

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный  
аграрный университет имени И. Т. Трубилина»

В. А. Дробот, А. С. Брусенцов

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Краснодар  
КубГАУ  
2022

**УДК 621.7.014.2(075.8)**

**ББК 30.121**

**Д75**

**Дробот В. А.**

**Д75**     **Прикладная механика** : учеб. пособие / В. А. Дробот, А. С. Брусенцов. – Краснодар : КубГАУ, 2022. – 180 с.

В учебном пособии изложены теоретические основы, а также практические указания по выполнению расчетно-проектировочных работ. Приводятся методика определения внутренних усилий и построения эпюр различных силовых факторов, определения положения опасных сечений, а также подбора сечений из условия прочности.

Предназначено для обучающихся по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

**УДК 621.7.014.2(075.8)**

**ББК 30.121**

© Дробот В. А.,  
Брусенцов А. С., 2022  
© ФГБОУ ВО «Кубанский  
государственный аграрный  
университет имени  
И. Т. Трубилина», 2022

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит все важные темы курса сопротивления материалов. В пособии рассматриваются основные понятия курса, сжатие и растяжение материалов, работа деформации, критерии прочности и предельных напряженных состояний материалов, касательные напряжения, расчет на прочность, теория напряженного состояния, основные законы упругих свойств материалов, жесткость и прочность при кручении, сдвиги и изгибы, температурные напряжения, расчет конструкций по предельной нагрузке и т. д. Изложены теоретические основы, а также практические указания по выполнению расчетно-проектировочных работ. Приводятся методика определения внутренних усилий и построения эпюр различных силовых факторов, определения положения опасных сечений, а также подбора сечений из условия прочности.

Издание предназначено для преподавателей, аспирантов, студентов-бакалавров, магистрантов, обучающихся по агроинженерным специальностям.

# ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ

## 1.1 Основные принципы и гипотезы науки о сопротивлении материалов

Сопротивление материалов представляет собой один из разделов механики твердого деформируемого тела.

Сопротивление материалов – это наука о принципах и методах расчёта частей машин и сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Под прочностью элемента конструкции понимают его способность воспринимать внешние нагрузки в процессе эксплуатации не разрушаясь. Расчет на прочность преследует цель подобрать наименьшие поперечные размеры элементов конструкций, исключая возможность разрушения под действием заданных нагрузок.

Под жёсткостью элемента конструкции понимают его способность сохранять свои размеры и, следовательно, форму в процессе эксплуатации. Расчет на жесткость связан с определением деформаций конструкций.

Под устойчивостью элемента конструкции понимают его способность сохранять под действием эксплуатационных нагрузок свою первоначальную форму равновесия.

В отличие от других разделов механики твердого деформируемого тела (теории упругости и пластичности) сопротивление материалов стремится решать свои задачи наиболее простыми и доступными в инженерной практике методами, используя различные приближенные методы, упрощающие гипотезы, пригодность которых проверена экспериментально.

Исследование реальных элементов конструкций начинается с расчетной схемы, выбор которой заключается в устранении второстепенных факторов, незначительно влияющих на работу конструкции, схематизации рассматриваемого объекта.

С геометрической стороны это приводит к тому, что основным объектом расчёта в сопротивлении материалов явля-

ется стержень (брус) (рисунок 1.1 а). Это тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной.

Чаще других в сопротивлении материалов рассматриваются призматические стержни с прямолинейной осью, реже – стержни с переменным сечением и стержни с криволинейной осью.

Стержни, образованные путем последовательного поворота сечений вокруг оси называются естественно закрученными (примером служит сверло).

Осью стержня называется линия, проходящая через центры тяжести всех последовательно проведенных поперечных сечений.

Сечение стержня плоскостью, перпендикулярной его оси, называют поперечным сечением.

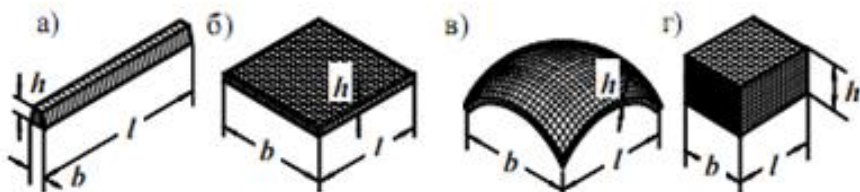


Рисунок 1.1 – Расчетные объекты

Стержни, у которых толщина стенки значительно меньше габаритных размеров поперечного сечения, называются тонкостенными.

Пластинка представляет собой тело, один из размеров которого (толщина) значительно меньше двух других (длины и ширины) (рисунок 1.1 б).

Искривленная пластинка, т. е. тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями с расстоянием между ними, значительно меньшим других размеров, называется оболочкой (рисунок 1.1 в).

Массив – тела, у которых все три размера одинакового порядка.

В сопротивлении материалов применяются следующие основные принципы:

1. Принцип сохранения начальных размеров (принцип отвердевания). Согласно этому принципу форма тела под действием внешних сил меняется несущественно. Это позволяет при составлении уравнений равновесия исходить из начальных размеров тела. Принцип отвердевания не применим при наличии в теле больших перемещений.

2. Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции). В соответствии с этим принципом действие некоторой совокупности сил эквивалентно сумме независимых действий этих сил. Этот принцип позволяет рассматривать действие каждой силы независимо, т. е. предполагая остальные силы отсутствующими. Условием применения принципа независимости действия сил является предположение о том, что деформации в теле малы по сравнению с его размерами.

3. Принцип Сен-Венана. Согласно этому принципу в точках тела, достаточно удаленных от места приложения внешних нагрузок, напряжения мало зависят от способа приложения нагрузок. Этот принцип позволяет отвлекаться от конкретного способа приложения внешних нагрузок и реакций опор.

Для облегчения решения вопросов инженерной практики в сопротивлении материалов прибегают к схематизации свойств материалов и пользуются рядом допущений:

1. Материалы предполагаются идеально упругими.

Это означает, что после снятия внешних нагрузок тело восстанавливает исходные размеры и, следовательно, форму.

Из этой гипотезы следует независимость окончательной деформации тела от порядка приложения внешних нагрузок.

2. Материалы считаются изотропными.

Согласно этой гипотезе в данной точке тела материал обладает одинаковыми свойствами по всем направлениям.

3. Материалы являются однородными.

Принятие этой гипотезы означает, что свойства материала считаются одинаковыми во всех точках тела.

4. Материал тела предполагается сплошным.

Эта гипотеза предлагает рассматривать материал тела как непрерывную среду до деформации, а также в процессе деформации и после неё. Следствием принятия этой гипотезы является непрерывность функций координат, описывающих перемещение точек тела.

## **1.2 Внешние и внутренние силы**

Внешние силы обусловлены взаимодействием тела с другими телами. Они подразделяются на поверхностные и объёмные.

Объёмные силы (вес тела, силы инерции) приложены ко всем точкам тела и, следовательно, распределены непрерывно по его объёму.

Поверхностные силы (опорные реакции, тросовые подвески, распределённые нагрузки) приложены к поверхности тела.

Распределёнными нагрузками являются приложенные непрерывно на протяжении некоторой площади или длины. Величина распределённой нагрузки, приходящаяся на единицу площади или длины, называется интенсивностью распределённой нагрузки.

Сосредоточенной называется сила, распределённая по весьма малой площади тела и ее принято считать приложенной в точке.

Различают нагрузки статические и динамические.

Статические нагрузки нарастают очень медленно от нуля до своего конечного значения и затем остаются постоянными.

К динамическим относятся ударные и повторно-переменные нагрузки. Последние при условии, что частота их изменения соизмерима с частотой собственных колебаний тела (конструкции).

Внутренними силами называют силы упругого взаимодействия одной части тела с другой, обусловленные действием внешних сил. Постоянные взаимодействия между частицами тела в расчет не принимаются.

Внутренние силы сопротивляются стремлению внешних сил отделить одну часть тела от другой или изменить форму тела.

Для определения внутренних сил применяют метод сечений. Суть этого метода состоит в следующем. Изучаемый стержень мысленно рассекают плоскостью на две части. Далее рассматривают равновесие одной из частей (любой) под действием внешних сил, приложенных к этой части, и внутренних сил взаимодействия с отброшенной частью (рисунок 1.2). Это позволяет определить равнодействующую внутренних сил и их интенсивность.

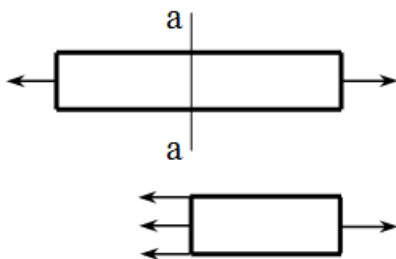


Рисунок 1.2 – Метод сечений

Равнодействующую внутренних сил называют усилием, а величину внутренней силы, приходящуюся на единицу площади сечения – напряжением в данной точке сечения.

В зависимости от характера системы внешних сил, приложенных к стержню, возможны следующие случаи деформации стержня:

1. Внешние силы приводятся к силе, направленной по оси стержня (рисунок 1.3). В этом случае стержень испытывает растяжение или сжатие.



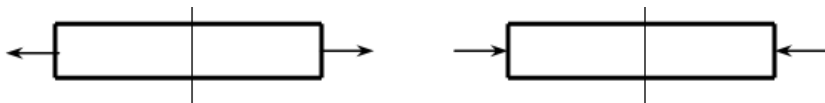


Рисунок 1.3 – Деформация растяжения или сжатия

2. Внешние силы приводятся к паре сил, действующей в плоскости, перпендикулярной оси стержня (рисунок 1.4). Внутренние силы в этом случае приводятся тоже к паре, действующей в плоскости, перпендикулярной оси стержня. Стержень под действием этих двух пар испытывает кручение.

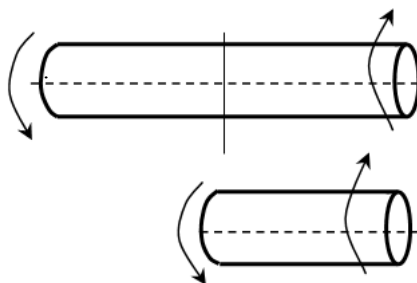


Рисунок 1.4 – Деформация кручения

3. Внешние силы приводятся к паре сил, действующей в плоскости, в которой лежит ось стержня (рисунок 1.5).

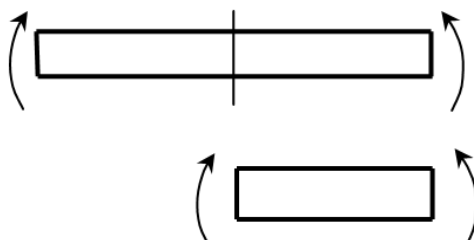


Рисунок 1.5 – Деформация изгиб

Внутренние силы в этом случае приводятся тоже к паре, действующей в той же плоскости. Стержень под действием этих двух пар подвергается изгибу.

### 1.3 Понятие о напряжениях и деформациях

Пусть в окрестности некоторой точки  $O$  сечения стержня выделена элементарная площадка  $\Delta F$  (рисунок 1.6).

Пусть величина внутренней силы, действующей по площадке, равна  $\Delta P$ .

Тогда  $\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = p$  – полное напряжение в точке  $O$ .

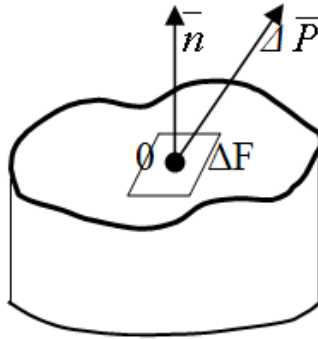


Рисунок 1.6 – Рассматриваемое сечение

Полное напряжение можно разложить на две компоненты (рисунок 1.7).

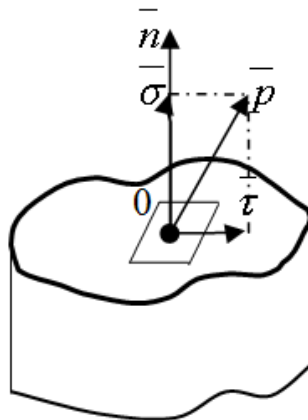


Рисунок 1.7 – Проекции полного напряжения

Проекция полного напряжения  $\bar{p}$  на нормаль  $\bar{n}$  к сечению  $\sigma = p \cos(\bar{p}, \bar{n})$  называется нормальным напряжением.

Проекция полного напряжения  $\bar{p}$  на плоскость площадки  $\tau = p \sin(\bar{p}, \bar{n})$  называется касательным напряжением.

Между полным напряжением и его компонентами существует очевидная связь:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (1.1)$$

Напряжения  $\tau$  и  $\sigma$  впредь будем считать скалярными величинами, так как их направления заведомо известны.

Внешние силы, приложенные к телу, вызывают изменения его геометрической формы (деформации).

Перемещения точек тела вдоль прямых линий называются линейными деформациями. Если в теле до деформации расстояние между двумя точками равнялось  $dx$  (рисунок 1.8а), а после деформации стало равным  $dx+du$ , то  $du$  представляет собой абсолютную линейную деформацию, а  $\varepsilon = \frac{du}{dx}$  – относительную линейную деформацию по направлению оси  $x$ .

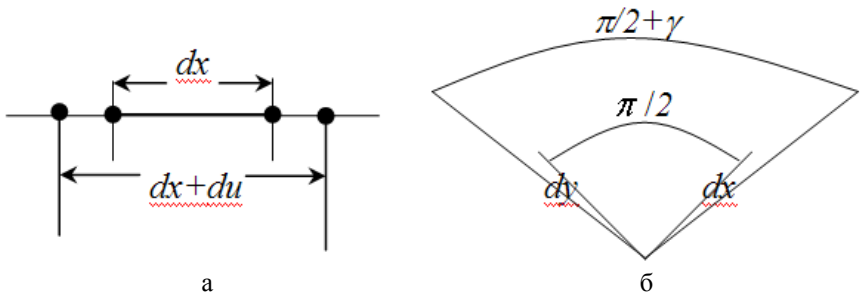


Рисунок 1.8 – Деформации тела

Повороты линий и плоскостей в теле называются угловыми деформациями. Если в теле до деформации два отрезка  $dx$

и  $dy$  располагались под углом  $\pi/2$ , (рисунок 1.8 б), а после деформации этот угол стал равным  $\pi/2 \pm \gamma$ , то величина  $\gamma$  представляет собой угловую деформацию.

В связи с малостью угловых деформаций при вычислениях полагают  $\gamma = tg \gamma$ .

Деформации, исчезающие после удаления внешних нагрузок, называются упругими, а деформации, остающиеся в теле – пластическими (остаточными).

### **Контрольные вопросы**

1. Виды деформаций.
2. Упругие деформации. Пластические деформации.
3. Внутренние силы, их определение (метод сечений).
4. Виды напряжений.

