (2.15) находят площадь сечения F , а затем гибкость λ . По значению λ находят фактическое значение φ'_1 .

В качестве второго приближения для φ берут значение:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}.$$

Расчет ведется до достижения незначительного отличия φ_i от φ'_i .

Например, для стойки, составленной из двух двутавров с шарнирно закрепленными концами, соединенных планками (рисунок 2.3), действует сжимающая сила $F = 500$ кН.

Материал – сталь Ст 3 ГОСТ 380–71. Основное допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma] = 160$ МПа.

Выполним подбор сечения стойки из условия устойчивости (номер двутавра).

Подбор сечения стойки из условия устойчивости

Условие устойчивости стержня имеет вид:

$$\frac{F}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma_{сж}],$$

где φ – коэффициента продольного изгиба;

F – сжимающая сила, кН;

A – площадь поперечного сечения стойки, м²;

$[\sigma_{сж}]$ – допускаемое напряжение, МПа.

При проектировочном расчете (подбор потребного сечения стержня) задача решается методом последовательных приближений. Выбираем в первом приближении $\varphi_1 = 0,5$ из интервала $0 < \varphi < 1$ и определяем потребную площадь поперечного сечения стержня в первом приближении.

Первое приближение $\varphi_1 = 0,5$.

Находим требуемую площадь поперечного сечения:

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma_{сж}]} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 62,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

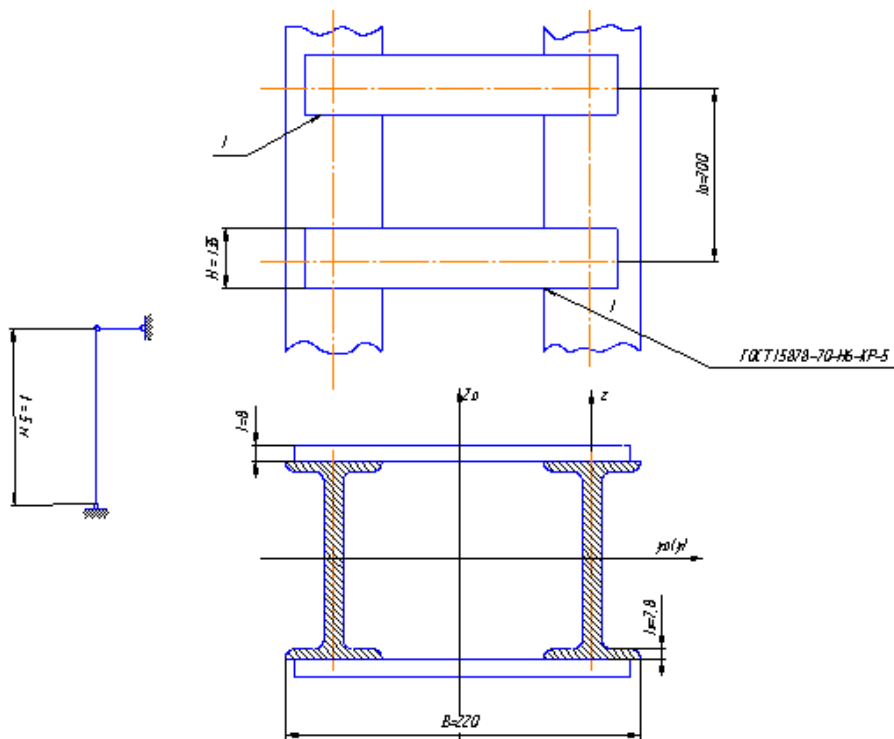


Рисунок 2.3– Расчетная схема на устойчивость

По сортаменту прокатной стали ГОСТ 8239-72 подбираем двутавр № 22, $A = 32,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $I_y = 2790 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, $i_y = 0,0922 \text{ м}$.

Определяем гибкость стойки по формуле:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}},$$

где λ – гибкость стойки;

μ – коэффициент длины, отражающий влияние условий закрепления;

l – длина стойки, м;

i_{\min} – минимальный радиус инерции, м.

Для определения i_{\min} необходимо знать минимальные моменты инерции поперечного сечения стойки. При увеличении расстояния между двутаврами момент инерции сечения стойки I_{Z_0} относительно оси Z_0 будет увеличиваться, а относительно оси Y_0 изменяться не будет и останется равным $I_{y_0} = 2I_y$, где I_y – момент инерции сечения одной ветви стойки относительно центральной оси двутавра. Поэтому в качестве минимального момента инерции поперечного сечения стойки принимается I_y , тогда:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2790 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 32,8 \cdot 10^{-4}}} = 0,092 \text{ м}.$$

Полученное значение совпадает с табличным значением $i_y = 0,0922 \text{ м}$, поэтому вычислять его не надо. Для стойки, составленной из углов или тонкостенного стержня, гибкость определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 5}{0,092} = 54,3.$$

По таблице для стали марки Ст 3 ГОСТ 380-71: $\lambda = 50$ соответствует $\varphi = 0,89$, $\lambda = 60$ соответствует $\varphi = 0,86$.

Интерполируя получим:

$$\varphi_1 = \frac{0,89 - 0,86}{10} \cdot 5,7 + 0,86 = 0,8771.$$

Вычислим напряжение:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_1 \cdot A} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,8771 \cdot 65,6 \cdot 10^{-4}} = 87 \text{ МПа}.$$

Материал значительно недогружен.

Второе приближение. Приняв:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \frac{0,5 + 0,8771}{2} = 0,688.$$

Искомая площадь

$$A = \frac{F}{\varphi_2 \cdot [\sigma_{сж}]} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,688 \cdot 160 \cdot 10^6} = 45,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Подбираем двутавр № 18, $A = 23,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $i_y = 0,074 \text{ м}$.

Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 5}{0,074} = 67,4.$$

По таблице для стали марки Ст 3 ГОСТ 380-71:

$$\varphi_2 = \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 2,6 + 0,81 = 0,823.$$

Вычисляем напряжение:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_2 \cdot A} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,823 \cdot 46,8 \cdot 10^{-4}} = 130 \text{ МПа}.$$

Недогружение составляет:

$$\frac{160-130}{160} \cdot 100 = 18,8 \% > 1 \% , \text{ что недопустимо.}$$

Третье приближение

$$\varphi_3 = \frac{0,688 + 0,823}{2} = 0,755 .$$

Искомая площадь

$$A = \frac{500 \cdot 10^3}{0,755 \cdot 160 \cdot 10^6} = 41,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 .$$

По таблице ГОСТ 8239-72 получаем двутавр № 18.

В дальнейших расчетах принимаем двутавр № 16,
 $A = 20,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $I_y = 873 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, $I_z = 58,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$,
 $i_y = 0,0657 \text{ м}$, $i_z = 0,017 \text{ м}$, $B = 0,081 \text{ м}$.

Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 5}{0,0657} = 76 .$$

По таблице для стали марки Ст 3 ГОСТ 380-71:

$$\varphi_3 = \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 4 + 0,75 = 0,774 .$$

Вычисляем напряжение:

$$\sigma = \frac{500 \cdot 10^3}{0,774 \cdot 40,4 \cdot 10^{-4}} = 159,9 \text{ МПа.}$$

Недогружение составляет:

$$\frac{160 - 159,9}{160} \cdot 100 = 0,0625 \% < 1 \%$$

Окончательно принимаем для стойки двутавр № 16.

Контрольные вопросы

1. Критическая сила. Формула Эйлера.
2. Четыре способа закрепления концов сжатого стержня. Пределы применимости формулы Эйлера.
3. Формула Ясинского.
4. Методика расчета сжатого стержня на устойчивость.

3 ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

До сих пор мы рассматривали действие статически приложенных нагрузок, которые либо не изменяются во времени, либо скорость их изменения настолько мала, что возникающими при этом ускорениями можно пренебречь. Но в инженерной практике часто приходится сталкиваться с быстро изменяющейся нагрузкой, например, при движении поезда по мосту или падении груза на плиту перекрытия. Воздействие, при котором нельзя пренебречь величиной сил инерции и вызванных ими напряжений и деформаций, называется динамическим.

Принято различать следующие виды динамических воздействий, возникающих при:

- 1) ускоренном (замедленном) движении;
- 2) ударе;
- 3) повторно-переменном (циклическом) воздействии.

3.1 Ускоренное движение

Рассмотрим задачу, в которой груз весом $G = m \cdot g$ ускоренно поднимается вверх на тросе, перекинутом через блок (рисунок 3.1) силой, обеспечивающей ускоренное (ускорение – a) движение. Величину этой силы обозначим как $P_{\text{дин}}$.

Допустим, что трос невесом, или вес его пренебрежимо мал по сравнению с весом груза. Если груз движется ускоренно вверх, то сила инерции $P_{\text{ин}} = m \cdot a$ направлена вниз. Составим уравнение равновесия:

$$G + P_{\text{ин}} = P_{\text{дин}}$$

или

$$m \cdot g + m \cdot a = m \cdot g \left(1 + \frac{a}{g} \right) = P_{\text{дин}}$$

или

$$G \left(1 + \frac{a}{g} \right) = P_{\text{дин}}$$

Здесь вес груза G можно считать статической величиной, т. е. $G = P_{ст}$, тогда:

$$P_{ст} \cdot \left(1 + \frac{a}{g}\right) = P_{дин}. \quad (3.1)$$

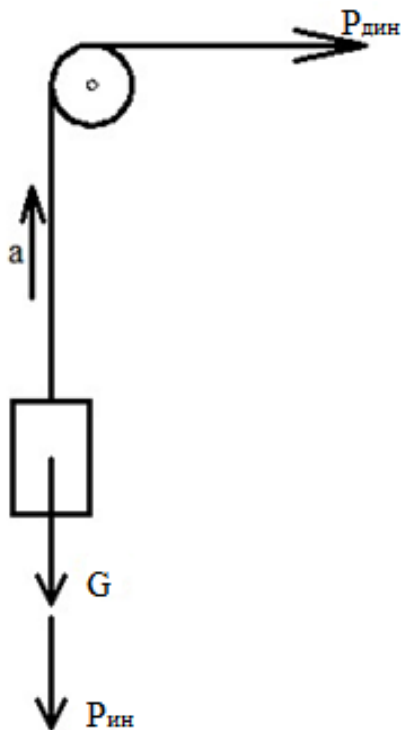


Рисунок 3.1 – Ускоренное движение груза

Величина, стоящая в скобках, преобразует статическую силу в динамическую и называется коэффициентом динамичности:

$$k_{дин} = 1 + \frac{a}{g}. \quad (3.2)$$

Теперь любую величину: динамические напряжения, динамические деформации и т. д. можно определить через ее статическую величину, измененную в коэффициент динамичности раз:

$$\sigma_{\text{дин}} = \sigma_{\text{ст}} \cdot k_{\text{дин}}, \quad (3.3)$$

$$\Delta \ell_{\text{дин}} = \Delta \ell_{\text{ст}} \cdot k_{\text{дин}}. \quad (3.4)$$

Практически любая задача динамического расчета сводится к определению коэффициента динамичности.