## ТЕМА 2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ. ГИБКИЕ НИТИ

### 2.1 Усилия в поперечном сечении стержня

Центральным растяжением (или центральным сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только продольная сила  $N$ , а все остальные усилия равны нулю.

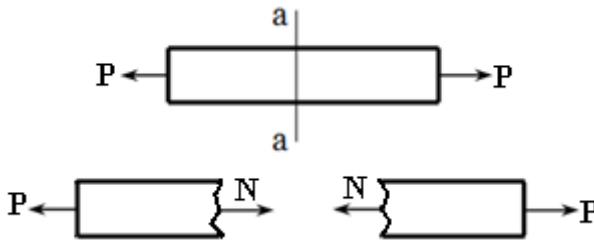


Рисунок 2.1 – Центральное растяжение стержня

Продольная сила представляет собой равнодействующую внутренних сил в поперечном сечении стержня. Она определяется из условий равновесия отсеченной части стержня и численно равна сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения.

При растяжении продольная сила направлена от сечения и считается положительной. При сжатии она направлена к сечению и считается отрицательной.

Эпюра продольных сил  $N$  представляет собой график величин этих усилий для всех поперечных сечений стержня.

### 2.2 Напряжения и деформации при растяжении (сжатии)

При растяжении-сжатии стержня с постоянными поперечными размерами в любом поперечном сечении возникают нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению и равные:

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (2.1)$$

где  $N$  – усилие в опасном сечении стержня, Н;  
 $F$  – площадь опасного сечения стержня, м<sup>2</sup>.

Относительная продольная деформация, как отмечалось выше, определяется формулой

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.2)$$

где  $l$  – первоначальная длина стержня, м;  
 $\Delta l$  – абсолютное удлинение (укорочение), м.

Под действием осевых нагрузок стержень получает также относительную поперечную деформацию

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta v}{v}, \quad (2.3)$$

где  $v$  – первоначальный поперечный размер, м;  
 $\Delta v$  – абсолютное изменение поперечного размера, м.

Абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной называется коэффициентом поперечной деформации (или коэффициентом Пуассона):

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}. \quad (2.4)$$

Коэффициент Пуассона характеризует упругие свойства материалов в поперечном направлении при растяжении или сжатии.

Коэффициент Пуассона величина безразмерная, и его значение для различных материалов заключено в пределах  $0 < \mu \leq 0,5$ .

Объемная деформация стержня характеризуется относительным изменением объема:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V}, \quad (2.5)$$

где  $V$  – первоначальный объем стержня,  $\text{м}^3$ ;  
 $\Delta V$  – конечный объем,  $\text{м}^3$ .

Объем стержня при растяжении увеличивается, при сжатии уменьшается. Когда  $\mu = 0,5$ , объем стержня при растяжении или сжатии остается неизменным.

Зависимость между напряжениями и относительными продольными деформациями выражается законом Гука:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad (2.6)$$

где  $E$  – коэффициент пропорциональности, называемый модулем продольной упругости (модуль Юнга), МПа

Модуль продольной упругости характеризует упругие свойства материалов в продольном направлении при растяжении или сжатии.

Коэффициент поперечной деформации  $\mu$ , наряду с модулем продольной упругости  $E$ , представляют собой постоянные для каждого материала величины, характеризующие его упругие свойства.

Абсолютное удлинение стержня постоянного сечения при постоянном по длине значении продольной силы определяется по формуле:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}, \quad (2.7)$$

Произведение  $E \cdot F$  называется жесткостью сечения при растяжении-сжатии.

Если стержень имеет несколько участков с различными значениями продольной силы или площади поперечного сече-

ния, то удлинение стержня определяется путем суммирования удлинений участков.

После определения удлинений соответствующих участков стержня легко найти перемещение любого сечения вдоль оси стержня.

### 2.3 Потенциальная энергия упругой деформации

Потенциальной энергией упругой деформации называется энергия, накопленная в теле вследствие его упругой деформации под действием внешних сил.

Потенциальная энергия ( $U$ , Н·м) численно равна работе внешних сил, приложенных к телу, и при статическом растяжении или сжатии и постоянных  $N$  и  $F$  по длине стержня может быть определена по формуле:

$$U = \frac{N^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot F}, \quad (2.8)$$

или

$$U = \frac{\Delta l^2 \cdot E \cdot F}{2 \cdot l}. \quad (2.9)$$

Удельной потенциальной энергией деформации ( $u$ ,  $\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3}$ ) называется потенциальная энергия, отнесенная к единице объема стержня:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E}. \quad (2.10)$$

### 2.4 Механические характеристики материалов

В инженерной практике различают два вида материалов: хрупкие, которые разрушаются при весьма малых остаточных деформациях, и пластичные, которые разрушаются после появления значительных остаточных деформациях. Однако та-



кое деление является условным. Один и тот же материал в зависимости от характера и условий нагружения, температуры и скорости деформирования может вести себя и как пластичный, и как хрупкий. Поэтому правильнее говорить о пластичном или хрупком состоянии материала.

Основные механические характеристики пластичных материалов определяются при испытаниях на растяжение стандартных образцов.

В процессе испытания мы получаем кривую зависимости между нагрузкой ( $P$ ) и абсолютным удлинением ( $\Delta l$ ), называемую машинной диаграммой растяжения образца.

Диаграмма напряжений строится на основании машинной диаграммы растяжения, отражает зависимость между напряжением ( $\sigma$ ) и относительными удлинениями ( $\varepsilon$ ) и для пластичных материалов имеет такое же очертание, но отличается масштабом.

На рисунке 2.2 изображена диаграмма напряжений для мягкой стали в координатах  $\sigma$  и  $\varepsilon$ . На диаграмме показаны характерные ординаты, называемые пределами:

– *предел пропорциональности* ( $\sigma_{ну}$ , точка А) – наибольшее напряжение, при котором еще сохраняется линейный закон Гука:

$$\sigma = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha, \text{ или } \sigma = E\varepsilon, \quad (2.11)$$

где  $E = \operatorname{tg} \alpha$  – так называемый модуль продольной упругости.

– *предел текучести* ( $\sigma_m$ , точка В) – напряжение, при котором деформации растут при почти постоянной нагрузке. Для материалов, не имеющих площадки текучести, за величину предела текучести принимают  $\sigma_{0,2}$  – напряжение, при котором остаточное относительное удлинение  $\varepsilon$  достигает 0,2 %.

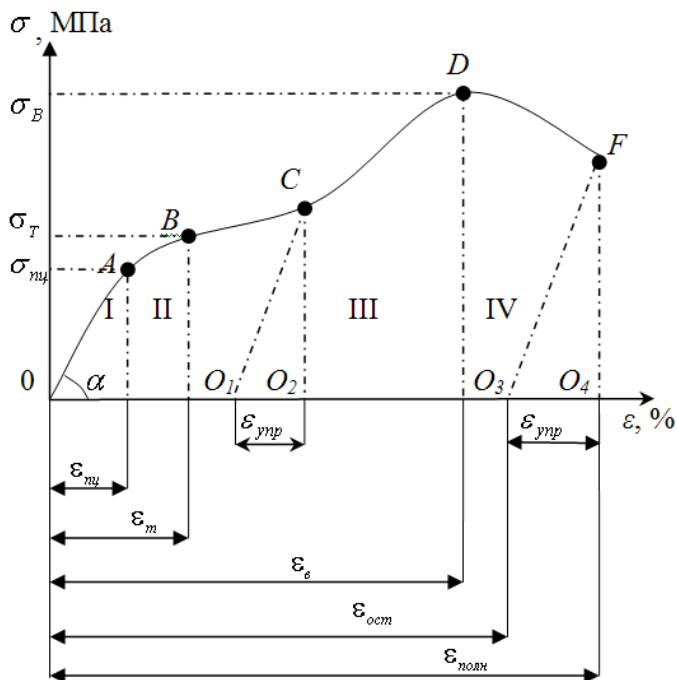


Рисунок 2.2 – Диаграмма напряжений для малоуглеродистой стали

– *предел прочности или временное сопротивление* ( $\sigma_B$ , точка D) – напряжение, вызываемое наибольшей нагрузкой на образец.

– *предел упругости* ( $\sigma_y$ ) – напряжение, при котором остаточные деформации незначительны (не более 0,001–0,03 %). Практически можно считать, что  $\sigma_y$  совпадает с  $\sigma_{ny}$  (точка A).

Кроме того, диаграмму (рисунок 2.2) можно разделить на условные зоны: I – зона пропорциональности, II – зона текучести, III – зона прочности, IV – зона местной текучести.

Диаграмма на рисунке 2.2 даёт условные напряжения, так как они вычислены как отношение нагрузки к первоначальной площади сечения образца. В связи с этим участок DF диаграммы не отражает истинного изменения напряжений.

Если построить диаграмму истинных напряжений, относя нагрузку к текущей площади сечения образца, то на участке  $DF$  истинные напряжения будут расти, за счет резкого уменьшения площади сечения образца в месте разрыва. В остальном обе диаграммы почти совпадают. Можно показать, что ординаты этих диаграмм связаны зависимостью

$$\sigma_{ист} = \sigma(1 + \varepsilon), \quad \sigma \leq \sigma_B. \quad (2.12)$$

Следует заметить, что высокие  $\sigma_{ист}$  в точке  $F$  не могут характеризовать прочность материала, так как они развиваются в процессе разрушения образца. Отсюда, логично считать напряжение  $\sigma_B$  (точка  $D$ ) пределом прочности.

На диаграмме показан закон разгрузки (линия  $CO_1$ ). При повторном нагружении диаграмма пойдет по этой же линии и предел пропорциональности повышается (*явление наклёпа*).

Таким образом, относительная продольная деформация  $\varepsilon$  состоит из упругой деформации  $\varepsilon_{упр}$ , которая исчезает после разгрузки, и пластической  $\varepsilon_{пл}$ , которая сохраняется после разгрузки (остаточная деформация). Остаточная деформация в момент разрыва  $\varepsilon_{ост}$  служит характеристикой пластичности материала.

Следует иметь в виду, что у пластичных материалов механические характеристики при растяжении и сжатии совпадают.

У хрупких же материалов сопротивление сжатию, как правило, значительно выше, чем растяжению.

Допускаемым напряжением  $[\sigma]$  для данного элемента конструкции называют наибольшее безопасное для его эксплуатации напряжение. Основанием для назначения допускаемого напряжения служат характеристики материала и требования к эксплуатации.

Так, для элементов конструкции (сооружения), изготовленных из пластических материалов и не терпящих остаточных деформаций в процессе эксплуатации, допускаемое напряжение подчиняют условию

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n}. \quad (2.13)$$

Для хрупких материалов (чугун, бетон, камни) за основание для определения допускаемых напряжений принимается предел прочности, поэтому

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n}. \quad (2.14)$$

В этих формулах  $n > 1$  – коэффициент безопасности (запаса прочности). Эта величина учитывает неточное определение эксплуатационных нагрузок, несовершенство расчетных схем, случайные отклонения в характеристиках материалов и в условиях эксплуатации.

Для многих стандартных деталей и элементов типовых конструкций и сооружений величины  $n$  нормированы на основании инженерного опыта. В иных случаях при выборе  $n$  конструктор руководствуется собственным опытом и инженерной интуицией. После выбора  $n$  и назначения  $[\sigma]$  условие прочности элемента конструкции записывают в виде  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ . Сечение элемента, в котором  $\sigma = \sigma_{\max}$  называют опасным сечением.

Условие прочности растянутого или сжатого стержня выглядит:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (2.15)$$

## 2.5 Расчет призматического стержня при растяжении (сжатии)

Для статически определимого стержня без учета его собственного веса необходимо:

- 1) определить продольные силы по участкам стержня и построить эпюру продольных сил;
- 2) определить нормальные напряжения по участкам стержня и построить эпюру нормальных напряжений;
- 3) определить деформацию стержня по участкам и построить эпюру перемещений;
- 4) определить потенциальную энергию стержня.

*Нормальная (продольная) сила  $N$*  в любом сечении равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на продольную ось балки (или касательную к оси балки).

*Нормальная (продольная) сила  $N$*  считается положительной, если она вызывает растяжение стержня.

Исходные данные:  $P = 80$  кН,  $F = 400$  см<sup>2</sup>,  $a = 2$  м,  $E = 23 \cdot 10^4$  МПа.

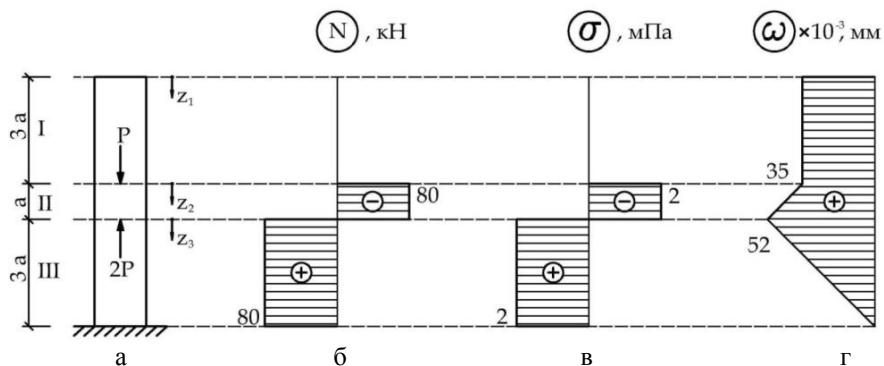


Рисунок 2.3 – Расчет статически определимого стержня:  
 а – расчетная схема; б – эпюра продольных сил;  
 в – эпюра нормальных напряжений; г – эпюра перемещений

*Определение продольных сил по участкам стержня и построение эпюр продольных сил*

Мысленно разобьем стержень на три участка, на каждом из которых определим аналитические зависимости для продольных сил и построим эпюру:

$$\begin{array}{ll} \text{I участок} & 0 \leq Z_1 \leq 3a; & N_1 = 0; \\ \text{II участок} & 0 \leq Z_2 \leq a; & N_2 = -P = -80 \text{ кН}; \\ \text{III участок} & 0 \leq Z_3 \leq 3a; & N_3 = 2P - P = 80 \text{ кН}. \end{array}$$

*Определение нормальных напряжений по участкам стержня и построение эпюр нормальных напряжений*

Найдем напряжения на участках и определим максимальное из них:

I участок

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{0}{4 \cdot 10^{-2}} = 0 \text{ МПа};$$

II участок

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = -\frac{80 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-2}} = -2 \text{ МПа};$$

III участок

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F} = \frac{80 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-2}} = 2 \text{ МПа}.$$

*Определение деформаций стержня по участкам и построение эпюр перемещений*

Найдем удлинение участков и построим эпюру перемещений:

I участок

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F} = 0 \text{ мм};$$

II участок

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F} = -\frac{8 \cdot 10^4 \cdot 2}{23 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \cdot (10^3) = -0,017 \text{ мм};$$

III участок

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 6}{23 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \cdot (10^3) = 0,052 \text{ мм};$$

Перемещение в начале соответствующих участков:

$$\omega_3 = \Delta l_3 = 0,052 \text{ мм};$$

$$\omega_2 = \omega_3 + \Delta l_2 = 0,052 - 0,017 = 0,035 \text{ мм};$$

$$\omega_1 = \omega_2 + \Delta l_1 = 0,035 + 0 = 0,035 \text{ мм}.$$

*Определение потенциальной энергии деформирования стержня*

Удельной потенциальной энергией деформации ( $U, \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3}$ ) называется потенциальная энергия, отнесенная к единице объема стержня:

Потенциальная энергия на каждом участке равна:

$$U_1 = 0;$$

$$U_2 = \frac{(-8 \cdot 10^4)^2 \cdot 2}{2 \cdot 23 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 0,7 \text{ Дж};$$

$$U_3 = \frac{(8 \cdot 10^4)^2 \cdot 6}{2 \cdot 23 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 2,09 \text{ Дж}.$$

Полная потенциальная энергия бруса будет равна:

$$\sum U_i = U = \sum \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2 \cdot E \cdot F} \quad (2.16)$$

Тогда полная энергия бруса будет равна:

$$U = 0,7 + 2,09 = 2,79 \text{ Дж.}$$

## 2.6 Расчёт гибких нитей с учётом собственного веса

Гибкими нитями обобщённо называют гибкие элементы в линиях электропередач, канатных дорогах, висячих мостах и других сооружениях. При расчёте на прочность таких элементов существенное значение имеет их собственный вес.

Рассмотрим гибкую нить (провод) постоянного сечения ( $F = \text{const}$ ), нагруженную собственным весом. Пусть концы нити подвешены на одном уровне (рисунок 2.4).

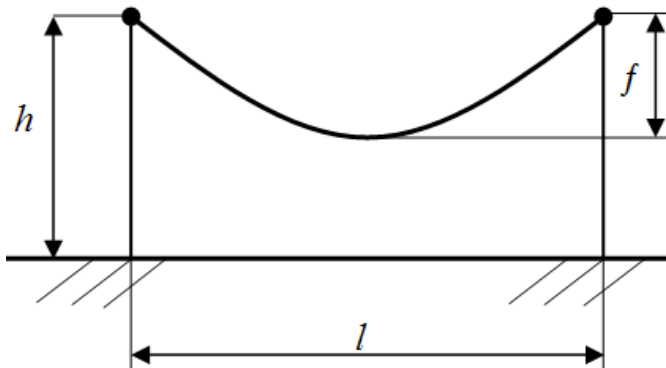


Рисунок 2.4 – Гибкая нить на примере линии электропередач

Так как провисание нити невелико по сравнению с её длиной, то целесообразно считать, что вес нити равномерно распределён по длине пролёта  $l$  интенсивностью  $q_n = \gamma F$ .

Будем считать и другие эксплуатационные нагрузки распределёнными по пролёту. Это вес льда при обледенении про-



водов и давление ветра на провод. Интенсивность ледовой и ветровой нагрузки можно вычислить по формулам:

$$q_L = \gamma_L \cdot \pi \cdot \delta \cdot (d + \delta), \quad (2.17)$$

$$q_V = p \cdot d,$$

(2.18)

где  $\delta$  – толщина стенки гололёда, м;

$\gamma_L$  – плотность льда, Н/м<sup>3</sup>;

$d$  – диаметр провода, м;

$p$  – сила давления ветра на единицу площади при обдуве тела цилиндрической формы, Па.

Сумма  $q_n + q_L$  представляет собой вертикальную нагрузку, а  $q_V$  – горизонтальную. Суммарная нагрузка  $q$  вычисляется путём геометрического сложения:

$$q = \sqrt{(q_n + q_L)^2 + q_V^2}. \quad (2.19)$$

Заметим, что в общем случае нагружения плоскость провисания нити, совпадающая с плоскостью действия  $q$ , не будет вертикальной.

Выберем начало координат в нижней точке провисания нити, а ось  $x$  направим по касательной вправо. Вырежем часть нити двумя сечениями: в начале координат и на расстоянии  $x$  от него (рисунок 2.5).

Гибкая нить способна сопротивляться только растяжению, поэтому силы действия отброшенных частей нити ( $H$  и  $T$ ) приложены к оставшейся части по касательной к кривой провисания в точке разреза.

Составим сумму моментов всех сил относительно точки приложения силы  $T$  и приравняем её нулю.

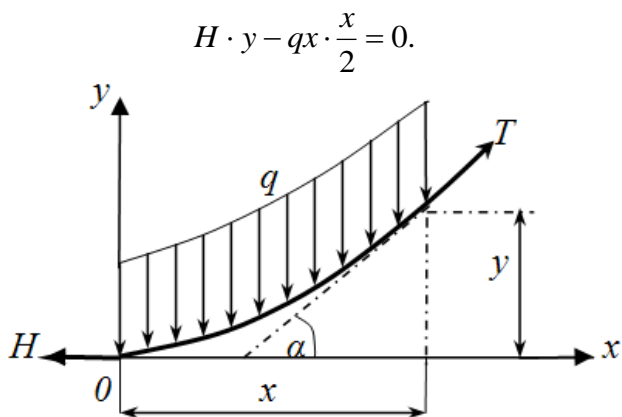


Рисунок 2.5 – Схема внутренних усилий, возникающих в нити

Отсюда следует:

$$y = \frac{qx^2}{2H}. \quad (2.20)$$

Таким образом, кривая провисания нити является параболой. Точное решение этой задачи дает цепную линию. Это расхождение обусловлено принятым выше допущением о распределении нагрузки по пролёту, а не по длине нити.

Для случая, когда обе точки подвеса находятся на одном уровне кривая провисания симметрична относительно оси  $y$ . Следовательно, стрелу провисания можно вычислить из формулы (2.20) при  $x = l/2$ :

$$f = \frac{ql^2}{8H}. \quad (2.21)$$

где  $f$  – стрела провисания, м.

Однако в проверочном расчете величина  $f$  должна быть задана и вычислению подлежит сила  $H$  – натяжение нити.

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \quad (2.22)$$

Составим сумму проекций всех сил на ось  $x$ :

$$-H + T \cos \alpha = 0.$$

Отсюда натяжение в произвольной точке нити равно:

$$T = \frac{H}{\cos \alpha}. \quad (2.23)$$

Из (2.23) следует, что  $T$  максимальна в точках подвеса. Однако при малом провисании нити угол  $\alpha$  мал и с достаточной для практики точностью можно считать  $T \approx H$ . Именно на величину  $H$  обычно ведётся расчёт прочности нити.

Следует заметить, что в точке подвеса сила  $T$  может быть найдена как геометрическая сумма натяжения  $H$  и вертикальной реакции. Для симметричной нити:

$$T_{\max} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{ql}{2}\right)^2}. \quad (2.24)$$

После подстановки  $H$  по формуле (2.22) и необходимых преобразований получим:

$$T_{\max} = H \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}}. \quad (2.25)$$

Условие прочности для гибкой нити имеет вид:

$$\sigma = \frac{H}{F} \leq [\sigma],$$

или после замены  $H$  по формуле (2.22)

$$\frac{ql^2}{8fF} \leq [\sigma].$$

По этой формуле при проектировочном расчете можно определить необходимую стрелу провисания:

$$f = \frac{ql^2}{8F[\sigma]}. \quad (2.26)$$

## 2.7 Уравнение состояния провода линии электропередачи

Провод линии электропередачи, подвешенный между опорами, является типичным примером гибкой нити. Его прочность будет обеспечена, если в наиболее тяжелом случае нагружения реальная стрела провисания удовлетворяет условию:

$$f = \frac{q \cdot l^2}{8F[\sigma]}.$$

Как отмечалось выше, эта формула применима при условии, что стрела мала по сравнению с длиной, то есть в случае, когда кривую провисания можно считать параболой.

Таким образом, длина подвешенного провода  $L$  равна длине дуги параболы  $S$  со стрелой  $f$  на пролёте  $l$  (рисунок 2.5).

$$L=S=l + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l}. \quad (2.27)$$

Заметим, что именно эта длина провода  $L$  и соответствующая ей стрела прогиба  $f$  являются потребными для обеспечения прочности провода.

Однако при монтаже линии электропередачи начальная (монтажная) длина провода  $L_0$  на пролёте  $l$  должна вычисляться по формуле

$$L_0 = S - \Delta l_q - \Delta l_t, \quad (2.28)$$

где  $\Delta l_q$  – удлинение от собственного веса провода, м;  
 $\Delta l_t$  – приращение длины провода за счёт разности температур на расчётном режиме и в момент подвешивания провода.

Удлинение  $\Delta l_q$  определяется формулой:

$$\Delta l_q = \frac{Hl}{EF}, \quad (2.29)$$

или, с учётом (2.22),

$$\Delta l_q = \frac{ql^3}{8fEF}. \quad (2.30)$$

Приращение  $\Delta l_t$  при известном линейном коэффициенте расширения и заданной разности температур вычисляется по формуле:

$$\Delta l_t = \alpha l(t - t_0), \quad (2.31)$$

где  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения материала, 1/град;  
 $t_0$  – температура во время подвешивания, °С.

Очевидно, что при таком монтаже линии длина провода на расчётном режиме будет равна  $L$  (2.27), а стрела провисания  $f$  будет расчётной (2.26). Однако, при изменении климатических условий (при наступлении иного режима эксплуата-

ции) подвешенный провод будет иметь иную длину и, как следствие, иные напряжения.

Запишем выражение для  $L_0$  (2.28) через параметры двух разных режимов эксплуатации.

Пусть на первом режиме  $t = t_1$ ,  $q = q_1$ ,  $\sigma = \sigma_1$ , а на втором соответственно  $t = t_2$ ,  $q = q_2$ ,  $\sigma = \sigma_2$ .

Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} L_0 &= S_1 - \Delta l_{q_1} - \Delta l_{t_1}, \\ L_0 &= S_2 - \Delta l_{q_2} - \Delta l_{t_2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Приравняв правые части выражений (2.32), после необходимых преобразований с учётом формул для  $S$  (2.27),  $\Delta l_q$  (2.30),  $\Delta l_t$  (2.31) и  $f$  (2.26) получим, так называемое, **уравнение состояния провода**:

$$\sigma_2^3 - \left[ \sigma_1 - \frac{\gamma_1^2 E l^2}{24 \sigma_1^2} + \alpha E (t_1 - t_2) \right] \sigma_2^2 - \frac{\gamma_2^2 E l^2}{24} = 0. \quad (2.33)$$

где  $\gamma_i = \frac{q_i}{F}$  – удельная нагрузка на провод, Н/м<sup>3</sup>.

Из уравнения состояния провода по известным параметрам одного режима работы ( $t_1, q_1, \sigma_1$ ) и известным параметрам  $t_2$  и  $q_2$  другого режима можно найти напряжение  $\sigma_2$  на этом режиме.

Уравнение состояния провода является неполным кубическим уравнением и может быть решено либо графически, либо одним из приближённых методов, например, методом Ньютона (метод касательных).

Алгоритм этого метода состоит в следующем.

Искомый корень уравнения назначаем наугад  $\sigma_2 = \sigma_{2(0)}$  (нулевое приближение). Вычисляем  $f(\sigma_{2(0)})$  и записываем уравнение касательной к кривой  $f(\sigma_2)$  в точке с координатами  $\sigma_{2(0)}, f(\sigma_{2(0)})$  в виде  $y = f(\sigma_2)$ .

$$y - f(\sigma_{2(0)}) = f'(\sigma_{2(0)})(\sigma_2 - \sigma_{2(0)}). \quad (2.34).$$

Обобщённая разрешающая формула метода Ньютона имеет вид:

$$\sigma_{2(n)} = \sigma_{2(n-1)} - \frac{f(\sigma_{2(n-1)})}{f'(\sigma_{2(n-1)})}, \quad (2.35)$$

где  $n = 1, 2, 3 \dots$  – номер приближения.

Формулу (2.35) применяют до  $\sigma_n - \sigma_{n-1} \leq 0,01$ .

Расчет ведут на основании базового режима. Выбор базового режима производится путем сравнения критической длины пролета с ее реальным значением. Критическая длина пролёта определяется по формуле:

$$l_{кр} = |\sigma| \sqrt{\frac{24\alpha(t_{об} - t_{min})}{\gamma_{max}^2 - \gamma_{min}^2}}, \quad (2.36)$$

где  $l_{кр}$  – критическая длина пролета, м;

$t_{об}$  – температура обледенения, принятая для данного региона, °С;

$t_{min}$  – минимальная температура в регионе, °С;

$\gamma_{max}, \gamma_{min}$  – максимальная и минимальная удельные нагрузки на провод, Н/м<sup>3</sup>.

Если  $l > l_{кр}$ , то базовым является **I режим** – с максимальной нагрузкой ( $q_{max}$ ).

Если  $l < l_{кр}$ , то базовым является **VI режим** – с минимальной годовой температурой.

### **Контрольные вопросы**

1. Продольная (нормальная) сила и ее эпюра.
2. Определение перемещений при растяжении (сжатии).
3. Модуль продольной упругости. Модуль поперечной упругости.
4. Закон Гука при растяжении (сжатии).
5. Напряжения в поперечных сечениях бруса при растяжении (сжатии). Расчет на прочность при растяжении (сжатии).
6. Учет собственного веса при растяжении (сжатии).



## ТЕМА 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ

### 3.1 Напряженное состояние в точке тела

Мерой интенсивности внутренних сил, распределенных по сечениям, служат напряжения – усилия, приходящиеся на единицу площади сечения. Через произвольную точку  $O$  тела проведем секущую площадь с нормалью  $\bar{\nu}$ . Выделим в окрестности точки  $O$  малую площадку  $\Delta F$  (рисунок 3.1). Пусть  $\Delta P$  – равнодействующая внутренних сил, действующих на эту площадку.

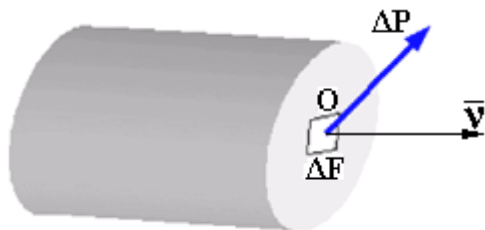


Рисунок 3.1 – Равнодействующая внутренних сил, действующих на площадке

Значение внутренних сил, приходящихся на единицу площади  $\Delta F$  рассматриваемой площадки, будет равно:

$$p_{\nu} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}. \quad (3.1)$$

Величина  $p_{\nu}$  называется полным напряжением в точке  $O$  на площадке  $\Delta F$ .