3.2 Расчет на удар

С явлением удара приходится иметь дело в том случае, когда скорость рассматриваемого элемента конструкции или соприкасающихся с ним частей в очень короткий промежуток времени изменяется на конечную величину. Получающиеся при этом большие ускорения (замедления) приводят к возникновению значительных инерционных сил, действующих в направлении, противоположном направлению ускорений, т. е. в направлении движения тела. В случае падающего груза величина силы удара (динамической силы $P_{\text{дин}}$) может быть определена как:

$$P_{\text{дин}} = m \cdot a_{(t)}, \quad (3.5)$$

где m – масса падающего груза;

$a_{(t)}$ – ускорение падающего груза после соприкосновения его с препятствием.

Однако определение силы удара таким образом весьма затруднительно, так как не известно время соударения в течение которого скорость движущегося тела снижается от своего максимального значения в момент соприкосновения с ударяемым телом (начало удара) до нуля после деформации последнего (конец удара). В связи с указанными трудностями, опре-

деляя напряжения в элементах упругих систем, вызываемые действием ударных нагрузок (динамические напряжения), в инженерной практике обычно пользуются так называемым энергетическим методом, основанным на законе сохранения энергии. Согласно этому методу предполагают, что при соударении движущихся тел уменьшение запаса кинетической энергии их равно увеличению потенциальной энергии деформации соударяющихся упругих тел.

Вывод расчетных формул для определения динамических напряжений проведем на примере простейшей системы (рисунок 3.2), состоящей из вертикально расположенного упругого призматического стержня с жесткостью $c = \frac{EA}{\ell}$ и некоторого груза Q . Полагаем при этом, что удар неупругий: при соударении падающий груз не отскакивает от стержня, а движется вместе с ним, и, следовательно, в стержне не возникают упругие волны. Кроме того, данная система обладает одной степенью свободы. Рассмотрим два случая:

- 1) груз прикладывается к стержню статически, т. е. нагрузка медленно нарастает от нуля до своего максимального значения (рисунок 3.2, *а*) и сжимает стержень на величину $\delta_{ст}$;
- 2) груз падает с некоторой высоты H , ударяя по стержню, создает в нем сжатие $\delta_d > \delta_{ст}$ (рисунок 3.2, *б*).

Изменение деформации при ударном действии нагрузки Q по сравнению с деформацией при статическом приложении той же нагрузки может быть охарактеризовано коэффициентом динамичности $k_{дин} = \frac{\delta_d}{\delta_{ст}}$, откуда динамическую деформацию через статическую можно выразить формулой:

$$\delta_d = \delta_{ст} \cdot k_{дин}. \quad (3.6)$$

Учитывая линейную связь между напряжением и деформацией, а также принимая одинаковыми модули упругости при статическом и ударном действии нагрузки, что с достаточной степенью точности подтверждается экспериментом, по

аналогии с последней формулой можно установить связь между статическим и динамическим напряжениями (3.3), где $\sigma_{ст} = \frac{Q}{F}$ – напряжение, возникающее в стержне при сжатии силой, равной весу падающего груза.

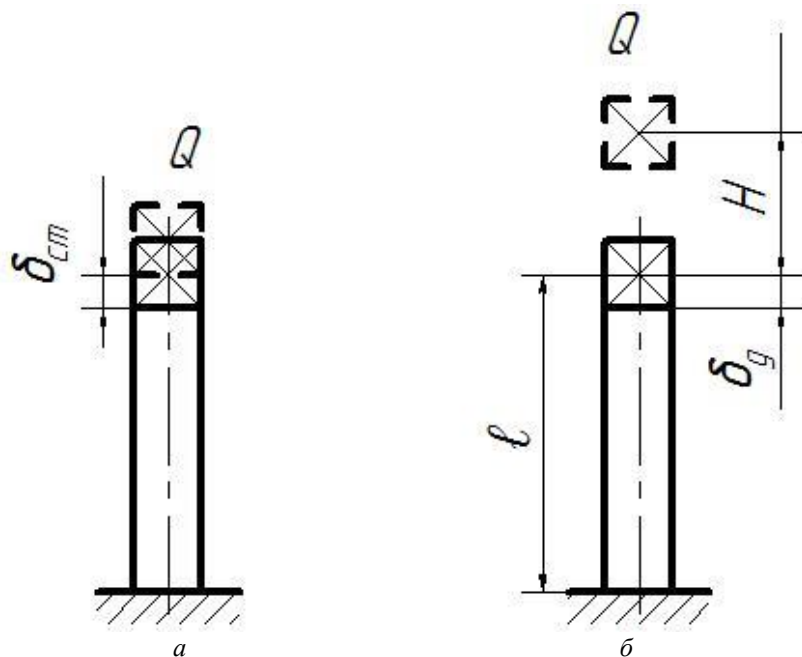


Рисунок 3.2 – Пример соударения вертикально расположенного стержня и груза:

a – статическое приложение нагрузки; b – динамическое приложение нагрузки

Чтобы использовать формулу, нужно определить коэффициент динамичности. При этом будем исходить из общепринятого в теории удара допущения, что связь между усилиями и деформациями сохраняется одной и той же как при статической, так и при динамической нагрузках.

Изменение кинетической энергии падающего груза численно равно работе, совершенной им при падении и деформировании стержня:

$$T = Q \cdot (H + \delta_d), \quad (3.7)$$

где H – высота падения груза, м.

Потенциальную энергию деформации упругого тела при ударе, накопленную за счет уменьшения потенциальной энергии падающего тела, можно представить формулой:

$$U_{\text{дин}} = \frac{1}{2} P_{\text{дин}} \cdot \delta_{\text{дин}} = \frac{C\delta_{\text{дин}}^2}{2}. \quad (3.8)$$

Пользуясь законом сохранения энергии и пренебрегая потерями энергии, вызываемыми местными пластическими деформациями при соударении тел, а также инерцией массы ударяемого стержня, можно записать:

$$T = U_{\text{дин}}, \text{ тогда } \frac{C\delta_{\text{дин}}^2}{2} = Q(H + \delta_d).$$

Имея в виду, что $\delta_{\text{ст}} = \frac{Q}{c}$, уравнение можно представить так:

$$\delta_{\text{дин}}^2 - 2 \delta_{\text{ст}} \delta_{\text{дин}} - 2 \delta_{\text{ст}} \cdot H = 0.$$

Отсюда можно определить динамическую деформацию:

$$\delta_{\text{дин}} = \delta_{\text{ст}} \pm \sqrt{\delta_{\text{ст}}^2 + 2H\delta_{\text{ст}}}.$$

Поскольку знак «-» в этой формуле не соответствует физической стороне рассматриваемой задачи, следует сохранить знак «+».

Вынося из-под корня и затем за скобки значение $\delta_{ст}$, находим выражение для коэффициента динамичности:

$$\delta_{дин} = \delta_{ст} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}\right),$$

а значит

$$k_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}. \quad (3.9)$$

Если $H = 0$, т. е. сила прикладывается внезапно, при падении с нулевой высоты, то, согласно выражению, (минимальный) коэффициент динамичности при ударе равен двум ($k_{дин} = 2$).

Имея в виду, что $H = \frac{v^2}{2g}$ (v – скорость падающего груза в начале удара), коэффициент динамичности можно представить формулой:

$$k_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{ст}}}. \quad (3.10)$$

Усилие при ударе:

$$P_{дин} = P_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}\right).$$

Изложенная приближенная теория расчета на удар имеет определенные пределы применения. Они обусловлены скоростью падающего груза к моменту удара и жесткостью конструкции, что выражается в формулах отношением $\frac{2H}{\delta_{ст}}$.

Так, если $\frac{2H}{\delta_{ст}} < 100$, то ошибка расчета не превышает 10 %. Учет массы ударяемой конструкции расширяет пределы применения приближенной теории. Из анализа формул видно, что при равномерно распределенных напряжениях, одинаковых во

всех сечениях стержня, величина динамических напряжений зависит не только от площади F его поперечного сечения, как это имеет место в случае действия статической нагрузки в статически определимых системах, но и от длины ℓ и модуля упругости E материала стержня. Можно сказать, что динамические напряжения в стержне при ударе зависят как от объема, так и от качества его материала. При этом чем больше объем упругого стержня, подвергающегося удару (чем больше «энергоемкость» стержня), тем меньше динамические напряжения, а чем больше модуль упругости материала стержня, тем динамические напряжения больше.

Если ударяемое тело имеет массу, которой нельзя пренебречь, и она распределена по длине элемента, то формула коэффициента динамичности имеет вид:

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}(1 + \alpha \cdot \beta)}}, \quad (3.11)$$

где β – коэффициент, зависящий от соотношения масс ударяемого тела и груза, $\beta = \frac{m_{\text{элемент}}}{m_{\text{груза}}}$;

α – коэффициент, учитывающий форму ударяемого элемента, т. е. распределение его массы.

Например, для стержня постоянного по длине сечения (рисунок 3.2) – $\alpha = \frac{1}{3}$.

Для стержня переменного сечения по длине (рисунок 3.3):

$$\alpha = \frac{F_1}{F_1 + F_2 + \sqrt{F_1 \cdot F_2}}.$$

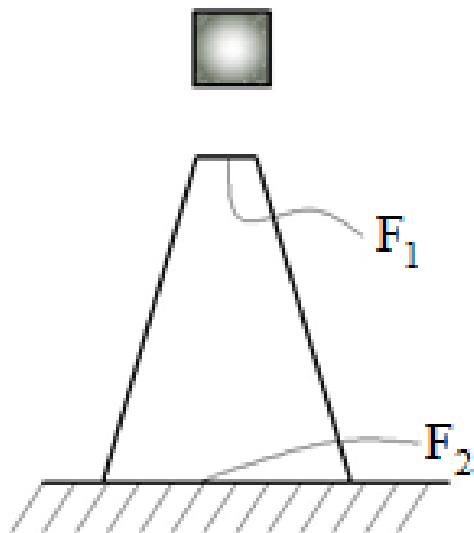


Рисунок 3.3 – Стержень переменного сечения

Для консольной балки (рисунок 3.4)

$$\alpha = \frac{2 + 4\eta - \eta^2 - 6\eta^3 + 3\eta^4}{105\eta^2(1 - \eta)^2}.$$

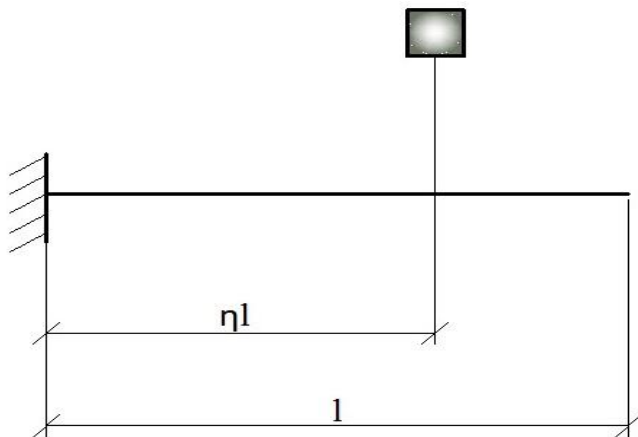


Рисунок 3.4 – Консольная балка

Для балки на двух опорах (рисунок 3.5)

$$\alpha = \frac{105 - 105\eta + 35\eta^2 - 2\eta^3}{140\eta^2}.$$

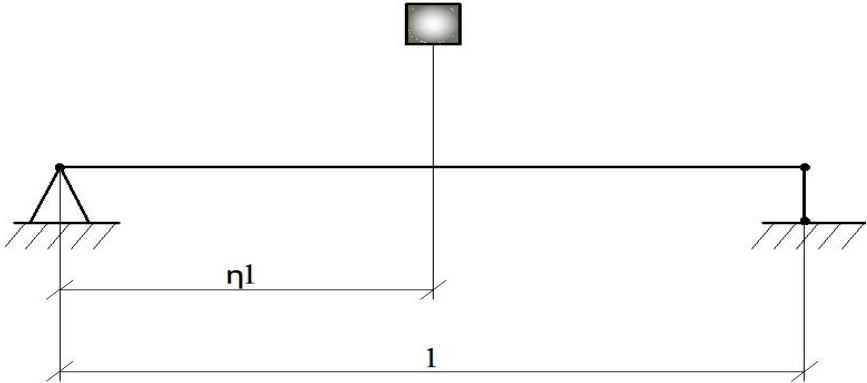


Рисунок 3.5 – Балка на двух опорах

До сих пор предполагалось, что стержни, подвергаемые действию удара, по всей длине имеют одинаковые сечения. Именно для таких стержней справедливо все сказанное о роли объема стержня при оценке динамических напряжений.

Картина оказывается несколько иной в стержнях, отдельные участки которых имеют различную площадь поперечного сечения. В этом случае (рисунок 3.6, а) наибольшее номинальное напряжение в стержне (без учета концентрации) будет в месте наименьшей площади (F_2 в месте выточки). Зависит оно, как известно, от деформативности всего стержня, а не только его ослабленной части.

Понизить динамические напряжения в этом случае можно двумя путями: 1) увеличением поперечного сечения в месте выточки (рисунок 3.6, б); 2) уменьшением площади поперечного сечения утолщенной части стержня (рисунок 3.6, в) и, следовательно, повышением податливости всего стержня в целом, что приводит к снижению максимальных динамиче-

ских напряжений в месте выточки. Если изготовить весь стержень постоянного диаметра, равного диаметру выточки (d_2), то при этом существенно увеличится деформативность стержня, а поэтому уменьшится динамическое напряжение. Таким образом, снижение напряжений при ударе может быть достигнуто увеличением объема путем уничтожения выточки, т. е. выравниванием напряжений по различным сечениям, или уменьшением объема материала за счет уменьшения площади утолщенной части, что приводит к увеличению деформативности.

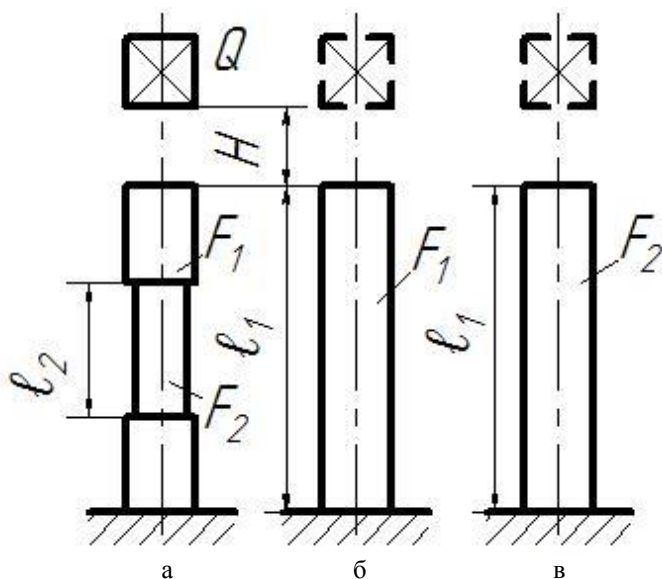


Рисунок 3.6 – Стержни с различной площадью поперечного сечения на отдельных участках:

a – стержень с выточкой; *b* – стержень с сечением, равным большей площади поперечного сечения; *в* – стержень с сечением, равным меньшей площади поперечного сечения

Результаты проведенного анализа имеют существенное практическое значение. Прежде всего, этот анализ показывает, что характер сопротивления стержней удару качественно рез-

ко отличается от сопротивления их статической нагрузке. При статическом сжатии утолщение одной части стержня не вызывает изменения напряжений в сечениях другой части; при ударе оно повышает их. Местное уменьшение площади поперечного сечения на небольшой длине стержня резко повышает напряжение.

Для снижения напряжений надо стремиться главным образом к увеличению податливости стержня путем его удлинения, добавления буферной пружины, замены материала другим, с более низким модулем упругости, выравнивания площадей поперечного сечения с целью получить все участки стержня одинаковой минимальной площади сечения. Вот почему, конструируя стержни, работающие на удар, надо добиваться постоянной площади сечения по всей их длине. Местные утолщения допустимы лишь на небольших участках длины; местные выточки небольшой протяженности крайне нежелательны. Если при таких условиях сконструировать достаточно прочный стержень не удастся, необходимо удлинить его или равномерно увеличить его площадь. Условие прочности при ударе для пластичных материалов имеет вид:

$$(\sigma_{\text{дин}})_{\text{max}} \leq [\sigma_{\text{дин}}] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{дин}}}. \quad (3.12)$$

Величина коэффициента запаса при динамических нагрузках несколько выше, чем при статическом воздействии, и равна $n_{\text{дин}} = 2$.

Расчет на удар при изгибе

Максимальные динамические напряжения при ударном изгибе могут быть определены по формуле:

$$\sigma_{\text{max дин}} = \sigma_{\text{ст max}} \cdot k_{\text{дин}},$$

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{\text{ст}}}}$$

где H – высота падения груза, м;

Q – вес падающего груза, Н;

$f_{\text{ст}}$ – статический прогиб в месте удара, зависящий от схемы нагружения и условий опирания.

В случае удара посередине балки с изгибной жесткостью EJ сечения (рисунок 3.7) получим $f_{\text{ст}} = \frac{Q\ell^3}{48EJ}$; $\sigma_{\text{ст макс}} = \frac{M}{W} = \frac{Q\ell}{4W}$, а максимальные динамические напряжения в этом случае будут:

$$\sigma_{\text{макс дин}} = \sigma_{\text{ст макс}} \cdot k_{\text{дин}} = \frac{Q\ell}{4W} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \frac{96HEJ}{Q\ell^3}} \right].$$

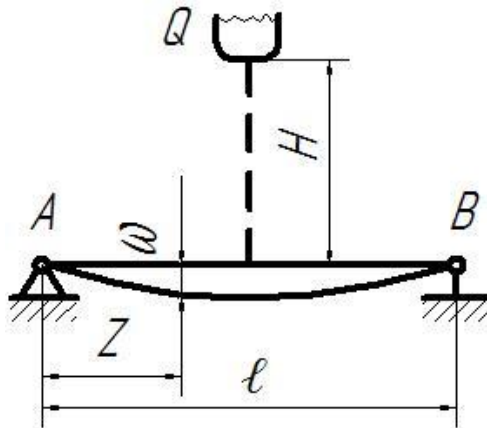


Рисунок 3.7 – Схема к расчету на удар при изгибе

3.3 Механические свойства материалов при ударе

Для проверки способности материала сопротивляться ударным нагрузкам применяют особый вид испытаний ударным изгибом – определение ударной вязкости надрезанных образцов. Эти испытания проводят на маятниковых копрах (рисунок 3.8).

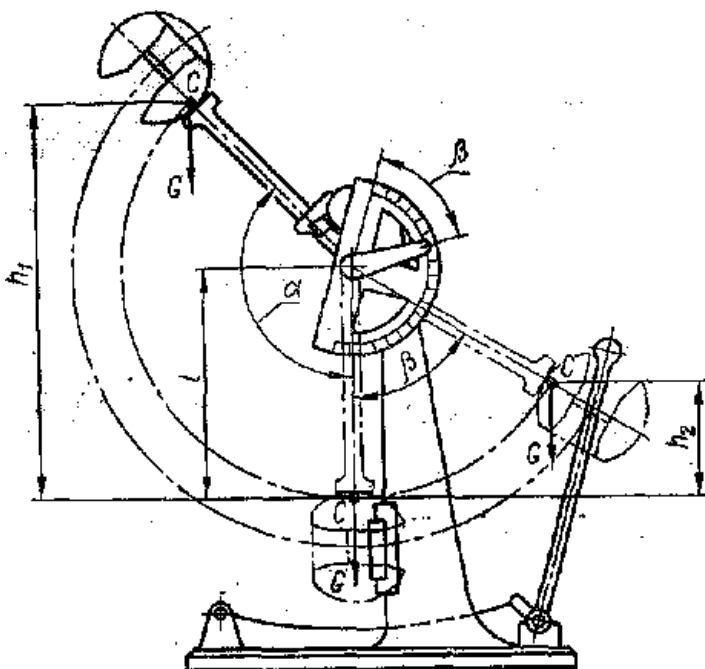


Рисунок 3.8 – Маятниковый копёр

На рисунке 3.9 показаны применяемый при испытании образец и направление удара бойка маятника. Разность высот положения маятника до и после удара позволяет вычислить работу, израсходованную на разрушение образца.

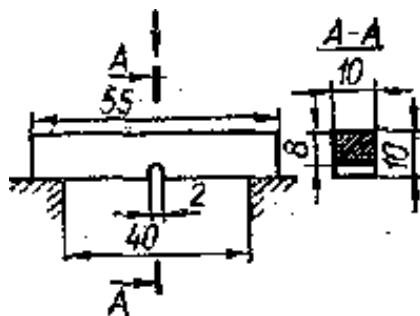


Рисунок 3.9 – Образец для испытаний с указанием направления удара маятника

Ударной вязкостью материала называется величина работы разрушения образца, отнесенная к площади его поперечного сечения в месте надреза.