Единица напряжения – паскаль;  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ . Так как реальные значения напряжений будут выражаться очень большими числами, то следует применять кратные значения единиц, например МПа (мегаскаль);  $1 \text{ МПа} = 1 \text{ Н/мм}^2 = 10^6 \text{ Н/м}^2$ .

Напряжения, как и силы, являются векторными величинами. В каждой точке сечения тела полное напряжение  $p_v$  можно разложить на две составляющие (компоненты) (рисунок 3.2):

1) составляющую, нормальную к плоскости сечения. Эта составляющая называется нормальным напряжением и обозначается  $\sigma$ ;

2) составляющую, лежащую в плоскости сечения. Эта составляющая обозначается  $\tau$  и называется касательным напряжением. Касательное напряжение в зависимости от действующих сил может иметь любое направление в плоскости сечения. Для удобства  $\tau$  представляют в виде двух составляющих по направлению координатных осей. Принятые обозначения напряжений показаны на рисунке 3.2.

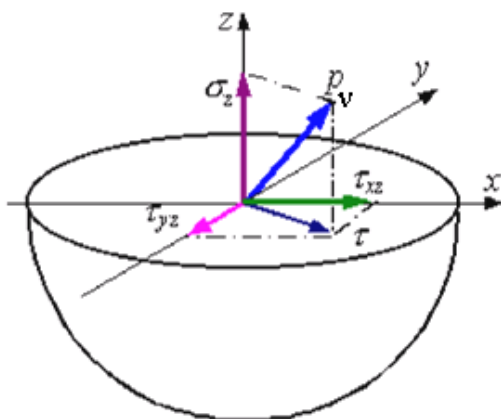


Рисунок 3.2 – Разложение вектора полного напряжения

У нормального напряжения ставится индекс, указывающий какой координатной оси параллельно данное напряжение. Растягивающее нормальное напряжение считается положительным, сжимающее – отрицательным.

Обозначения касательных напряжений имеют два индекса: первый из них указывает, направление действия касательного напряжения (т. е. какой оси параллельно само напряже-

ние), а второй – ориентацию площадки (т.е. какой оси параллельна нормаль к рассматриваемой площадке). Касательные напряжения на площадках с внешней нормалью, совпадающей с положительным направлением оси координат, считаются положительными, если они направлены тоже по оси координат. На противоположных площадках правило знаков для касательных напряжений противоположно, т.е. касательные напряжения положительны, если они направлены против оси координат.

Так как направления компонент мы связали с осями координат, то впредь компоненты напряжений можно считать скалярными величинами.

Если мысленно вырезать вокруг какой-нибудь точки тела элемент в виде бесконечно малого кубика, то по его граням в общем случае будут действовать напряжения, представленные на рисунке 3.3. Совокупность напряжений на всех элементарных площадках, которые можно провести через какую-либо точку тела называется напряженным состоянием в данной точке.

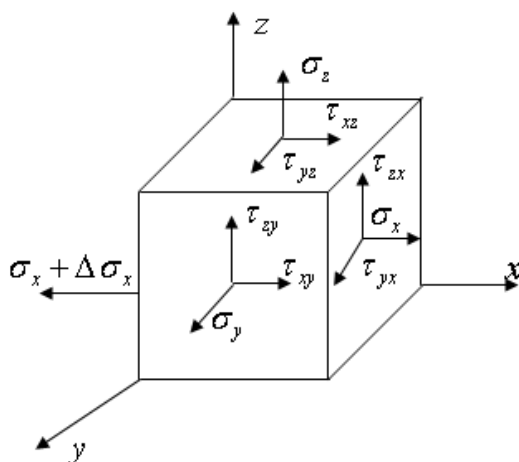


Рисунок 3.3 – Система напряжений в точке

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет определенный физический смысл. Нормальное

напряжение возникает, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться. Касательные напряжения связаны со сдвигом частиц материала по плоскости сечения.

На невидимых гранях куба все компоненты напряжений имеют приращения в виде частных дифференциалов. Например, на левой грани:

$$\begin{aligned} \sigma + \Delta\sigma_x, & \quad \Delta\sigma_x = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} \cdot dx; \\ \tau_{yx} + \Delta\tau_{yx}, & \quad \Delta\tau_{yx} = \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} \cdot dx; \\ \tau_{zx} + \Delta\tau_{zx}, & \quad \Delta\tau_{zx} = \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} \cdot dx \end{aligned} \quad (3.2)$$

Аналогичные выражения можно записать для нижней и тыльной граней куба.

Из условий равновесия куба вытекает закон парности касательных напряжений, который формулируется следующим образом: составляющие касательных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные общему ребру, равны по величине и противоположны по знаку, то есть либо обе направлены к ребру либо обе направлены от ребра:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (3.3)$$

С учетом закона парности число независимых компонент напряжений, характеризующих напряженное состояние в точке тела, снижается до шести:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ .

Эти шесть компонент при случайном выборе осей полностью характеризуют напряженное состояние в точке.

Компоненты напряжений принято записывать в виде матрицы и называть тензором напряжений:

$$T_H = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

В теории упругости доказано, что через каждую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярных площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки, а также действующие на них нормальные напряжения называются главными.

Главными напряжения являются для данной точки экстремальными. Их принято обозначать  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , причем:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

В теории упругости показано также, что по площадкам, делящим пополам углы между главными площадками, действуют максимальные касательные напряжения. Их называют главными касательными напряжениями. Через главные нормальные напряжения они выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2); \\ \tau_{23} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3); \\ \tau_{31} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Нормальные напряжения на площадках с экстремальными касательными напряжениями имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2); \\
\sigma_{23} &= \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3); \\
\sigma_{31} &= \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1).
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

### 3.2 Виды напряженного состояния

В зависимости от значений главных напряжений различают три вида напряженного состояния.

1. Линейное напряженное состояние – когда два главных напряжения равны нулю (растяжение или сжатие в одном направлении) (рисунок 3.4).

Пусть известно:

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \sigma_1 = \frac{N}{F}.$$

Полное напряжение по наклонному сечению с площадью  $F_\alpha$  равно:

$$\begin{aligned}
p_\alpha &= \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N}{F} \cos\alpha = \sigma_1 \cdot \cos\alpha, \\
F_\alpha &= \frac{F}{\cos\alpha}.
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

Нормальная и касательная составляющие полного напряжения:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2\alpha, \tag{3.8}$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\sigma_1 \cdot \sin 2\alpha. \tag{3.9}$$

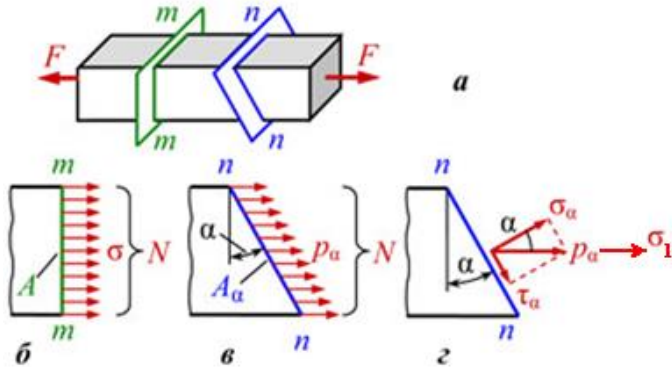


Рисунок 3.4 – Компоненты напряжения при линейном напряженном состоянии

Экстремальные значения нормального напряжения:

- при  $\alpha = 0^\circ$  имеем максимальное напряжение, равное  $\sigma_\alpha = \sigma_1$  (главная площадка перпендикулярна оси элемента);
- при  $\alpha = 90^\circ$  имеем минимальное значение напряжения, равное  $\sigma_\alpha = 0$  (главная площадка параллельна оси элемента).

Экстремальные значения касательного напряжения:

- при  $\alpha = 45^\circ$  имеем максимальное касательное напряжение, равное  $\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2}$ ;
- при  $\alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 90^\circ$  имеем минимальное значение касательного напряжения, равное  $\tau_\alpha = 0$  (главные площадки).

## 2. Плоское напряженное состояние

Напряженное состояние называется плоским или двухосным, если одно из трех главных напряжений равно нулю (рисунок 3.5).

Пусть:

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0.$$

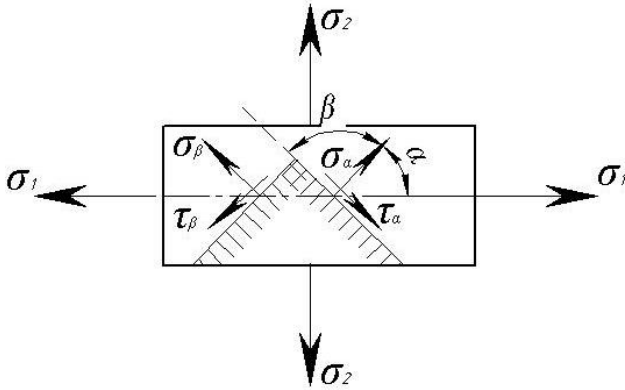


Рисунок 3.5 – Компоненты напряжения при плоском напряженном состоянии

При заданных значениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  напряжения на площадке с нормалью, составляющей угол  $\alpha$  с направлением главного напряжения  $\sigma_1$ , определяется по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha, \quad (3.10)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha, \quad (3.11)$$

– при  $\alpha = 0^\circ$  имеем максимальное напряжение, равное

$$\sigma_\alpha = \sigma_1;$$

– при  $\alpha = 90^\circ$  имеем минимальное значение напряжения, равное  $\sigma_\alpha = \sigma_2$ ;

– при  $\alpha = 45^\circ$  имеем максимальное касательное напряжение, равное  $\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ ;

– при  $\alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 90^\circ$  имеем минимальное значение касательного напряжения, равное  $\tau_\alpha = 0$ .

В случае, когда  $\sigma_2 > 0$ , наибольшее и наименьшее из всех касательных напряжений будут иметь место на площадках, наклоненных под углом в  $45^\circ$  к плоскости напряжений, и равны:

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1}{2}. \quad (3.12)$$



Напряжения, действующие на взаимно перпендикулярных площадках, связаны между собой следующей зависимостью:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (3.13)$$

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \quad (3.14)$$

При заданных значениях нормальных ( $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ ) и касательных ( $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$ ) напряжений на взаимно перпендикулярных площадках элемента (рисунок 3.6) напряжения на площадке с нормалью, составляющей угол  $\alpha$  с направлением  $\sigma_x$ , определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha, \quad (3.15)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha. \quad (3.16)$$

Главные напряжения в этом случае равны:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right]. \quad (3.17)$$

Угол наклона главной площадки  $\alpha$  определяется по формулам:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (3.18)$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_2}. \quad (3.19)$$

В эти формулы напряжения подставляются со своими знаками.

Если при этом оказывается, что  $\operatorname{tg} 2\alpha$  или  $\operatorname{tg} \alpha$  больше нуля (положителен), то угол  $\alpha$  отсчитывается от направления  $\sigma_x$

по ходу часовой стрелки, если же  $\operatorname{tg} 2\alpha$  или  $\operatorname{tg} \alpha$  меньше нуля (отрицателен), то угол отсчитывается против часовой стрелки. Наибольшее и наименьшее касательные напряжения действуют на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам:

$$\tau_{\max}^{\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.20)$$

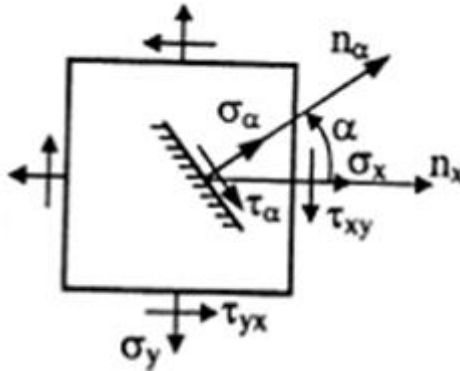


Рисунок 3.6 – Компоненты напряжения при плоском напряженном состоянии

3. Объемное напряженное состояние наблюдается, когда все три главных напряжения отличны от нуля (рисунок 3.7).

При наличии трех главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  (рисунок 3.7) нормальное и касательное напряжения на площадке с нормалью  $n$ , составляющей углы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  с направлениями соответствующих главных напряжений, определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3, \quad (3.21)$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cdot \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}. \quad (3.22)$$

На площадках, равнонаклоненных к трем главным напряжениям, нормальное и касательное напряжения называются октаэдрическими и равны:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (3.23)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1}. \quad (3.24)$$

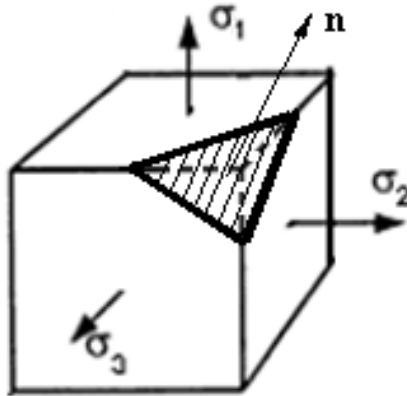


Рисунок 3.7 – Объемное напряженное состояние

### 3.3 Деформации при сложном напряженном состоянии. Связь между напряжениями и деформациями

Связь между линейными упругими деформациями и нормальными напряжениями в направлении этих деформаций выражается обобщенным законом Гука.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Связь между угловыми деформациями и касательными напряжениями:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (3.26)$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  – модуль упругости при сдвиге, МПа.

Главные деформации, т.е. относительные линейные деформации по направлению главных напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Угловые деформации по главным направлениям равны нулю.

Объемная деформация  $\theta$  (относительное изменение объема) может быть выражена так:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.27)$$

Видно, что изменение объема зависит только от суммы главных напряжений, а не от их соотношения. Если принять, что среднее напряжение равно:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

В этом случае мы получим:

$$\Theta = \frac{3(1-2\mu)}{E} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_{\text{ср}}}{K}, \quad (3.28)$$

где  $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$  – модуль объемной деформации.

### 3.4 Теории прочности

Наиболее известные в сопротивлении материалов теории прочности:

первая теория прочности – «Теория наибольших нормальных напряжений».

вторая теория прочности – «Теория наибольших деформаций».

третья теория прочности – «Теория наибольших касательных напряжений».

четвертая теория прочности (энергетическая) – «Теория наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения».

теория прочности Мора – «Теория предельных напряжённых состояний (иногда говорят – V теория прочности)».