Хотя данные об ударной вязкости не могут быть использованы при расчете на прочность, но они позволяют оценить особое качество металла – его склонность к хрупкости при динамических нагрузках в условиях сложного напряженного состояния в области надреза и решить вопрос о применимости того или иного материала для данных условий работы. Именно в таких условиях работают многие детали машин, имеющие отверстия, канавки для шпонок, разные входящие углы и т. п. Низкая ударная вязкость служит основанием для браковки материала. Стали, применяемые для изготовления деталей, работающих при динамических нагрузках, должны иметь ударную вязкость a_k не менее $8 - 10 \text{ кгс} \cdot \text{м}/\text{см}^2$. Ударная вязкость одной и той же стали зависит от ее структуры, причем зависимость эту при статических испытаниях обнаружить невозможно. Стали, имеющие почти одинаковые пластические свойства при статических испытаниях, могут сильно отличаться по ударной вязкости.

Контрольные вопросы

1. Что такое динамическое воздействие?
2. Выражение для определения коэффициента динамичности.
3. Условие прочности при ударе для пластичных материалов.
4. Динамическое напряжение в случае расчета на удар при изгибе.
5. Ударная вязкость материала, и что она характеризует.

4 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ

4.1 Понятие об усталостной прочности

Циклические нагрузки – это нагрузки, меняющиеся во времени.

Явление потери прочности при циклических нагрузках называется усталостью.

Усталость – процесс постепенного накопления поврежденной материала под действием переменных напряжений, приводящий к образованию трещин и разрушению.

Способность материала элемента конструкции сопротивляться усталостному разрушению, называется выносливостью или усталостной прочностью.

Предел выносливости – наибольшее напряжение цикла, при котором материал не разрушаясь может выдержать заданное число циклов, называемое базой N_6 .

– $N_6 = 10^7$ циклов – черные металлы;

– $N_6 = 10^8$ циклов – цветные металлы, легированные сплавы.

Долговечность – число циклов изменения напряжений до начала разрушения.

4.2 Характеристики циклического изменения напряжений

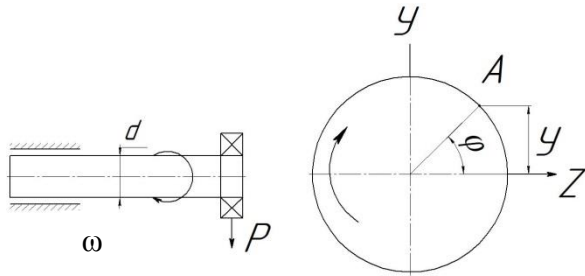
Переменные во времени напряжения в деталях машин могут быть получены самыми разными способами.

Рассмотрим, как изменяются нормальные напряжения в точке А консольного вращающегося вала (рисунок 4.1), нагруженного силой Р неизменной по величине и направлению.

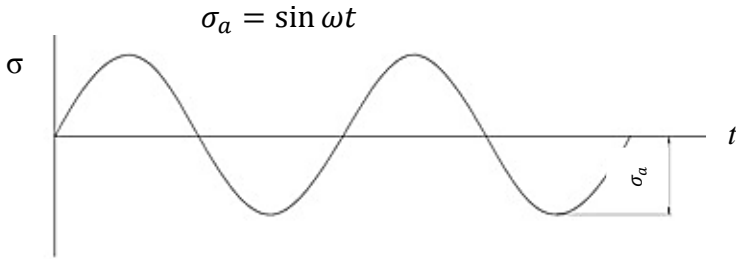
$$\sigma_A = \frac{M_z}{I_z} \cdot y, \quad (4.1)$$

$$y = \frac{d}{2} \cdot \sin \varphi = \frac{d}{2} \cdot \sin \omega t, \quad (4.2)$$

$$\sigma_A = \frac{M_z}{I_z} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin \omega t = \sigma_a \cdot \sin \omega t. \quad (4.3)$$



a



b

Рисунок 4.1 – Схема вала:

a – нагруженного силой P, b – изменение напряжения по времени

При нагружении вала дополнительной осевой силой P (рисунок 4.2) напряжение в точке A будет равно:

$$\sigma_A = \frac{P_1}{F} + \frac{M_z}{I_z} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin \omega t, \quad (4.4)$$

$$\sigma_A = \sigma_m + \sigma_a \cdot \sin \omega t. \quad (4.5)$$

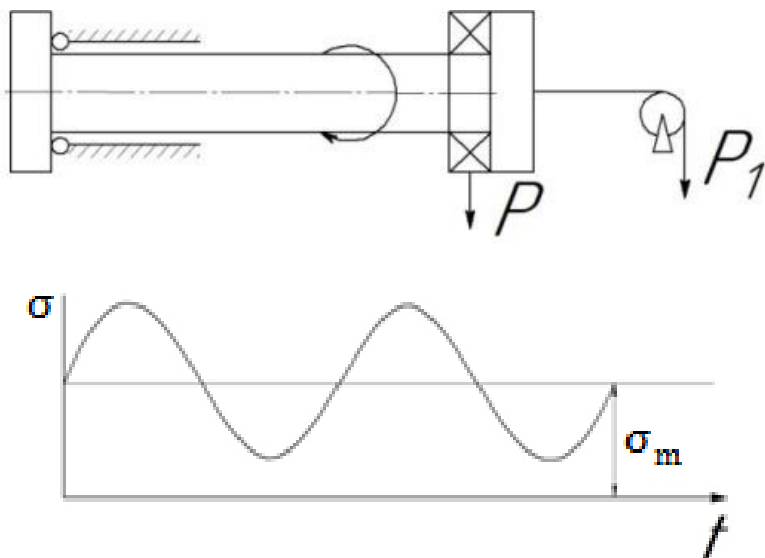


Рисунок 4.2 – Изменение напряжения при нагружении вала осевой силой

Циклическим напряжением называется совокупность всех последовательных значений напряжений за один период их изменения.

Опытами установлено, что усталостная прочность определяется только наибольшим и наименьшим напряжениями цикла и не зависит от закона изменения внутри цикла (рисунок 4.3).

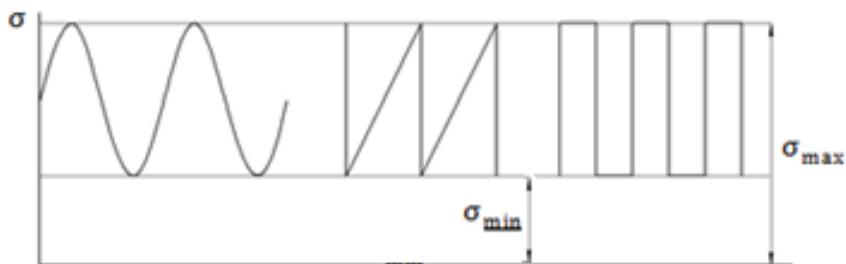


Рисунок 4.3 – Равновесные циклы

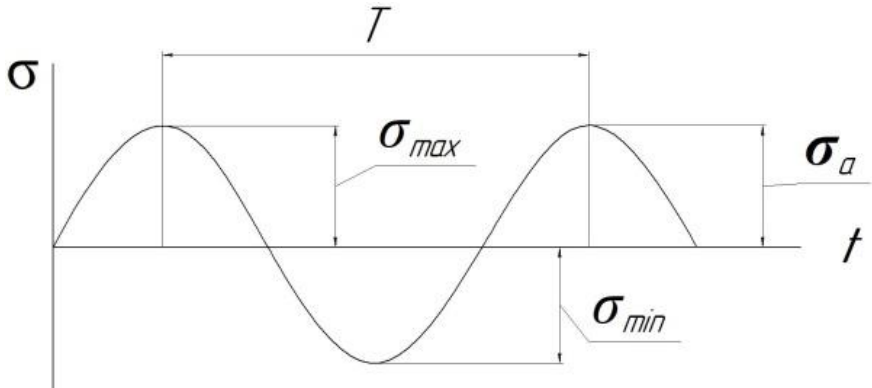
Циклы напряжений характеризуются следующими параметрами:

- амплитуда цикла – $\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$;
- постоянное или среднее напряжение цикла – $\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$;
- размах цикла – удвоенная величина амплитуды цикла;
- коэффициент асимметрии цикла (необходимо учитывать знак напряжений) – $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$;
- характеристика цикла – $\rho = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R}$.

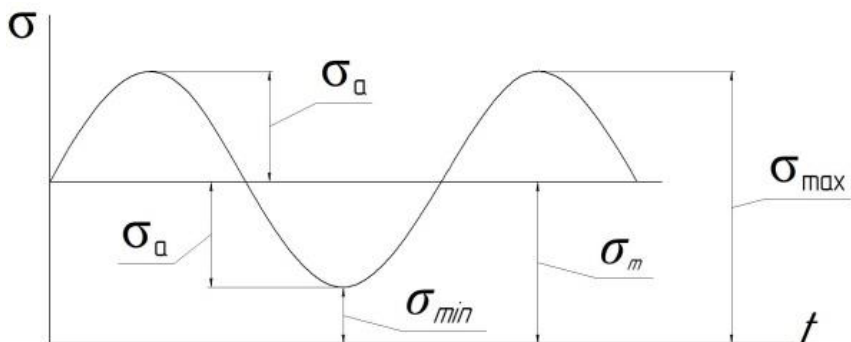
Циклы, имеющие одинаковые R , называются подобными.

Различают следующие виды циклов:

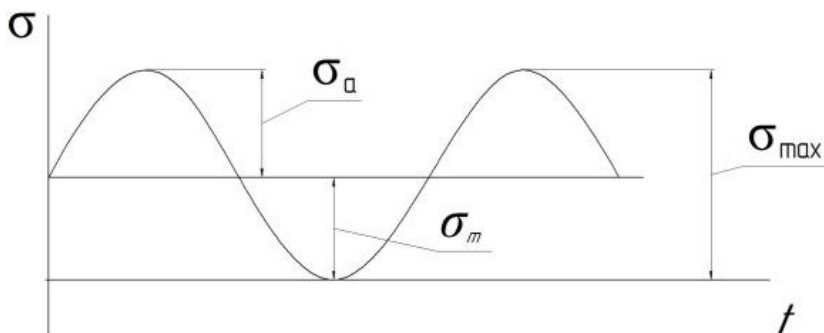
- а) симметричный цикл $\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \sigma_a$, $\sigma_m = 0$,
 $R = -1$, $\rho = \pm\infty$;



- б) асимметричный цикл $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$, $\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a$,
 $0 < R > 1$, $0 < \rho > 1$;



в) пульсирующий цикл $\sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_{max}}{2}$, $\sigma_{min} = 0$, $R = 0$, $\rho = +1$.