Из всех вышеперечисленных теорий прочности наиболее полной, точной и всеобъемлющей является теория Мора. Все её положения были проверены экспериментально. Она подходит как для проверки прочности хрупких материалов (чугун, бетон, кирпич), так и для проверки на прочность пластичных материалов (низкоуглеродистая сталь). Теория наибольших нормальных напряжений и теория наибольших деформаций подходит только для прочностного анализа хрупких материалов, причём только для каких-то определённых условий нагружения, если требовать повышенную точность расчёта. Вот поэтому первые две теории прочности сегодня применять не рекомендуется. Результаты теории наибольших касательных напряжений и теории наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения можно получить в некоторых частных случаях нагружения при применении теории Мора.

В зависимости от условий нагружения материал может находиться в различных механических состояниях: упругом, пластическом и в состоянии разрушения. Под предельным подразумевают такое напряженное состояние, при котором происходит качественное изменение свойств материала – переход от одного механического состояния к другому. Для пластических материалов предельным считается напряженное состояние, соответствующее заметным остаточным деформациям, а для хрупких – такое, при котором начинается разрушение материала.

При линейном напряженном состоянии предельное значение единственного в этом случае главного напряжения может быть непосредственно определено из опыта ( $\sigma_T$  – для пластических материалов и  $\sigma_B$  – для хрупких). Поэтому оценка прочности в этом частном случае проста. В случае сложного напряженного состояния (объемного или плоского) при оценке прочности необходимо учитывать наличие двух или трех отличных от нуля главных напряжений. При этом опасное состояние материала зависит не только от величин главных напряжений, но и от соотношений между ними.

Из-за невозможности экспериментального определения критериев опасного состояния материала при сложном напряженном состоянии пользуются гипотезами, формулирующими условия перехода материала в опасное состояние. На основании таких гипотез построены теории прочности. Эти теории исходят из предпосылок о том, что сложное и линейное напряженные состояния считаются эквивалентными (по прочности), если они при пропорциональном увеличении главных напряжений в одно и то же число раз одновременно становятся опасными. Поэтому оценка прочности материала при любом напряженном состоянии основывается на результатах опытов при простом растяжении (сжатии), и исследуемое напряженное состояние сравнивается с линейным. Для материалов с выраженной пластичностью за опасное (предельное) состояние принимается такое, при котором начинают

развиваться остаточные деформации. Для материалов, находящихся в хрупком состоянии, опасным считается такое состояние, которое предшествует началу появления трещин.

Общая запись условия прочности при сложном напряженном состоянии имеет вид:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq [\sigma]$$

где  $\sigma_{\text{пр}}$  – расчетное или приведенное напряжение при сложном напряженном состоянии.

Формулы приведенных напряжений устанавливаются теориями прочности в зависимости от принимаемых гипотез.

*Первая теория прочности* (теория наибольших нормальных напряжений) основана на гипотезе о том, что опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии. Приведенные напряжения при объемном напряженном состоянии:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq [\sigma], \sigma_1 \leq [\sigma] \text{ или } |\sigma_3| \leq [\sigma]. \quad (3.29)$$

Первая теория прочности подтверждается опытами только при растяжении хрупких материалов и лишь в тех случаях, когда все три главные напряжения не однозначны и различны по величине.

*Вторая теория прочности (теория наибольших относительных удлинений)* исходит из гипотезы о том, что разрушение связано с величиной наибольших относительных удлинений. Следовательно, опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшая по модулю относительная линейная деформация достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии.

По этой теории, при  $\varepsilon_{max} = \varepsilon_1$ , условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{np} \leq [\sigma], \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (3.29)$$

Вторая теория, как и первая, недостаточно подтверждается опытами. Это объясняется тем, что не учтены особенности строения реальных тел. Первая и вторая теории прочности отображают хрупкое разрушение путем отрыва (в первой это связывается с  $\sigma_{max}$ , во второй – с  $\varepsilon_{max}$ ). Поэтому эти теории рассматриваются только как грубое приближение к действительной картине разрушения.

*Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжении)* предполагает, что появление опасного состояния обусловлено наибольшими касательными напряжениями.

Условие прочности можно записать следующим образом:

$$\tau_{max} \leq [\tau] \text{ или } \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (3.30)$$

где  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{np}$  – приведенное (расчетное) напряжение по третьей теории прочности.

Третья теория прочности отображает наступление текучести в материале, а также разрушение путем сдвигов. Она хорошо подтверждается опытами с пластическими материалами, одинаково сопротивляющимися растяжению и сжатию при условии, что главные напряжения имеют разные знаки.

*Четвертая теория прочности или энергетическая теория прочности (теория наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения)* исходит из предпосылки о том, что количество потенциальной энергии формоизменения, накопленной к моменту наступления опасного состояния (текучести материала), одинаково как при сложном напряженном состоянии, так и при простом растяжении.



Условие прочности по этой теории имеет вид:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq [\sigma]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma]. \quad (3.31)$$

Четвертая теория прочности отображает наступление текучести. Она хорошо подтверждается опытами с пластическими материалами, имеющими одинаковый предел текучести при растяжении и сжатии.

*Теория прочности Мора*, в отличие от изложенных, не содержит критериальной гипотезы и состоит в установлении определенной зависимости прочностных свойств материала от вида его напряженного состояния. За характеристики напряженного состояния в общем случае принимается наибольшее касательное напряжение и нормальное, действующее на той площадке, на которой действует это касательное. Условие наступления текучести определяется огибающей больших кругов напряжений (кругов Мора) для предельных напряженных состояний. При этом влияние среднего напряжения  $\sigma_2$  не учитывается. Текучесть наступает тогда, когда большой круг напряжений для рассматриваемого напряженного состояния коснется этой огибающей (рисунок 3.8).

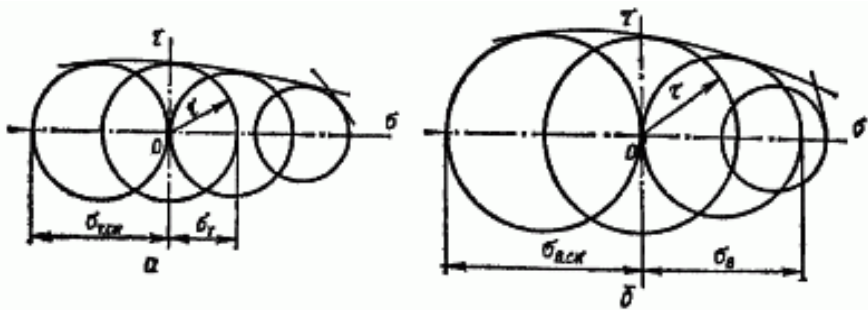


Рисунок 3.8 – Круги напряжений Мора

Теория прочности Мора является наиболее полной, точной из наиболее известных теорий прочности в сопротивлении материалов. Все её положения были проверены экспериментально. Она подходит как для проверки прочности хрупких материалов (чугун, бетон, кирпич), так и для проверки на прочность пластичных материалов (низкоуглеродистая сталь). Её иногда называют V теорий прочности.

### **Контрольные вопросы**

1. Полное напряжение и его составляющие.
2. Что такое напряженное состояние в точке?
3. Закон парности касательных напряжений.
4. Виды напряженного состояния
5. Теории прочности.

## ТЕМА 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

### 4.1 Основные понятия и определения

Деформации и напряжения в брусе существенно зависят от размеров и формы его поперечных сечений. Поэтому во всех расчетных формулах обязательно присутствуют геометрические характеристики этих сечений. При одноосном растяжении и сжатии такой характеристикой является площадь сечения. В теории кручения и изгиба используются более сложные геометрические характеристики, так как в этих случаях напряжения и деформации зависят не только от площади, но и от формы сечения.

На рисунке 4.1 изображено произвольное сечение, отнесенное к некоторой системе координат  $(x, y)$ , где:  $F$  – величина площади сечения;  $dF$  – элементарная часть этой площади;  $x, y$  – координаты элементарной площадки;  $\rho$  – радиус-вектор;  $C$  – центр тяжести площади сечения.

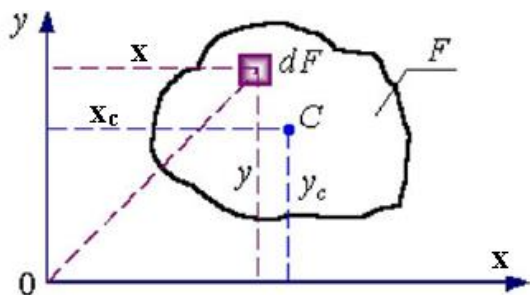


Рисунок 4.1 – К определению геометрических характеристик сечения

Площадь  $F$ , ограниченная произвольной кривой, определяется по формуле:

$$F = \int_F dF, \text{ м}^2. \quad (4.1)$$

Статические моменты площади  $F$  относительно осей  $x$  и  $y$  определяются по формулам:

$$S_y = \int_F x \cdot dF, \quad S_x = \int_F y \cdot dF. \quad (4.2)$$

Размерность статического момента сечения –  $[м^3]$ .

Если известна величина площади  $F$  и координаты ее центра тяжести, то  $S_x$ ,  $S_y$  определяются по формулам:

$$S_y = F \cdot x_c, \quad S_x = F \cdot y_c. \quad (4.3)$$

Отсюда, если известна площадь и статические моменты, то координаты центра тяжести площади  $F$  определяются по формулам:

$$x_c = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (4.4)$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными. Относительно любых центральных осей статические моменты сечения равны нулю.

Центр тяжести сечения лежит на оси симметрии сечения. Если сечение имеет хотя бы две оси симметрии, то центр тяжести лежит на пересечении этих осей.

Для сложного сечения, состоящего из  $n$  простейших фигур, координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (4.5)$$

где  $x_i, y_i$  и  $F_i$  – координаты центров тяжести и площади сечений отдельных фигур.

Осевые моменты инерции площади  $F$  определяются по формулам:

$$I_y = \int_F x^2 \cdot dF, \quad I_x = \int_F y^2 \cdot dF. \quad (4.6)$$

Центробежный момент инерции площади  $F$  определяется по формуле:

$$I_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF. \quad (4.7)$$

Полярный момент инерции (относительно начала координат) площади  $F$  определяется по формуле:

$$I_\rho = \int_F \rho^2 \cdot dF. \quad (4.8)$$

Так как  $\rho^2 = y^2 + z^2$ :

$$I_\rho = I_x + I_y. \quad (4.9)$$

Размерность моментов инерции –  $[M^4]$ .

Осевые моменты инерции всегда можно представить как произведения площади фигуры на квадраты некоторых вспомогательных величин, имеющих размерность длины и называемых радиусами инерции. Следовательно, радиусы инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$  определяются по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}. \quad (4.10)$$

Осевые и полярный моменты инерции, представляющие собой пределы сумм положительных величин, всегда положительны. Центробежный момент инерции может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю, так как координаты  $x$  и  $y$  входят в его выражение в первых степенях.

#### 4.2 Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей

Пусть известны осевые  $I_{x_c}, I_{y_c}$  и центробежный  $I_{xy}$  моменты инерции сечения относительно его центральных осей и требуется определить моменты инерции  $I_x, I_y, I_{xy}$  того же сечения относительно осей  $x$  и  $y$ , параллельных данным центральным (рисунок 4.2). Тогда согласно рисунка 4.2 и формулам (4.6) и (4.7) в принятых выше обозначениях имеем:

$$I_x = I_{x_c} + 2 \cdot y_c \cdot S_{x_c} + y_c^2 \cdot F, \quad (4.11)$$

$$I_y = I_{y_c} + 2 \cdot x_c \cdot S_{y_c} + x_c^2 \cdot F, \quad (4.12)$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + y_c \cdot S_{y_c} + x_c \cdot S_{x_c} + x_c \cdot y_c \cdot F. \quad (4.13)$$

Учитывая, что относительно центральных осей статические моменты  $S_{x_c}, S_{y_c}$  равны нулю, получаем следующую зависимость между моментами инерции при переходе от центральных осей к любым параллельным осям:

$$I_x = I_{x_c} + y_c^2 \cdot F, \quad (4.14)$$

$$I_y = I_{y_c} + x_c^2 \cdot F, \quad (4.15)$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + x_c \cdot y_c \cdot F. \quad (4.16)$$

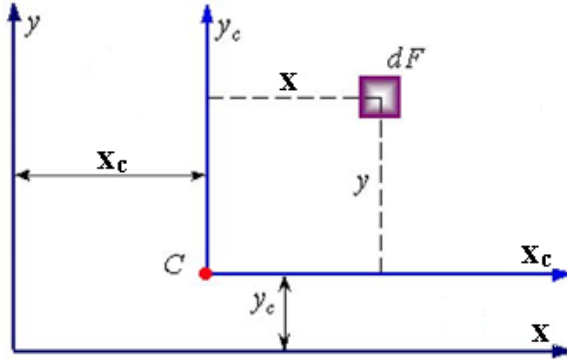


Рисунок 4.2 – Параллельный перенос осей

При переходе от нецентральных осей к также нецентральному в формулах перехода (4.11) – (4.13) должны быть сохранены слагаемые с  $S_x$  и  $S_y$ . Из формул (4.14) – (4.16) видно, что наименьшее значение имеют осевые моменты инерции относительно центральных осей сечения, так как величины  $y_c^2 F$  и  $x_c^2 F$  всегда положительны. Центробежный момент при переходе от центральных осей к нецентральному в зависимости от знака произведения координат  $x_c$  и  $y_c$  может увеличиваться или уменьшаться.

### 4.3 Моменты инерции простейших фигур

В расчетной практике часто встречаются сечения в виде простейших фигур (прямоугольников, кругов, треугольников и т. п.) или их комбинаций. При вычислении моментов инерции таких фигур обычно пользуются заранее выведенными расчетными формулами. Рассмотрим некоторые из простых фигур.

Прямоугольник и параллелограмм (рисунок 4.3). Выделим элементарную полоску площадью  $dF = bdy$  и подставим это значение  $dF$  под знак интеграла (4.6):

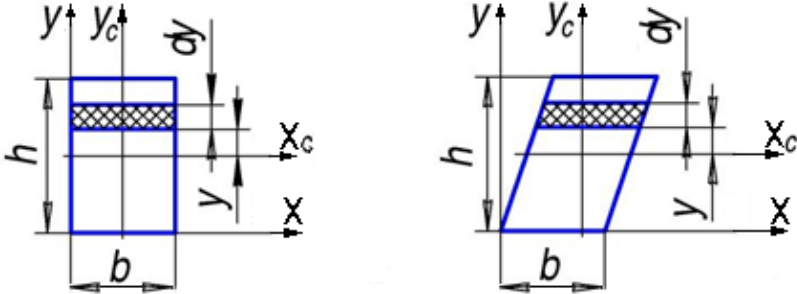


Рисунок 4.3 – К определению основных геометрических характеристик прямоугольника и параллелограмма

$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Следовательно, момент инерции прямоугольника и параллелограмма с основанием  $b$  и высотой  $h$  относительно центральной оси, параллельной основанию равен:

$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.17)$$

Моменты инерции этих фигур относительно осей, проходящих через основание, находим по формуле (4.14):

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{bh^3}{3}. \quad (4.18)$$



Моменты инерции прямоугольника относительно осей  $y_C$  и  $y$  вычисляются по формулам (4.17) и (4.18), где  $b$  заменяется на  $h$ , а  $h$  на  $b$ :

$$I_{y_C} = \frac{hb^3}{12}. \quad (4.19)$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{hb^3}{3}. \quad (4.20)$$

Треугольник с основанием  $b$  и высотой  $h$  (рисунок 4.4).

Разобьем треугольник на элементарные полоски, параллельные его основанию. Площадь такой полоски:

$$dF = b_y \cdot dy = b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot dy.$$

Тогда момент инерции треугольника относительно оси, проходящей через основание равен:

$$I_x = \int_0^h b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot y^2 \cdot dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.21)$$

Подсчитывая по формулам переноса момент инерции треугольника относительно центральной оси, параллельной основанию, получаем:

$$I_{x_C} = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \frac{b}{h} \cdot (hy^2 - y^3) \cdot dy = \frac{b}{h} \left( h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Bigg|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} = \frac{bh^3}{36}. \quad (4.22)$$

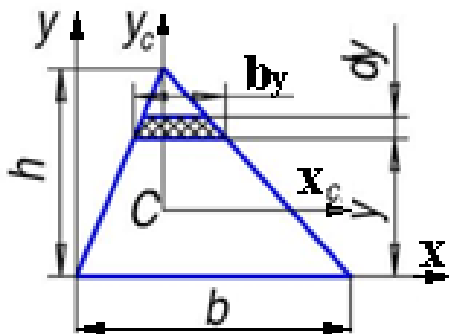


Рисунок 4.4 – К определению основных геометрических характеристик треугольника

Круг и полукруг диаметра  $d$  (рисунок 4.5). Подсчитываем сначала полярный момент инерции круга. Для этого выделим в сечении окружностями радиуса  $\rho$  и  $\rho + d\rho$  элементарное кольцо площадью  $dF = 2\pi\rho d\rho$  и вычислим  $I_\rho$  по формуле (4.8):

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}. \quad (4.23)$$

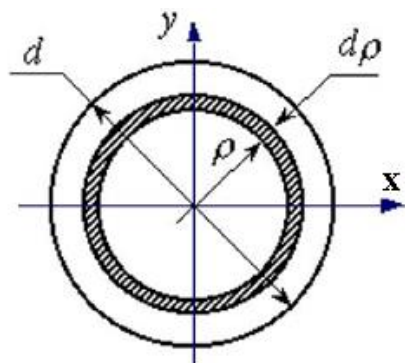


Рисунок 4.5 – К определению основных геометрических характеристик круга

Обычно размеры круглого сечения выражают через диаметр  $d$  и подсчитывают  $I_{\rho}$  по формуле:

$$I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (4.24)$$

Осевые моменты инерции круга найдем с помощью соотношения (4.9). В силу симметрии круга  $I_x = I_y$ , для осевых моментов инерции круга получаем выражение:

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (4.25)$$

Центральные оси  $x$  и  $y$  делят круг на четыре совершенно одинаковые части с равными моментами инерции относительно этих осей. Следовательно, моменты инерции круга и полукруга относительно осей  $x$  и  $y$  должны быть равны соответственно учетверенным и удвоенным моментам инерции относительно тех же осей одной четверти круга. Из сказанного следует, что моменты инерции полукруга относительно оси симметрии  $x$  и оси  $y$ , проходящей через его основание (рисунки 4.6), будут одинаковы и равны половине момента инерции круга:

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{128}, \quad (4.26)$$

а момент инерции относительно центральной оси  $x_c$ :

$$I_{x_c} = \frac{\pi d^4}{256}. \quad (4.27)$$

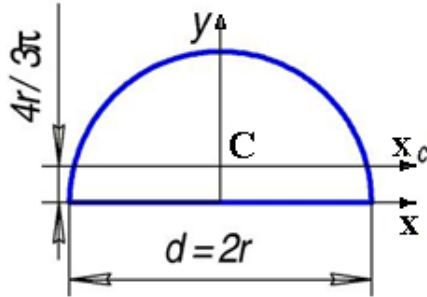


Рисунок 4.6 – К определению основных геометрических характеристик полукруга

#### 4.4 Вычисление моментов инерции сложных фигур

Всякую сложную фигуру обычно можно разбить на ряд простейших фигур, моменты инерции которых относительно их центральных осей известны. Применяв формулы переноса осей инерции, можно определить момент инерции сложной фигуры, алгебраически суммируя моменты инерции простых фигур относительно общей оси – центральной оси сложной фигуры.

Например, осевой момент инерции толстостенного кольца с внешним диаметром  $D$  и внутренним  $d$  (рисунок 4.7) относительно любой центральной оси может быть найден как разность моментов инерции большого и малого кругов:

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4), \quad (4.28)$$

где  $\alpha = d/D$  – коэффициент полости.

Полярный момент инерции кольца находится аналогично:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4). \quad (4.29)$$

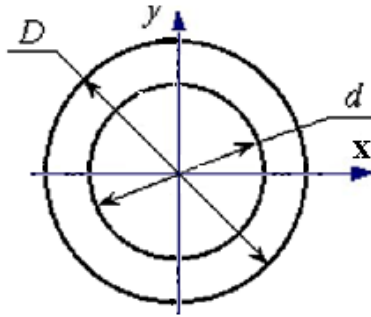


Рисунок 4.7 – Толстостенное кольцо

#### 4.5 Изменение моментов инерции при повороте осей координат

Предположим, что задана система осей координат и известны моменты инерции  $I_x, I_y$  и  $I_{xy}$  фигуры относительно этих осей. Повернем оси координат на некоторый угол  $\alpha$  против часовой стрелки и определим моменты инерции той же фигуры относительно новых осей координат  $u$  и  $v$ .

Из рисунка 4.8 следует, что координаты какой-либо точки в обеих системах координат связаны между собой соотношениями:

$$u = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha;$$

$$v = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha.$$

Момент инерции:

$$I_u = \int_F v^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.30)$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.31)$$

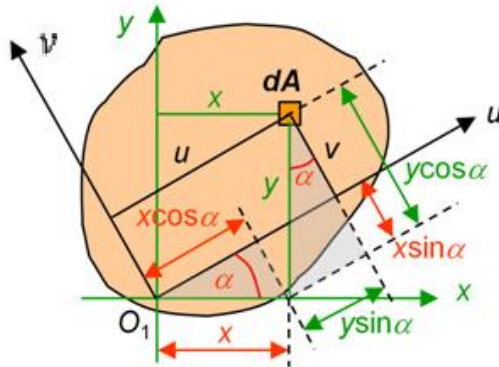


Рисунок 4.8 – Поворот координатных осей

Центробежный момент инерции:

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (4.32)$$

Из полученных уравнений видно, что:

$$I_u + I_v = I_x + I_y,$$

т. е. сумма осевых моментов инерции при повороте осей координат остается величиной постоянной. Поэтому, если относительно какой-либо оси момент инерции достигает максимума, то относительно перпендикулярной ей оси он имеет минимальное значение.

#### 4.6 Главные оси и главные моменты инерции

Из формул (4.30) – (4.32) видно, что при повороте осей координат центробежный момент инерции меняет знак, и,

следовательно, существует такое положение осей, при котором центробежный момент равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции сечения обращается в нуль, называются главными осями, а главные оси, проходящие через центр тяжести сечения – главными центральными осями инерции сечения.

Моменты инерции относительно главных осей инерции сечения называются главными моментами инерции сечения и обозначаются через  $I_1$  и  $I_2$ , причем  $I_1 > I_2$ . Обычно, говоря о главных моментах, подразумевают осевые моменты инерции относительно главных центральных осей инерции.

Предположим, что оси  $u$  и  $v$  главные. Тогда:

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

Отсюда:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (4.33)$$

Уравнение (4.33) определяет положение главных осей инерции сечения в данной точке относительно исходных осей координат. При повороте осей координат изменяются также и осевые моменты инерции.

Главные оси инерции являются осями, относительно которых осевые моменты инерции сечения достигают экстремальных значений.

Для упрощения вычисления главных моментов инерции применяют формулу:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (4.34)$$

Знак плюс перед радикалом соответствует большему  $I_1$ , а знак минус – меньшему  $I_2$  из моментов инерции сечения.

Если моменты инерции сечения относительно главных осей одинаковы, то все оси, проходящие через ту же точку сечения, являются главными и осевые моменты инерции относительно всех этих осей одинаковы:  $I_u = I_v = I_y = I_x$ . Этим свойством обладают, например, квадратные, круглые, кольцевые сечения.

#### 4.7 Моменты сопротивления площади сечения

Осевым моментом сопротивления площади сечения  $F$  относительно данной оси называется отношение момента инерции площади относительно этой же оси к расстоянию от оси до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \quad (4.35)$$

Размерность момента сопротивления –  $[м^3]$ . Отношение полярного момента инерции площади сечения к наибольшему радиусу-вектору этой площади, называется полярным моментом сопротивления:

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}}. \quad (4.36)$$

Для прямоугольника:

$$W_x = \frac{bh^2}{6}, W_y = \frac{hb^2}{6}. \quad (4.37)$$

Для круга:



$$W_x = W_y = W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3, W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (4.38)$$

#### 4.8 Пример определения геометрических характеристик составного поперечного сечения

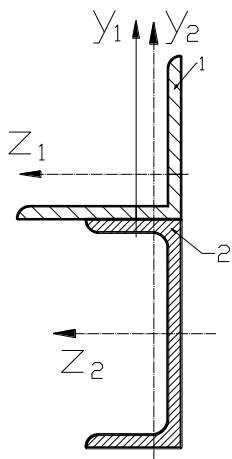
Требуется:

- определить положение центра тяжести;
- найти осевые и центробежные моменты инерции относительно случайных осей, проходящих через центр тяжести сечения;
- определить направление главных центральных осей;
- найти главные моменты инерции относительно главных центральных осей;
- вычертить сечение (в масштабе 1 : 2) и указать на нем все размеры и оси.

1. Выписываем исходные данные.

Уголок равнобокий	Двутавр	Швеллер	Сечение
80 × 80 × 6	18	30	4

2. Изображаем схему сложного сечения, разбиваем его на 2 элемента (рисунок 4.9).

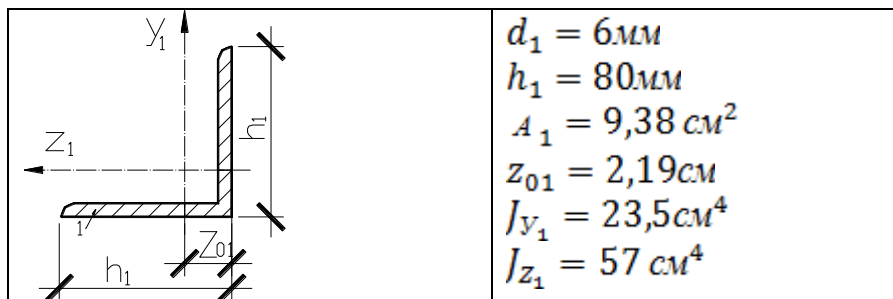


1 – уголок равнополочный  
2 – швеллер № 30

Рисунок 4.9 – Схема сложного сечения

3. Для удобства расчета показываем размеры элементов и выписываем или вычисляем геометрические характеристики.

Элемент 2 – швеллер № 30	
	$h_2 = 100\text{мм}$ $b_2 = 300\text{мм}$ $A_2 = 40,5\text{ см}^2$ $y_{02} = 2,52\text{см}$ $J_{y_2} = 327\text{ см}^4$ $J_{z_2} = 5810\text{ см}^4$
Элемент 1 – уголок равнобокий	



4. Определяем положение центра тяжести сечения по отношению к вспомогательным осям. В нашем случае к главным центральным осям равнобокого уголка.

Находим расстояния между центральными осями наших элементов и вспомогательными осями (рисунок 4.10):

$$y_1 = 0 \text{ см}, z_1 = 0 \text{ см}$$

$$y_2 = -(15,0 - 2,19) = -17,19 \text{ см}, z_2 = 2,52 - 2,19 = 0,33 \text{ см}$$

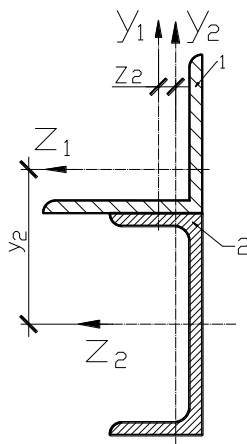


Рисунок 4.10 – Вспомогательные оси  $y_1, y_2, z_1, z_2$

Координаты центра тяжести сложного сечения вычисляются по формулам:

$$y_c = \frac{\sum_1^2 y_i A_i}{\sum_1^2 A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2},$$

$$y_c = \frac{0 \cdot 9,38 - 17,19 \cdot 40,5}{9,38 + 40,5} = \frac{-696,195}{49,88} = -13,95 \text{ см},$$

$$z_c = \frac{\sum_1^2 z_i A_i}{\sum_1^2 A_i} = \frac{0 \cdot 9,38 + 0,33 \cdot 40,5}{9,38 + 40,5} = \frac{13,36}{49,88} = 0,26 \text{ см}.$$

Через найденный центр тяжести  $C(0,26; -13,95)$  проводим оси  $Z_c$  и  $Y_c$  (рисунок 4.11).

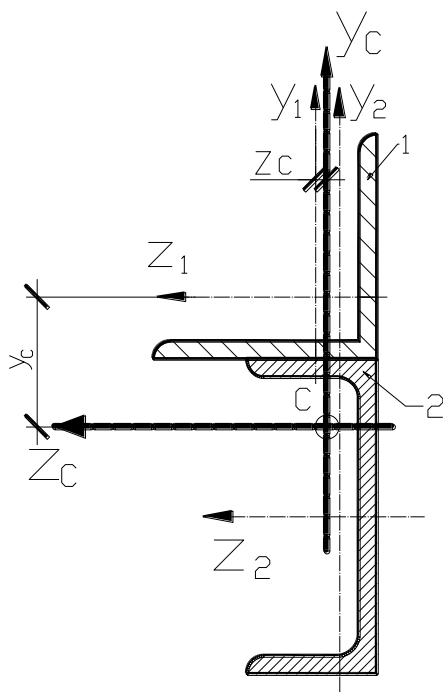


Рисунок 4.11 – Центр тяжести сечения

5. Проверяем правильность определения центра тяжести. Для проверки вычисляем статические моменты площади всей фигуры относительно этих осей. Для чего находим координаты центров тяжести элементов сечения.

$$a_1 = -y_c = 13,95 \text{ см}, \quad a_2 = y_2 - y_c = -17,19 - (-13,95) = -3,24 \text{ см},$$

$$b_1 = z_1 - z_c = 0 - 0,26 = -0,26 \text{ см}, \quad b_2 = z_2 - z_c = 0,33 - 0,26 = 0,07 \text{ см},$$

$$S_{z_c} = \sum A_i a_i = 13,95 \cdot 9,38 - 3,24 \cdot 40,5 = -0,37 \text{ см}^3 \approx +0,14 \%$$

$$S_{y_c} = \sum A_i b_i = -0,26 \cdot 9,38 + 0,07 \cdot 40,5 = -0,37 \text{ см}^3 \approx +0,1 \%$$

Погрешность расчета 0,14% и 0,1% , что в пределах точности логарифмической линейки.