4.3 Механика усталостного разрушения

Усталостный процесс связан с неравномерной упругопластичной деформацией поликристаллических структур. Поэтому при изучении физической природы процесса усталостного разрушения металлы необходимо рассматривать не как сплошную, однородную среду, а как микро- или макроскопически неоднородную. Конструкционные стали и другие сплавы представляют мелкокристаллическую структуру, кристаллы которой имеют произвольную ориентировку и обладают анизотропией. При деформировании напряженные состояния

для отдельных кристаллов могут существенно отличаться. Поэтому уже на ранних стадиях деформирования возникают пластические деформации отдельных кристаллов.

Циклическое изменение напряжений приводит к накоплению пластических деформаций, что вызывает упрочнение (наклеп) кристаллов. При определенном уровне напряжения способность кристаллов к дальнейшему упрочнению исчерпывается. Нарушается их прочность, образуется микротрещина по одной из плоскостей скольжения. По достижении накопления повреждений критического значения возникает макротрещина и процесс дальнейшего циклического разрушения определяется ее развитием. Окончательное хрупкое разрушение произойдет тогда, когда трещина достигнет критической величины.

Трещина вызывает уже в упругой стадии резкую неравномерность: переход от линейного к плоскому и объемному напряженному состоянию. У дна трещины возникает объемное напряженное состояние (рисунок 4.4).

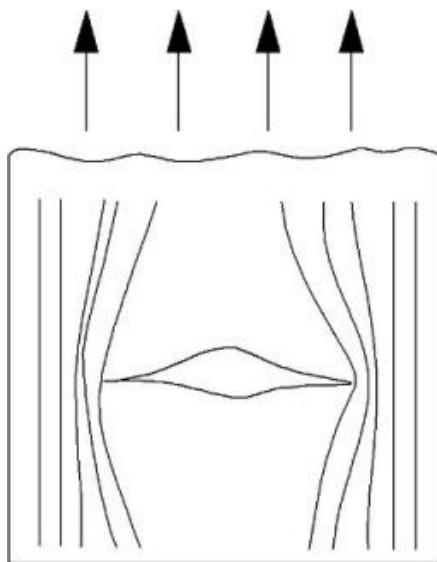


Рисунок 4.4 – Развитие трещины при циклическом изменении напряжений

Силовой поток, перерезанный трещиной как бы обтекает ее и вызывает концентрацию напряжений на ее концах. Образование трещины связано с касательными (τ), а ее развитие с нормальными (σ) напряжениями.

Трещины усталости располагаются, как правило, по направлениям, перпендикулярным к наибольшим нормальным напряжениям (рисунок 4.5).

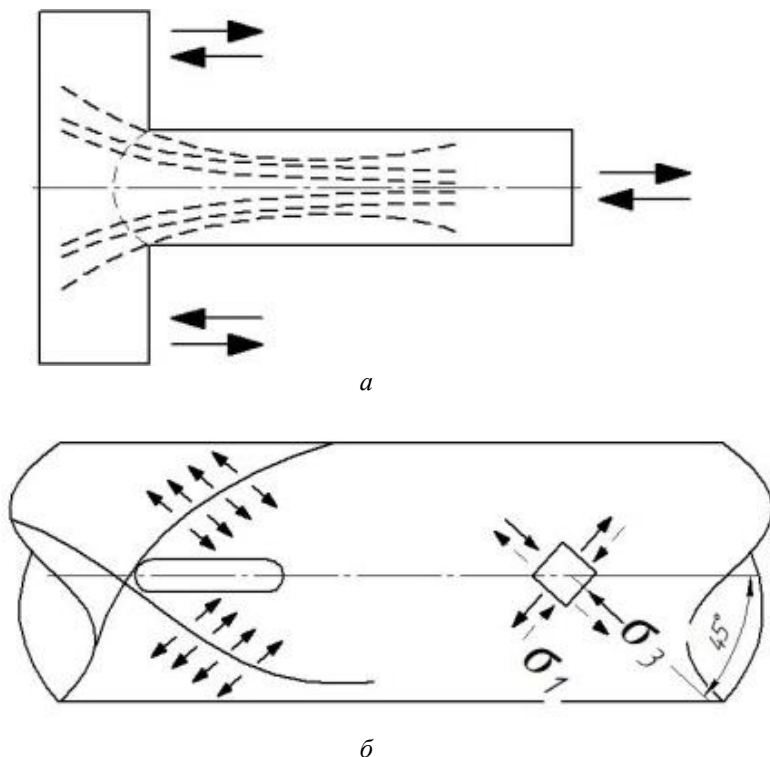


Рисунок 4.5 – Усталостное разрушение:

a – болта; *б* – шейки коленчатого вала

Прорастание усталостных трещин в поле траекторий нормальных напряжений

Представление о процессе развития трещины в зависимости от числа циклов перемены напряжений (N) дает график (рисунок 4.6).

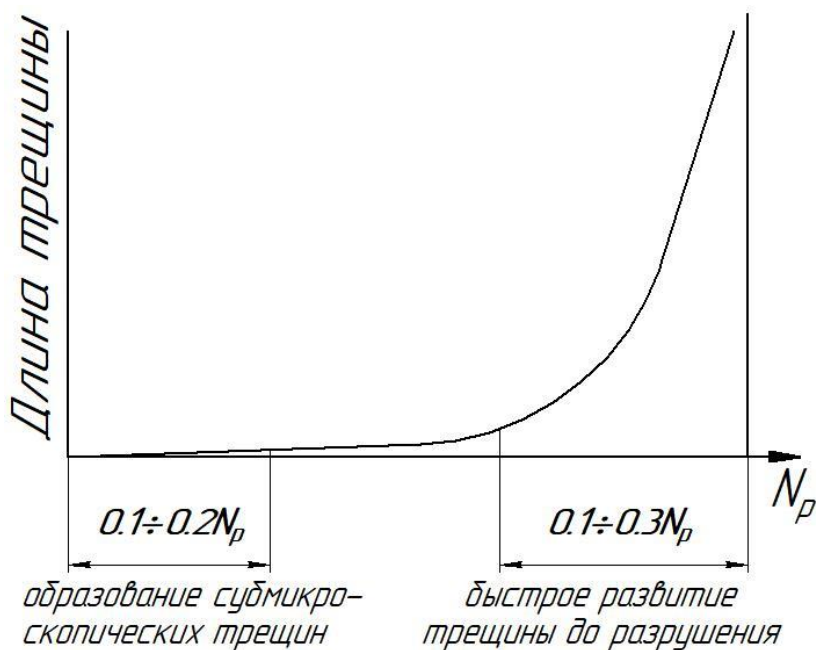


Рисунок 4.6 – График зависимости длины трещины от числа циклов перемены напряжений

Макроскопическая поверхность усталостного излома имеет две основные зоны: I – зона, образовавшаяся от циклического распространения трещины и имеющая мелкозернистый сглаженный характер; II – зона, возникшая при быстро протекающем окончательном разрушении – «долоте», имеющая крупнозернистый характер хрупкого излома.

Форма и соотношение площадей, занятых усталостной трещиной и окончательным изломом, зависит от формы сече-

ния элемента, способа его циклического нагружения, наличия концентрации напряжений, а также от влияния среды.

Обнаружение трещин в производственных условиях

Деталь погружается на некоторое время в горячее масло, затем промывается ацетоном и покрывается слоем сухого мела или талька. Масло, проникшее в трещину, обнаруживает ее в виде темной полосы на белой поверхности.

Известен магнитный контроль. Деталь покрывается тонким слоем масла со взвешенными в нем железными опилками и помещается в магнитное поле. Опилки концентрируются в зоне трещины. Кроме того, известны акустический и ультразвуковой способы.

На практике также применяют следующие методы:

- магнитный;
- флуоресцентный;
- травления детали кислотой;
- смачивания поверхности детали керосином с последующей меловой обмазкой;
- гидравлический;
- пневматический;
- нагрева детали;
- проверки электрической прочности детали.

Выбор того или иного метода дефектов обусловливается конфигурацией и материалом детали, а также вероятным расположением дефекта.

4.4 Кривая усталости. Предел выносливости

Опыты показывают, что усталостная трещина возникает только в том случае, если циклические напряжения превышают определенную границу – предел выносливости.

Пределом выносливости называется наибольшее напряжение цикла, при котором материал не разрушается, выдержав заданное число циклов напряжения (N_G), называемое ба-

зой. Обозначается σ_R, τ_R . Это основная механическая характеристика выносливости материала. Определяется только экспериментально при симметричном цикле, как наиболее опасном для материала (имеет самое низкое значение). Для испытаний используют машины, в которых образец круглого сечения нагружается или как консоль – силой на конце, или как шарнирно опертая балка – симметрично расположенными равными силами. При каждом обороте образца будут возникать напряжения растяжения и сжатия.

Испытания ведут в такой последовательности. Берут 8–10 образцов диаметром 7–10 мм с полированной поверхностью. Первый образец нагружают до значений σ_1 . Выдержав N_1 циклов, он разрушается. По координатам σ_1 и N_1 на диаграмме зависимости « $\sigma-N$ » (рисунок 4.7) наносится точка 1. Затем испытывают второй образец при меньшем напряжении σ_2 . Естественно, что он разрушается после большего числа циклов N_2 . Получают точку 2 на диаграмме.

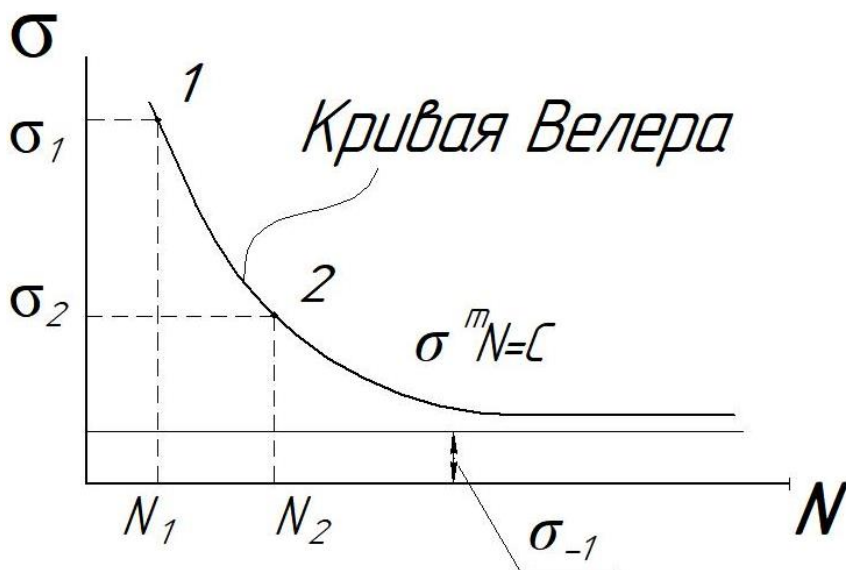


Рисунок 4.7 – Диаграмма зависимости « $\sigma-N$ »

Наконец, для какого-то из образцов мы не получим излома даже при очень большом числе циклов. Это напряжение будет близким к σ_R . Кривая характерна тем, что, начиная с некоторого напряжения, идет практически горизонтально.