Если погрешность расчета превышает  $\pm 5\%$  , то следует уточнить положение центра тяжести.

6. Вычисляем осевые и центробежные моменты инерции относительно центральных осей  $Z_c$  и  $Y_c$  .

$$I_{Z_c} = \sum \left( I_{Z_i} + a_i^2 A_i \right) = (57 + 13,95^2 \cdot 9,38) + (5810 + (-3,24)^2 \cdot 40,5) = 8117,52 \text{ см}^4.$$

$$I_{Y_c} = \sum \left( I_{Y_i} + b_i^2 A_i \right) = (23,5 + (-0,26)^2 \cdot 9,38) + (327 + 0,07^2 \cdot 40,5) = 351,33 \text{ см}^4.$$

При вычислении центробежного момента инерции  $I_{Z_c, Y_c}$  необходимо предварительно определить центробежные моменты инерции уголка относительно их центральных осей  $Z_1$  и  $Y_1$  .

Для равнобокого уголка:

$$I_{Z_1, Y_1} = \sqrt{(I_{Z_1} - I_{Y_{1\min}})^2} = \sqrt{(57 - 23,5)^2} = -1122,25 \text{ см}^4.$$

Берем знак минус, так как оси  $Y_{\min}$  уголка повернуты к оси  $y$  против часовой стрелки.

Центробежный момент инерции  $I_{y_c z_c}$  всего сечения:

$$I_{y_c z_c} = \sum (y_i z_i + a_i b_i F_i) = [-1122,25 + 13,95 \cdot (-0,26) \cdot 9,38] + [0 + (-3,24) \cdot 0,07 \cdot 40,5] = -1165,45 \text{ см}^4$$

7. Определение главных центральных моментов инерции:

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_{z_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{z_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{z_c y_c}^2} = \frac{8117,52 + 351,33}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(8117,52 - 351,33)^2 + 4 \cdot (-1122,25)^2} = 4234,425 \pm 4042,01;$$

$$I_{\max} = I_u = 8276,43 \text{ см}^4.$$

$$I_{\min} = I_v = 192,415 \text{ см}^4.$$

8. Находим положение главных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{y_c z_c}}{I_y - I_z} = -\frac{2 \cdot (-1165,45)}{351,33 - 8117,52} = -0,3,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -0,3; \quad 2\alpha_0 = -17^\circ 16'; \quad \alpha_0 = -8^\circ 58'.$$

Положительный угол отсчитывается от оси  $-Y$  по ходу часовой стрелки (рисунок 4.12).

9. Проверяем правильность вычислений.

Первая проверка:

$$I_u + I_v = I_{Zc} + I_{Yc}$$

$$8276,43 + 192,415 = 8117,52 + 351,33 \text{ см}^4.$$

$$8468,845 = 8468,85 \text{ см}^4.$$

Вторая проверка:

$$I_{UV} = \frac{I_{Zc} - I_{Yc}}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{YcZc} \cos 2\alpha_0.$$

$$I_{uv} = \frac{8117,52 - 351,33}{2} \cdot (-0,287) - 1165,45 \cdot 0,957 = -0,89 \approx 0,08\%$$

Погрешность – 0,08 %.

Следовательно, вычисления выполнены правильно, если погрешность будет  $\gt \pm 5$  %, то следует найти ошибку в вычислениях и исправить ее.

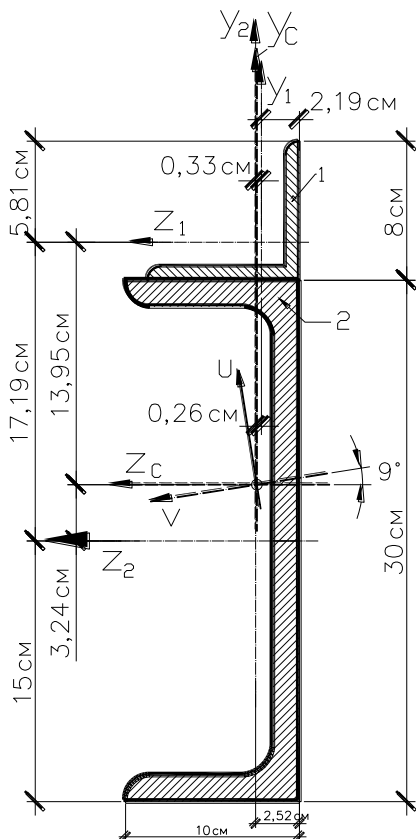


Рисунок 4.12 – Положение главных осей сечения

### Контрольные вопросы

1. Статические моменты сечения.
2. Определение положения центра тяжести сечения сложной формы.
3. Моменты инерции сечения простейших фигур.
4. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей.
5. Вычисление моментов инерции сложных сечений.
6. Главные оси и главные моменты инерции.



## ТЕМА 5. КРУЧЕНИЕ

### 5.1 Общие понятия

Кручением называется деформация стержня, возникающая при действии внешних пар сил, лежащих в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня.

Стержень, работающий на кручение, называют валом.

Моменты внешних пар называют скручивающими моментами и обозначают  $M$ .

Внутренние силы в поперечных сечениях при кручении приводятся к одному силовому фактору – крутящему моменту и обозначают  $M_k$ .

В соответствии с методом сечений крутящий момент в произвольном сечении стержня равен алгебраической сумме внешних крутящих моментов, приложенных к отсеченной части вала (правой или левой).

Эпюра – графическое изображение изменения крутящего момента по длине стержня.

### 5.2 Напряжения при кручении брусьев сплошного и кольцевого сечений

Теория кручения стержней основана на следующих предположениях:

- ось стержня после деформации остается прямой;
- расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными, т. е. удлинения (укорочения) волокон отсутствуют;
- поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к оси бруса после деформации (гипотеза плоских сечений);
- радиусы поперечных сечений, поворачиваясь на некоторый угол  $\varphi$ , остаются прямыми.

Справедливость этих допущений подтверждена экспериментальными и точными решениями, полученными методами теории упругости.

Таким образом, при кручении возникают только касательные напряжения  $\tau$ , прямо пропорциональные расстоянию от центра до точки сечения и направленные перпендикулярно радиусу – вектору  $\rho$  (расстоянию от центра сечения до рассматриваемой точки) данной точки. В центре сечения касательные напряжения равны нулю, а у поверхности имеют максимальное значение.

Величину касательных напряжений можно найти интегрированием моментов по площади сечения стержня (рисунок 5.1).

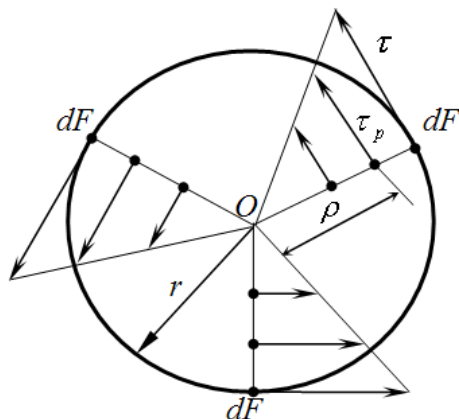


Рисунок 5.1 – Эпюра касательных напряжений при кручении

Усилие, приложенное к элементарной площадке  $dF$ , равно  $dP = \tau_{\rho} dF$ , а его момент относительно центра сечения равен:

$$dM_k = \tau_{\rho} \cdot \rho \cdot dF . \quad (5.1)$$

Крутящий момент  $M_k$  можно найти как интеграл, распространённый по площади сечения,

$$M_k = \int_F \tau_\rho \rho \cdot dF. \quad (5.2)$$

Рассматривая напряжённое состояние в сечении вала как чистый сдвиг, можно записать

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (5.3)$$

где  $\gamma = r \frac{d\varphi}{dx}$  – угол сдвига на поверхности вала ( $\rho = r$ ), а  $\frac{d\varphi}{dx}$  – производная от угла закручивания вала по его длине (относительный угол закручивания).

В точке, находящейся на расстоянии  $\rho$  от центра, относительный угол закручивания равен:

$$\gamma_\rho = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$

Формула (5.3) для напряжений в этой точке получит вид

$$\tau_\rho = \rho \cdot G \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.4)$$

Подставляя эту формулу в (5.2) и вынося за знак интеграла постоянные при интегрировании величины, получим:

$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 dF = M_k. \quad (5.5)$$

Обозначим  $\int_F \rho^2 dF = J_p$ . Сумма произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до центра сечения,

является геометрической характеристикой данного сечения и называется полярным моментом инерции сечения.

В частности для круга

$$J_p = \int_0^r 2\pi \cdot \rho \cdot \rho^2 d\rho = 2\pi \int_0^r \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi \cdot r^4}{2}.$$

Из (5.5) после подстановки  $J_p$  найдем относительный угол закручивания  $\theta$ :

$$\begin{aligned} G \frac{d\varphi}{dx} \cdot J_p &= M_k; \\ \theta &= \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{G \cdot J_p}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Далее подстановкой (5.6) в (5.4) найдем закон распределения  $\tau$  по радиусу при кручении круглого стержня:

$$\tau_\rho = \frac{M_k}{J_p} \cdot \rho. \quad (5.7)$$

Наибольшего значения напряжения достигают у поверхности вала (для вала круглого сплошного сечения):

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{J_p} \cdot r.$$

Эту формулу принято записывать в виде:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (5.8)$$

где  $W_p = \frac{J_p}{r}$  – момент сопротивления сечения при кручении.

$$\text{Для круга } W_p = \frac{\pi r^3}{2}.$$

### 5.3 Расчет брусев на прочность и жесткость при кручении

Условие прочности вала (или участка вала) при кручении (с  $M = \text{const}$  по длине вала) имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau]. \quad (5.9)$$

Для круглого стержня:

$$\tau_{\max} = \frac{2M_k}{\pi \cdot r^3} \leq [\tau].$$

Допускаемое напряжение как и при чистом сдвиге следует принимать равными  $[\tau] = (0,55 \div 0,60) \cdot [\sigma]$ . Здесь  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение при растяжении.

На практике величина  $[\tau]$  для сталей в зависимости от сорта стали и характера нагрузки колеблется в пределах  $20 \div 100$  МПа.

Как известно, при кручении происходит взаимный поворот соседних сечений и угол этого поворота  $\varphi$  называется углом закручивания. При расстоянии между сечениями, равном  $l$ , угол закручивания будет равен:

$$\varphi = \int_0^l \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_0^l \frac{M_k}{G \cdot J_p} dx, \quad (5.10)$$

где  $\frac{d\varphi}{dx}$  – относительный угол закручивания.

Если  $M_k = const$  по длине участка, то

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p}. \quad (5.11)$$

Величину  $GJ_p$  называют жесткостью при кручении. Она отражает влияние геометрии сечения и упругих свойств материала на деформируемость вала.

Полный угол закручивания вала можно получить алгебраическим суммированием углов закручивания на участках. Величина полного угла закручивания необходима для проверки вала на жесткость. Условие жесткости круглого вала при кручении имеет вид:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p} \leq [\varphi], \quad (5.12)$$

где  $[\varphi]$  – допускаемый угол закручивания вала.

Практикой разработаны следующие допустимые пределы для оптимального угла закручивания:

- в обычных условиях эксплуатации  $[\theta] = 0,3 \frac{\text{град}}{\text{м}}$  ;
- при переменных нагрузках  $[\theta] = 0,25 \frac{\text{град}}{\text{м}}$  ;
- при ударных нагрузках  $[\theta] = 0,15 \frac{\text{град}}{\text{м}}$  .

Очевидно, что для вала (или участка вала) с постоянным по длине  $M_k$ , условию жесткости (5.12) можно придать следующий вид:

$$\theta_{\max} = \frac{M_k}{G \cdot J_p} \leq [\theta]. \quad (5.13)$$

В частности для круглого вала:

$$\theta_{\max} = \frac{2M_k}{\pi \cdot G \cdot r^4} \leq [\theta]. \quad (5.14)$$

Таким образом, требуемый диаметр вала необходимо определять из условия прочности и условия жесткости вала.

#### 5.4 Пример расчета вала на кручение

На равномерно вращающемся валу установлено пять шкивов (звездочек, шестерен и т. д.), каждый из которых передает определенную мощность  $N$ . Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов  $T_k$ ;
- 2) из условия прочности и жесткости определить диаметр вала сплошного и кольцевого сечения; а также размеры вала прямоугольного сечения;
- 3) построить эпюру углов закручивания.
- 4) построить эпюры касательных напряжений для всех форм сечения.

Порядок решения рассмотрим на примере.

Задан вал (рисунок 5.2 а). Мощности, передаваемые шкивам:  $N_1 = 70 \text{ кВт}$ ,  $N_2 = 90 \text{ кВт}$ ,  $N_3 = N_4 = 100 \text{ кВт}$ . Число оборотов вала  $n = 600 \text{ мин}^{-1}$ . Допускаемый угол закручивания  $[\theta] = 0,5 \text{ град/м}$ . Допускаемое напряжение  $[\tau] = 120 \text{ МПа}$ . Модуль касательной упругости  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ . Для вала

кольцевого сечения  $c = \frac{d_o}{d_n} = 0,8$ . Для вала прямоугольного сечения  $\frac{h}{b} = 3$ .

### 1. Построение эпюры крутящих моментов $T_k$

Определим величину внешних вращающих моментов, приложенных к шкивам, по формуле:

$$T_i = 9550 \cdot \frac{N_i}{n}, \quad (5.15)$$

где  $T_i$  – внешний вращающий момент,  $H \cdot м$ ;

$N_i$  – передаваемая на вал мощность,  $кВт$ ;

$n$  – число оборотов вала,  $мин^{-1}$ .

$$T_1 = 9550 \cdot \frac{70}{600} = 1114 H \cdot м,$$

$$T_2 = 9550 \cdot \frac{90}{600} = 1433 H \cdot м,$$

$$T_3 = T_4 = 9550 \cdot \frac{100}{600} = 1592 H \cdot м.$$

При равномерном вращении вала алгебраическая сумма внешних моментов равна нулю. Пользуясь этим, найдем  $T_5$ .