Как показывает опыт, образец из углеродистой стали, выдержав 10^7 циклов, может выдержать их неограниченное число. Поэтому N равное 10^7 ($N = 10^7$) есть база испытаний. Для аналитического описания зависимости σ от N чаще всего применяют выражение степенного типа:

$$\sigma^m \cdot N = C, \quad (4.6)$$

где m – число измерений;

C – постоянная величина.

Параметры m и C различны для левой и правой части. Нередко кривую строят в логарифмических координатах (рисунок 4.8). В итоге получаем уравнение ниспадающей ветви:

$$m \cdot \log \sigma + \log N = C. \quad (4.7)$$

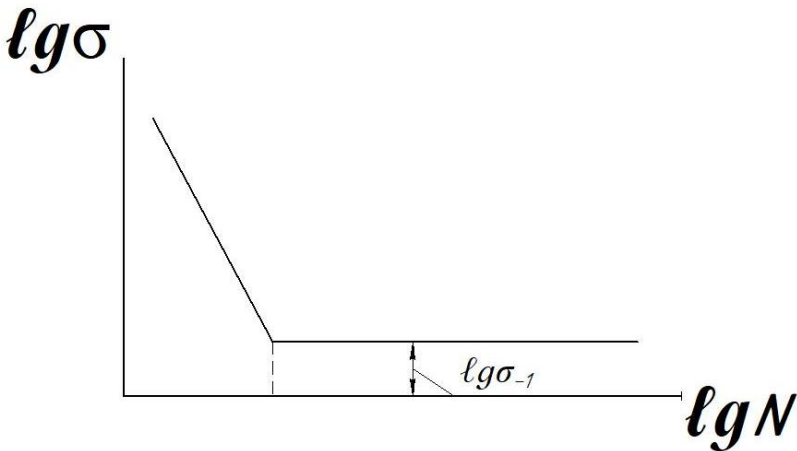


Рисунок 4.8 – Диаграмма зависимости « σ – N » в логарифмических координатах

4.5 Практические меры борьбы с усталостью металла

1. Применение более однородных металлов с мелкозернистой структурой.

2. Придание детали таких очертаний, при которых была бы исключена концентрация напряжений (рисунок 4.9).

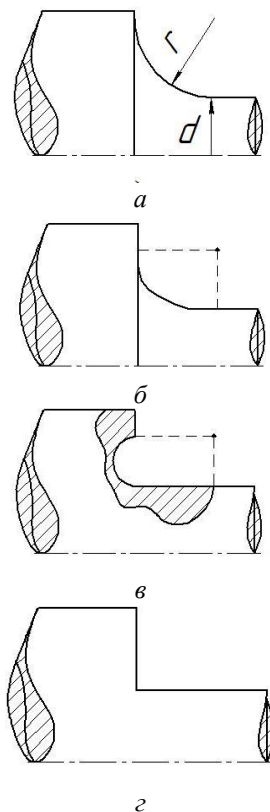


Рисунок 4.9 – Варианты очертаний деталей:

a – галтель кругового профиля; *б* – галтель эллиптического профиля;

в – галтель эллиптического профиля с поднутрением;

г – переход под прямым углом

Изменение кривизны галтели приводит к уменьшению K_σ (K_T) на 15–20 %.

При наличии деталей, установленных напрессовкой, концентрация напряжений зависит от жесткости около мест сопряжения и величины натяга.

Например, при выполнении кольцевой канавки (рисунок 4.10) вокруг места посадки детали с натягом, K_σ снижается в 1,5 раза.

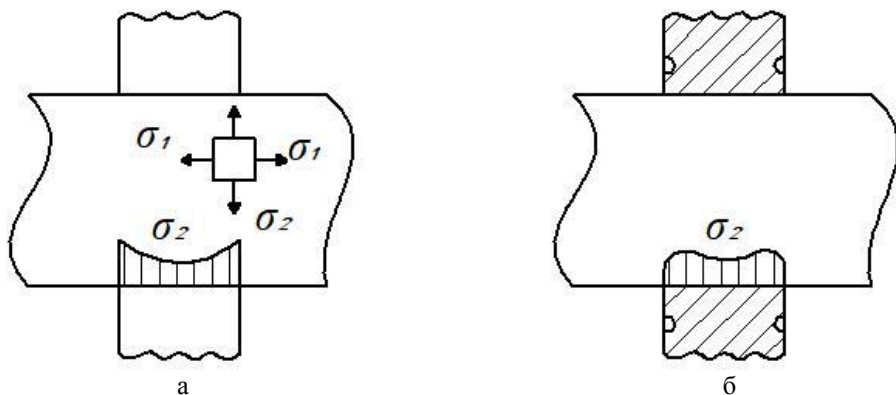


Рисунок 4.10 – Пример изменения концентрации напряжений в напрессованных деталях:

а – без дополнительных элементов; *б* – разгрузка зоны концентрации напряжений с помощью выполнения кольцевой канавки

Ослабление концентрации напряжений около поперечных круговых отверстий при растяжении происходит при удалении материала и понижении жесткости зон около них (рисунок 4.11, *а*).

Аналогичный эффект достигается введением в зоны концентрации напряжений материала с более низким модулем упругости. Запрессовка медного кольца в стальную пластину приводит к уменьшению касательных напряжений в 1,5 раза, $\alpha_\sigma = 3$ (рисунок 4.11, *б*).

3. Тщательная обработка поверхности детали, вплоть до полировки.

4. Применение специальных технологических методов, повышающих предел выносливости: цементирование, азотирование, наклепка роликами, обдувка дробью и т. д.

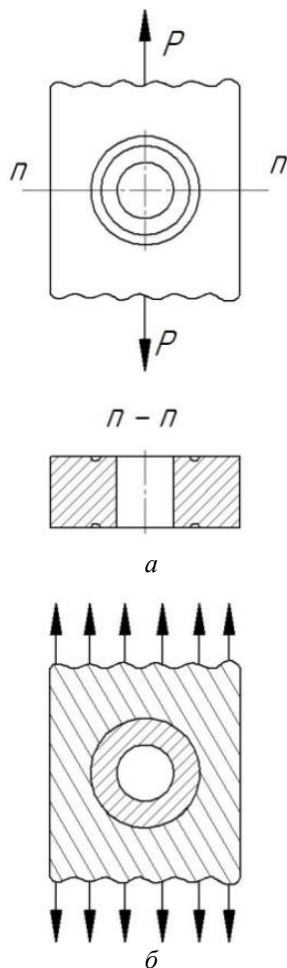


Рисунок 4.11 – Пример сечений круговых отверстий, в которых выполнено ослабление концентраций напряжений:

a – удалением материала; b – введением в зоны концентрации напряжений материала с более низким модулем упругости

Чем лучше металл, чем выше его предел прочности (σ_B), тем более тщательной обработки он требует.

Контрольные вопросы

1. Дать понятие циклическим нагрузкам, усталости, пределу выносливости.
2. Циклические напряжения.
3. Параметры, характеризующие циклы напряжений.
4. Определение критической величины трещины.
5. Практические меры борьбы с усталостью металла.

5 РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

В технике широко применяются элементы конструкции, которые с точки зрения их расчета на прочность могут быть отнесены к оболочкам (цистерны, цилиндры и гильзы двигателей, воздушные и газовые баллоны, купола в зданиях).

Оболочкой называется тело, одно из измерений которого (толщина) значительно меньше двух других.

К тонкостенным относят оболочки толщиной стенок меньше одной двадцатой наименьшего радиуса ($\frac{\delta}{R} \leq \frac{1}{20}$).

Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной.

В сопротивлении материалов рассматривают расчет оболочек, срединная поверхность которых является поверхностью вращения, а нагрузка симметрична относительно оси оболочки. Для упрощения расчетов тонкостенных симметричных сосудов полагают, что нормальные напряжения по толщине оболочки распределены равномерно и, следовательно, изгиб оболочки отсутствует. Элемент, выделенный из оболочки, находится в условиях двухосного напряженного состояния.

5.1 Напряжения в симметричных оболочках по безмоментной теории

Двумя парами меридиальных и нормальных конических сечений выделим из оболочки (рисунок 5.1) элемент ($dS_1 \cdot dS_2$) (рисунок 5.2). По граням элемента действуют напряжения: σ_m – продольное (меридиональное) и σ_t – поперечное (широтное, окружное). Касательные напряжения на этих гранях отсутствуют в силу симметрии оболочки и нагрузки.

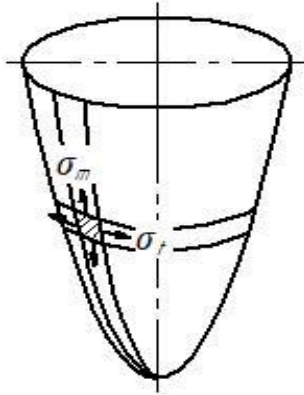


Рисунок 5.1 – Рассматриваемая оболочка

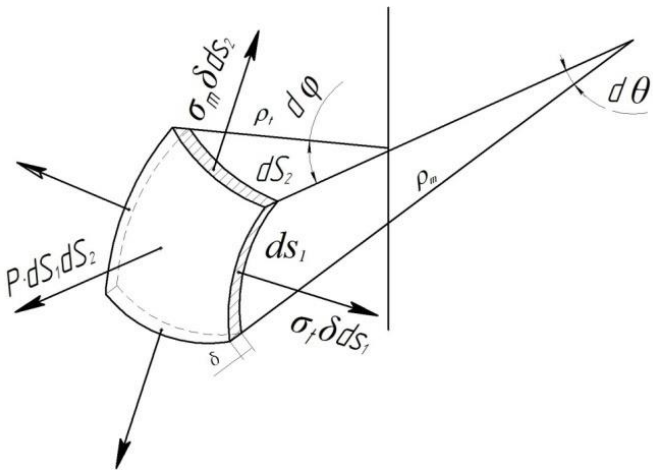


Рисунок 5.2 – Вырезанный элемент

В сечениях выделенного элемента действуют погонные усилия:

$$\sigma_m \cdot \delta \cdot dS_2 \text{ и } \sigma_t \cdot \delta \cdot dS_1.$$

К внутренней стенке элемента приложена нагрузка в виде давления, перпендикулярного к поверхности элемента (рисунок 5.3).

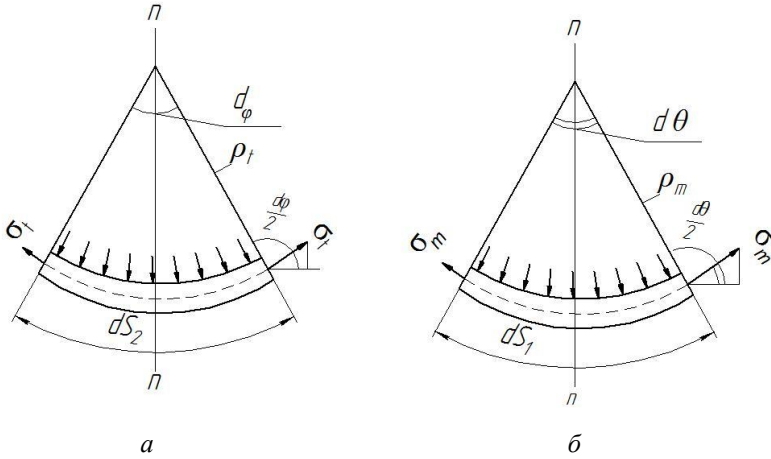


Рисунок 5.3 – Схема распределения нагрузки по стенкам элемента:
a – поперечное сечение; *б* – продольное сечение

Проектируя все силы на нормаль к поверхности элемента, получим:

$$p \cdot dS_1 \cdot dS_2 - 2\sigma_t \cdot \delta \cdot dS_1 \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - 2\sigma_m \cdot \delta \cdot dS_2 \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0. \quad (5.1)$$

Вследствие малости углов $d\varphi$ и $d\theta$ имеем:

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2} = \frac{dS_2}{2\rho_t} \quad \text{и} \quad \sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2} = \frac{dS_1}{2\rho_m}.$$

Подставляем полученные выражения в уравнение (5.1):

$$p \cdot dS_1 \cdot dS_2 - \sigma_t \cdot \delta \cdot dS_1 \cdot \frac{dS_2}{\rho_t} - \sigma_m \cdot \delta \cdot dS_2 \cdot \frac{dS_1}{\rho_m} = 0,$$

или

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) носит название уравнения Лапласа.

Для определения двух неизвестных необходимо еще одно уравнение – равновесия зоны (уравнение зоны).

Для оболочки можно составить еще одно уравнение равновесия для определения σ_m (в тех случаях, когда $\rho_t \neq \infty$). Напишем уравнение равновесия всех сил, действующих на часть оболочки, отсеченной коническим нормальным сечением (рисунок 5.4). Вертикально вниз действует сила давления (равная $p \cdot \pi \cdot r^2$), вес жидкости ($Q_{\text{ж}}$), вес части резервуара ($Q_{\text{р}}$).

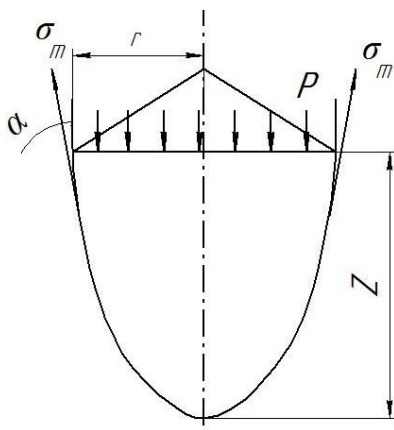


Рисунок 5.4 – Оболочка, отсеченная коническим нормальным сечением

Тогда условие равновесия имеет вид:

$$\sigma_m \cdot 2\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \cos \alpha - p \cdot \pi \cdot r^2 - Q_{\text{ж}} - Q_{\text{р}} = 0.$$

Откуда получаем уравнение равновесия зоны (или уравнение зоны):

$$\sigma_m = \frac{p \cdot r}{2\delta \cdot \cos \alpha} + \frac{Q_{ж} + Q_p}{2\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \cos \alpha}. \quad (5.3)$$

Так как напряженное состояние является двухосным, для расчета на прочность необходимо использовать одну из теорий прочности.

Примеры определения напряжений в тонкостенных сосудах

1. Сферический сосуд под действием внутреннего давления p (рисунок 5.5).

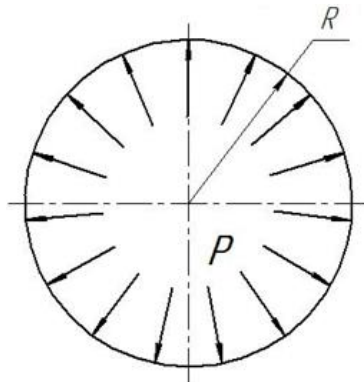


Рисунок 5.5 – Сферический сосуд под действием внутреннего давления p

По условию полной симметрии: $\sigma_t = \sigma_m = \sigma$, $\rho_t = \rho_m = R$. Подставляем данные условия в выражение (5.2) получим:

$$\frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} = \frac{p}{\delta},$$

$$\frac{2\sigma}{R} = \frac{p}{\delta},$$

$$\sigma = \frac{p \cdot R}{2\delta}, \text{ или } \sigma = \frac{p \cdot D}{4\delta}.$$

Условие прочности по III и IV теориям прочности приводятся к виду:

$$\sigma = \sigma_r = \sigma_m = \sigma_t = \sigma_{\text{Э III}} = \sigma_{\text{Э IV}} = \frac{p \cdot D}{4\delta} \leq [\sigma]. \quad (5.4)$$

2. Цилиндрический сосуд, находящийся под действием внутреннего давления (рисунок 5.6).

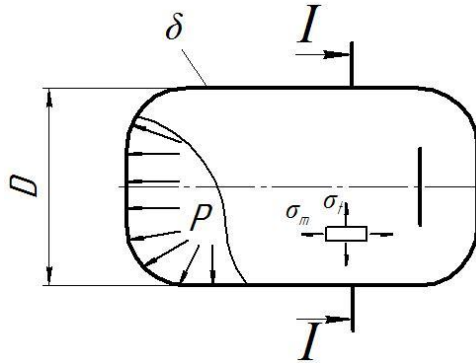


Рисунок 5.6 – Цилиндрический сосуд, находящийся под действием внутреннего давления

Согласно условиям $\rho_t = R$, $\rho_m = \infty$. После подстановки в выражение (5.2) получим уравнения для напряжения в продольном направлении:

$$\frac{\sigma_t}{R} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{\delta} \text{ или } \sigma_t = \frac{p \cdot R}{\delta} \text{ или } \sigma_t = \frac{p \cdot D}{2\delta}.$$

Для определения σ_m (рисунок 5.7) составим условие равновесия части сосуда в виде суммы проекций сил на ось сосуда. Получим уравнения для определения напряжений в поперечном направлении:

$$p \cdot \pi \cdot R^2 = \sigma_m \cdot 2\pi \cdot R \cdot \delta, \text{ или } \sigma_m = \frac{p \cdot R}{2\delta}, \text{ или } \sigma_m = \frac{p \cdot D}{4\delta}.$$

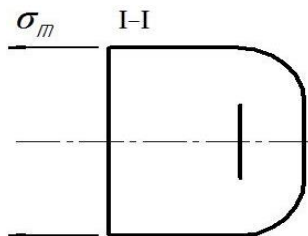


Рисунок 5.7 – Сечение цилиндрического сосуда плоскостью I-I

Напряжения в продольных сечениях цилиндрического сосуда вдвое больше, чем напряжения в поперечных сечениях. При одинаковых диаметрах и давлении напряжения в цилиндрическом сосуде вдвое больше, чем в сферическом.

В рассмотренных примерах имеем двухосное напряженное состояние ($\sigma_1 = \sigma_t$, $\sigma_2 = \sigma_m$, $\sigma_3 = 0$).

Условие прочности имеет вид:

– по III теории прочности $\sigma_{\text{ЭIII}} = \frac{p \cdot D}{2\delta} \leq [\sigma_p]$;

– по IV теории прочности $\sigma_{\text{ЭIV}} = \frac{\sqrt{3} p \cdot D}{4 \delta} \leq [\sigma_p]$.

5.2 Распорные кольца в оболочках

Если сопряжение отдельных частей резервуара осуществляется плавно, то меридиональные напряжения σ_m будут одинаковыми для обеих частей. Если же в месте перехода от одной формы оболочки к другой имеется перелом, то меридиональные напряжения в этом месте для обеих частей оболочки различны (рисунок 5.8).

Вертикальная составляющая усилия в крышке – $\sigma_m \cdot \delta \cdot \cos \alpha$ уравнивается усилием в цилиндрической части сосуда – $\sigma'_m \cdot \delta$. Горизонтальная составляющая усилия остается не уравновешенной и вызывает изгиб оболочки. Для предотвращения изгиба оболочки ставятся кольца жесткости.

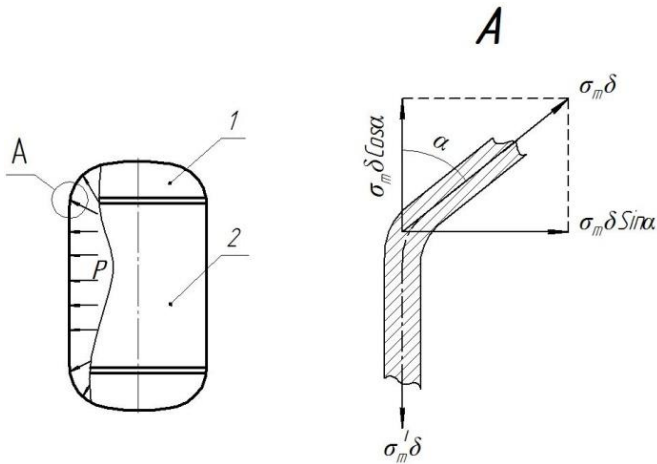


Рисунок 5.8 – Резервуар с указанием усилий в месте сопряжения отдельных частей:

1 – крышка; 2 – цилиндрическая часть

Кольцо жесткости оказывается нагруженным равномерно распределенной радиальной нагрузкой (рисунок 5.9):

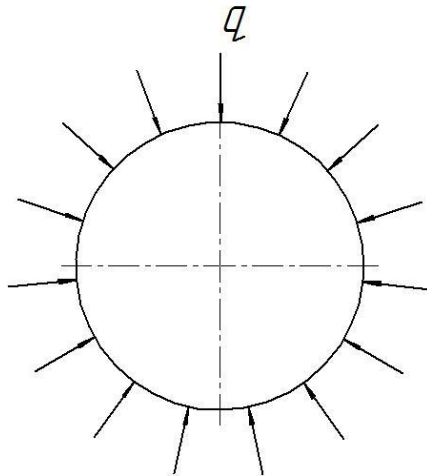


Рисунок 5.9 – Распределение нагрузки по кольцу жесткости

$$q = \sigma_m \cdot \delta \cdot \sin \alpha, \quad (5.5)$$

где q – равномерно распределенная радиальная нагрузка, кг/см.

В поперечных сечениях кольца возникает продольная сила N (рисунок 5.10).

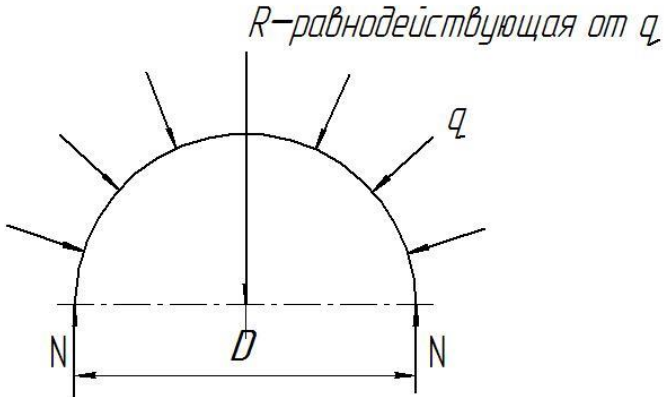


Рисунок 5.10 – Продольная сила, возникающая в поперечном сечении кольца

Если равнодействующая распределенной радиальной нагрузки:

$$R = q \cdot D, \quad (5.6)$$

то продольная сила:

$$N = \frac{R}{2} = \frac{q \cdot D}{2}. \quad (5.7)$$

или

$$N = \frac{D}{2} \cdot \sigma_m \cdot \delta \cdot \sin \alpha. \quad (5.8)$$

Условие прочности в данном случае имеет вид:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{D}{2F} \cdot \sigma_m \cdot \delta \cdot \sin \alpha \leq [\sigma], \quad (5.9)$$

где F – площадь поперечного сечения кольца, м^2 .

Выражение (5.9) представляет собой проверочный расчет.

При проектировочном расчете может быть найдена площадь поперечного сечения кольца:

$$F \geq \frac{D \cdot \sigma_m \cdot \delta \cdot \sin \alpha}{2[\sigma]}, \quad (5.10)$$

но согласно выражению (5.4)

$$\sigma_m = \frac{p \cdot D}{4\delta},$$

тогда

$$F \geq \frac{p \cdot D^2 \cdot \sin \alpha}{8[\sigma]}.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется оболочкой?
2. Уравнение равновесия зоны.
3. Определение напряжений в тонкостенных сосудах.
4. Для чего необходимы кольца жесткости?
5. Условие прочности при рассмотрении колец жесткости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии изложены теоретические основы расчета силовых факторов, возникающих в сечении стержня при различных видах его нагружения.

В процессе эксплуатации сооружений и машин их элементы, в той или иной мере участвующие в работе конструкции и подвергающиеся действию различных нагрузок, должны обеспечивать нормальную работу конструкции, удовлетворять необходимым условиям прочности, жесткости и устойчивости. При этом подбираются элементы конструкции, имеющие наиболее рациональные размеры и форму.

Знание основ расчета по определению внутренних силовых факторов и перемещений при косом изгибе, внецентренном сжатии или растяжении, совместном действии изгиба и кручения, проверки сжатых стержней на устойчивость и выносливость, на прочность при динамических и циклически изменяющихся во времени напряжениях необходимы для реализации практических навыков в области технических средств в агропромышленном комплексе.

Будущие специалисты смогут участвовать в проектировании машин и конструкций с целью обеспечения их прочности, долговечности и безопасности, а также надежности и износостойкости узлов и деталей машин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абгарян, К. А. Динамика ракет [Текст] / К. А. Абгарян, И. М. Рапопорт. – М. : Машиностроение, 1969. – 378 с.
2. Абрамович, С. Ф. Динамическая прочность судового оборудования [Текст] / С. Ф. Абрамович, Ю. С. Крючков. – Л. : Судостроение, 1967. – 512 с.
3. Авдонин, А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций [Текст] / А. С. Авдонин. – М. : Машиностроение, 1969. – 402 с.
4. Александров, А. В. Соппротивление материалов [Текст] / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М. : Высшая школа, 1995. – 560 с.
5. Ананьев, И. В. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование [Текст] / И. В. Ананьев, П. Г. Тимофеев. – М. : Машиностроение, 1965. – 526 с.
6. Ананьев, И. В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем [Текст] / И. В. Ананьев. – М. : Гостехиздат, 1946. – 223 с.
7. Арсенин, В. Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции [Текст] / В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1966. – 368 с.
8. Бабаков, И. М. Теория колебаний [Текст] / И. М. Бабаков. – 3-е изд. – М. : Наука, 1968. – 560 с.
9. Балабух, Л. И. Строительная механика ракет [Текст] / Л. И. Балабух, Н. А. Алфутов, В. И. Усюкин. – М. : Высшая школа, 1984. – 391 с.
10. Бельский, З. А. Конструкция летательных аппаратов [Текст] / З. А. Бельский, И. П. Власов, В. Н. Зайцев; под ред. С. Н. Кана. – М. : Оборонгиз, 1963. – 709 с.
11. Беляев, Н. М. Соппротивление материалов [Текст] / Н. М. Беляев. – М. : Наука, 1976. – 608 с.

12. Биргер, И. А. Прочность. Устойчивость. Колебания. В 3 т. Т. 3 [Текст] / И. А. Биргер, Я. Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1968. – 567 с.

13. Бредихин, Б. А. Сопротивление материалов [Текст] / Б. А. Бредихин. – 2-е изд., испр. и доп. – Краснодар : КубГАУ, 2006. – 206 с.

14. Булгаков, Б. В. Колебания [Текст] / Б. В. Булгаков. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. – 890 с.

15. Бычков, Д. В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций [Текст] / Д. В. Бычков. – М. : Госстройиздат, 1962. – 475 с.

16. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В. З. Власов, П. Н. Леонтьев. – М. : Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. – 490 с.

17. Гевондян, Т. А. Приборы для измерения и регистрации колебаний [Текст] / Т. А. Гевондян, Л. Т. Киселев. – М. : Машгиз, 1962. – 467 с.

18. Дарков, А. В. Сопротивление материалов [Текст] / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 4-е изд., перераб. – М. : Высшая школа, 1975. – 654 с.

19. Дробот, В. А. Сопротивление материалов [Текст] / В. А. Дробот, А. Д. Гумбаров, Ф. В. Кремьянский, А. С. Брусенцов. – Краснодар : КубГАУ, 2017. – 180 с.

20. Дробот, В. А. Инженерные расчеты элементов конструкций средств АПК [Текст] / В. А. Дробот, А. Д. Гумбаров, Ф. В. Кремьянский, А. С. Брусенцов, В. В. Ванжа. – Краснодар : КубГАУ, 2019. – 90 с.

21. Дробот, В. А. Сопротивление материалов [Текст] / В. А. Дробот, А. Д. Гумбаров, Ф. В. Кремьянский, А. С. Брусенцов, В. В. Ванжа. – Краснодар : КубГАУ, 2020. – 173 с.

22. Дробот, В. А. Сопротивление материалов. Простые виды нагружения [Текст] / В. А. Дробот, А. С. Брусенцов. – Краснодар : КубГАУ, 2021. – 93 с.

23. Кочетов, В. Т. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособие / В. Т. Кочетов, А. Д. Павленко, М. В. Кочетов. – 3-е изд., перераб. и доп. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 544 с.

24. Кремьянский, Ф. В. Примеры расчетных работ по сопротивлению материалов [Текст] / Ф. В. Кремьянский, В. А. Дробот. – Краснодар : КубГАУ, 2014. – 42 с.

25. Кремьянский, Ф. В. Расчет на прочность элементов конструкций при простом и сложном сопротивлении [Текст] / Ф. В. Кремьянский, В. А. Дробот. – Краснодар : КубГАУ, 2016. – 42 с.

26. Маделунг, Э. Математический аппарат физики [Текст] / Э. Маделунг. – М. : Физматгиз, 1961. – 620 с.

27. Пановко, Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем [Текст] / Я. Г. Пановко. – М. : Физматгиз, 1960. – 193 с.

28. Пархиловский, И. Г. Автомобильные рессоры [Текст] / И. Г. Пархиловский. – М. : Машиностроение, 1978. – 232 с.

29. Писаренко, Г. С. Колебание упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале [Текст] : монография / Г. С. Писаренко. – Киев : Наукова думка, 1970. – 380 с.

30. Серенсен, С. В. Динамика машин для испытаний на усталость [Текст] / С. В. Серенсен. – М. : Машиностроение, 1967. – 460 с.

31. Снитко, Н. К. Строительная механика [Текст] / Н. К. Снитко. – 3-е изд., перераб. – М. : Высшая школа, 1980. – 431 с.

32. Сопротивление материалов [Текст] / Г. С. Писаренко, В. А. Агаев, А. Л. Квитка [и др.]. – 5-е изд, перераб. и доп. – Киев : Вища школа, 1986. – 775 с.

33. Сорокин, Е. С. К вопросу неупругого сопротивления строительных материалов при колебаниях [Текст] / Е. С. Сорокин // Научное сообщение ЦНИПС. – М. : Госстройиздат, 1954. – Вып. 15. – С. 76.

34. Теории подобия и размерностей. Моделирование [Текст] / П. М. Алабужев, В. Б. Геронимус, Л. М. Минкевич, Б. А. Шеховцов. – М. : Высшая школа, 1968. – 208 с.

35. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 514 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.....	4
1.1 Общие положения.....	4
1.2 Расчет балки, подверженной косому или пространственному изгибу.....	8
1.3 Определение внутренних усилий при косом изгибе.....	9
1.4 Определение напряжений при косом изгибе.....	10
1.5 Определение перемещений при косом изгибе.....	18
1.6 Внецентренное сжатие или растяжение.....	20
1.7 Ядро сечения при внецентренном сжатии.....	27
1.8 Совместное действие изгиба с кручением.....	31
1.9 Пример расчета вала при сложном сопротивлении.....	35
2 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.....	42
2.1 Общие положения.....	42
2.2 Основное условие устойчивости.....	48
3 ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ.....	56
3.1 Ускоренное движение.....	56
3.2 Расчет на удар.....	58
3.3 Механические свойства материалов при ударе....	68
4 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ.....	71
4.1 Понятие об усталостной прочности.....	71
4.2 Характеристики циклического изменения напряжений.....	71
4.3 Механика усталостного разрушения.....	75
4.4 Кривая усталости. Предел выносливости.....	79

4.5 Практические меры борьбы с усталостью металла.....	82
5 РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК.....	86
5.1 Напряжения в симметричных оболочках по безмоментной теории.....	86
5.2 Распорные кольца в оболочках.....	92
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	96
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	97

Учебное издание

Дробот Виктор Александрович,
Брусенцов Анатолий Сергеевич

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ.
СЛОЖНЫЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ**

Учебное пособие

В авторской редакции

Макет обложки – Н. П. Лиханская

Подписано в печать 00.00.2022. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Усл. печ. л. – 6,0. Уч.-изд. л. – 4,7.

Тираж 500 экз. Заказ № – 100 экз.

Типография Кубанского государственного
аграрного университета.

350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13