Из условия равновесия внешних моментов имеем:

$$\sum M = 0, T_2 - T_1 - T_5 - T_4 + T_3 = 0, \quad (5.16)$$

$$T_5 = T_2 - T_1 - T_4 + T_3 = 1433 - 1114 - 1592 + 1592 = 319 H \cdot м.$$



При построении эпюры крутящих моментов  $T_{\kappa}$  применим метод сечений: крутящий момент  $T_{\kappa}$  в произвольном сечении каждого участка вала равен алгебраической сумме внешних моментов, действующих по одну сторону от сечения относительно оси вала. Крутящий момент  $T_{\kappa}$  в сечении считается положительным, если внешний момент вращает отсеченную часть по часовой стрелке (при взгляде на отсеченную часть со стороны сечения).

Участок I:  $0 \leq x_1 \leq 0,15 \text{ м}$

$$T_{\kappa}^I = T_2 = 1433 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Участок II:  $0,15 \text{ м} \leq x_2 \leq 0,25 \text{ м}$

$$T_{\kappa}^{II} = T_2 - T_1 = 1433 - 1114 = 319 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Участок III:  $0,25 \text{ м} \leq x_3 \leq 0,35 \text{ м}$

$$T_{\kappa}^{III} = T_2 - T_1 - T_5 = 1433 - 1114 - 319 = 0 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Участок IV:  $0,35 \text{ м} \leq x_4 \leq 0,425 \text{ м}$

$$T_{\kappa}^{IV} = T_2 - T_1 - T_5 - T_4 = 1433 - 1114 - 319 - 1592 = -1592 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Для проверки определим крутящий момент  $T_{\kappa}$  в сечении IV участка от внешнего момента, расположенного справа от сечения:

$$T_{\kappa}^{IV} = -T_3 = -1592 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов  $T_{\kappa}$  (рисунок 5.2 б):

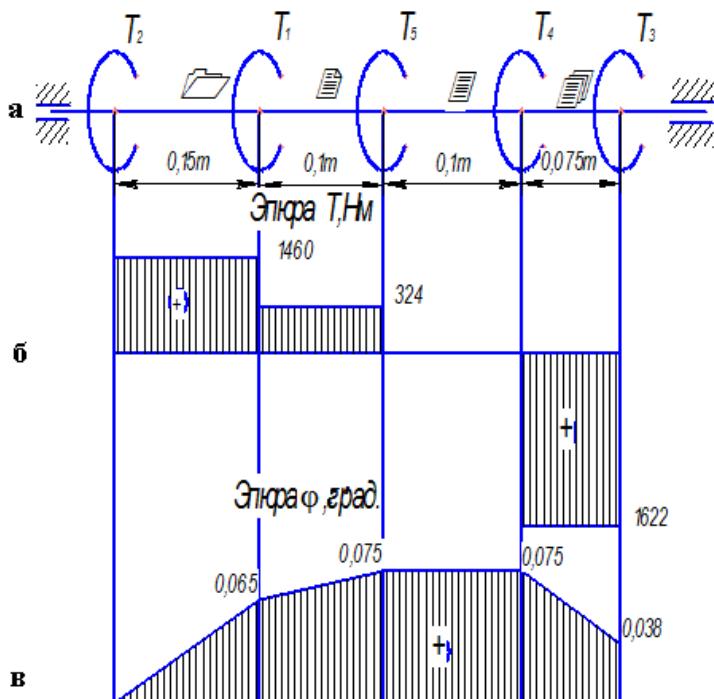


Рисунок 5.2 – Кручение вала:

а – схема нагружения вала; б – эпюра крутящих моментов в сечениях вала;  
в – эпюра углов закручивания вала

## 2. Определение поперечных размеров вала.

Как видно из эпюры крутящего момента  $T_k$ , опасное сечение вала, будет на IV участке, где крутящий момент равен:  $T_{k \max} = 1592 Н \cdot м$ . По этому моменту, без учета знака, будем проводить расчет вала.

Определим диаметр вала сплошного (круглого) сечения а) из условия прочности:

$$d = 1,72 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_{k \max}}{\tau}}, \quad (5.17)$$

$$d = 1,72 \cdot \sqrt[3]{\frac{1592}{120 \cdot 10^6}} = 4,07 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 40,7 \text{ мм}.$$

Округляем до ближайшего стандартного значения  $d = 41 \text{ мм}$ .

б) из условия жесткости:

$$d = 4,86 \cdot \sqrt[4]{\frac{T_{\kappa \text{ max}}}{G \cdot [\theta]}}, \quad (5.18)$$

$$d = 4,86 \cdot \sqrt[4]{\frac{1592}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,5}} = 6,86 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 68,6 \text{ мм}$$

Округляем до ближайшего стандартного значения  $d = 70 \text{ мм}$ .

Для обеспечения прочности и жесткости вала выбираем сечение большего диаметра ( $d = 70 \text{ мм}$ ).

Определим диаметр вала кольцевого сечения

а) из условия прочности:

$$d_n = \sqrt[3]{\frac{T_{\kappa \text{ max}}}{0,2 \cdot (1 - c^4) \cdot [\tau]}} \quad (5.19)$$

$$d_n = \sqrt[3]{\frac{1592}{0,2 \cdot (1 - 0,8^4) \cdot 120 \cdot 10^6}} = 4,83 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 48,3 \text{ мм}$$

б) из условия жесткости:

$$d_n = \sqrt[4]{\frac{T_{\kappa \text{ max}}}{0,1 \cdot G \cdot [\theta] \cdot (1 - c^4)}}, \quad (5.20)$$

$$d_n = \sqrt[3]{\frac{1592}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,8^4)}} = 2,87 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 28,7 \text{ мм}.$$

Для обеспечения прочности и жесткости вала выбираем сечение большего диаметра. С учетом требований ГОСТа принимаем  $d_n = 50 \text{ мм}$ .

$$d_6 = 0,8 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 40 \text{ мм}.$$

Определим размеры вала прямоугольного сечения из условия прочности

$$\frac{T_{\kappa \max}}{W_{\kappa}} = [\tau], \quad (5.21)$$

где  $W_{\kappa}$  – момент сопротивления кручению,  $\text{м}^3$ .

$$W_{\kappa} = \alpha \cdot h \cdot b^2. \quad (5.22)$$

Из формулы (5.21):

$$W_{\kappa} = \frac{T_{\kappa \max}}{[\tau]} = \frac{1592}{120 \cdot 10^6} = 13,27 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Зная соотношение сторон  $\frac{h}{b} = 3$  по таблице 1 определим  $\alpha = 0,267$  и, подставив в выражение  $W_{\kappa}$ , получим:

$$W_{\kappa} = 0,267 \cdot 3 \cdot b^3,$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{W_{\kappa}}{3 \cdot 0,267}} = \sqrt[3]{\frac{13,27 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 0,267}} = 2,55 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 25,5 \text{ мм},$$

$$h = 3 \cdot b = 3 \cdot 2,55 \cdot 10^{-2} = 7,65 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 76,5 \text{ мм}.$$

Применяем:  $h = 80 \text{ мм}$ ,  $b = 26 \text{ мм}$ .

### 3. Построение эпюры углов закручивания вала

Эпюру углов закручивания построим для вала сплошного сечения диаметром  $d_n = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

За начальное принимаем сечение в точке А, т. е. угол закручивания любого сечения вала вычисляем относительно сечения А, которое полагается неподвижным в процессе кручения.

Угол закручивания определим по формуле:

$$\varphi_i = \frac{T_k^i \cdot l_i}{G \cdot I_p}, \quad (5.23)$$

где  $\varphi_i$  – угол закручивания вала в  $i$ -ом сечении, град;

$T_k^i$  – крутящий момент в сечении  $i$ -го участка, Нм;

$l_i$  – длина  $i$ -го участка, м;

$G \cdot I_p$  – жесткость вала, Нм.

$G$  – модуль касательной упругости, МПа;

$I_p$  – полярный момент инерции,  $\text{м}^4$ .

Для вала круглого сечения полярный момент инерции определим по формуле:

$$I_p = 0,1 \cdot d^4. \quad (5.24)$$

Тогда жесткость вала равна:

$$G \cdot I_p = 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot (7 \cdot 10^{-2})^4 = 1,92 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

Угол поворота сечения В относительно сечения А:

$$\varphi_B = \frac{T_k^I \cdot l_I}{G \cdot I_p} = \frac{1433 \cdot 0,15}{1,92 \cdot 10^5} = 0,00112 \text{ рад} = 0,064^\circ.$$

Угол поворота сечения С относительно сечения А:

$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{T_{\kappa}^{II} \cdot l_{II}}{G \cdot I_p} = 0,00112 + \frac{319 \cdot 0,1}{1,92 \cdot 10^5} = 0,00129 \text{ рад} = 0,074^\circ.$$

Угол поворота сечения Д относительно сечения А:

$$\varphi_D = \varphi_C + \frac{T_{\kappa}^{III} \cdot l_{III}}{G \cdot I_p} = 0,00129 + \frac{0 \cdot 0,1}{1,92 \cdot 10^5} = 0,00129 \text{ рад} = 0,074^\circ.$$

Угол поворота сечения Е относительно сечения А:

$$\varphi_E = \varphi_D + \frac{T_{\kappa}^{IV} \cdot l_{VI}}{G \cdot I_p} = 0,00129 - \frac{1592 \cdot 0,075}{1,92 \cdot 10^5} = 0,000668 \text{ рад} = 0,038^\circ$$

По результатам расчетов строим эпюру углов закручивания вала (рисунок 5.2 в).

4. Построение эпюр касательных напряжений для всех трех форм сечений.

Для вала круглого сечения  $d = 4,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  (рисунок 5.3 а).

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\kappa \max}}{W_p}, \quad (5.25)$$

где  $W_p$  – полярный момент инерции,  $\text{м}^3$ .

Для вала круглого сечения полярный момент инерции определим по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{1592}{13,78 \cdot 10^{-6}} = 115,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 115,5 \text{ МПа}.$$

$$W_p = 0,2 \cdot d^3 = 0,2 \cdot (4,1 \cdot 10^{-2})^3 = 13,78 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

Для вала круглого сечения  $d = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  (рисунок 5.3 б).

$$W_p = 0,2 \cdot d^3 = 0,2 \cdot (7 \cdot 10^{-2})^3 = 68,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$\tau_{\max} = \frac{1592}{68,6 \cdot 10^{-6}} = 23,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 23,2 \text{ МПа} .$$

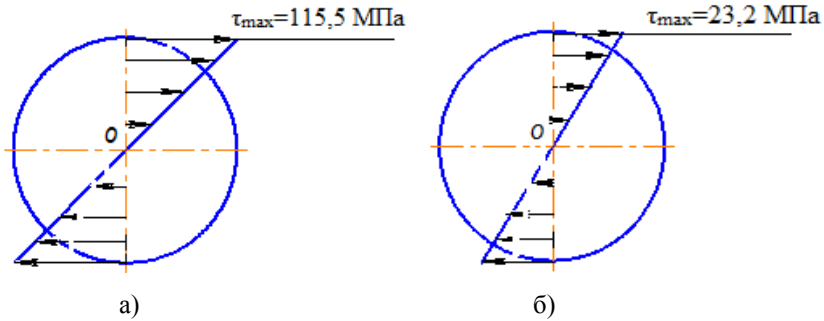


Рисунок 5.3 – Эпюры касательных напряжений:

а – для вала круглого сечения  $d = 4,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;

б – для вала круглого сечения  $d = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$

Для вала кольцевого сечения  $d_{\text{н}} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $d_{\text{в}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$   
(рисунок 5.4):

$$W_p = 0,2 \cdot d_{\text{н}}^3 \cdot (1 - c^4) = 0,2 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^3 \cdot (1 - 0,8^4) = 14,76 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 ,$$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\text{к max}}}{W_p} = \frac{1592}{14,76 \cdot 10^{-6}} = 23,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 107,9 \text{ МПа} .$$

$$\tau_{\text{в}} = \frac{T_{\text{в}}}{I_p} \cdot \rho_{\text{в}} ,$$

$$\rho_{\text{в}} = \frac{d_{\text{в}}}{2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м} ,$$

$$I_p = 0,1 \cdot d_{\text{н}}^4 \cdot (1 - c^4) = 0,1 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^4 \cdot (1 - 0,8^4) = 36,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 ,$$

$$\tau_{\text{в}} = \frac{1592}{36,9 \cdot 10^{-8}} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 86,3 \text{ МПа} .$$

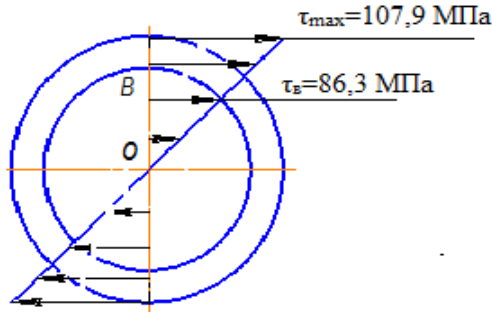


Рисунок 5.4 – Эпюра касательных напряжений кольцевого вала

Для вала прямоугольного сечения  $h = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  
 $b = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  (рисунок 5.5). По таблице 1 при  $\frac{h}{b} = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{2,6 \cdot 10^{-2}} = 3$   
 принимаем  $\alpha = 0,267, \gamma = 0,75$ :

$$W_K = \alpha \cdot h \cdot b^2 = 0,267 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot (2,6 \cdot 10^{-2})^2 = 14,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$\tau_{\max} = \tau_A = \frac{T_K \max}{W_K} = \frac{1592}{14,4 \cdot 10^{-6}} = 110,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 110,6 \text{ МПа},$$

$$\tau_B = \gamma \cdot \tau_{\max} = 0,75 \cdot 110,6 = 83 \text{ МПа}.$$

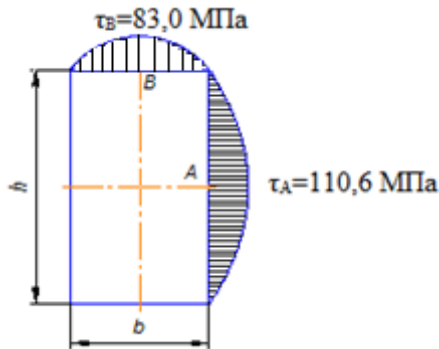


Рисунок 5.5 – Эпюра касательных напряжений для вала прямоугольного сечения



Таблица 1 – Значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$

$\frac{h}{b}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1,00	0,208	0,141	1,00
1,20	0,219	0,166	0,93
1,25	0,221	0,172	0,91
1,50	0,231	0,186	0,86
1,75	0,239	0,214	0,82
2,00	0,246	0,229	0,79
2,50	0,258	0,249	0,77
3,00	0,267	0,263	0,75
4,00	0,282	0,281	0,74
5,00	0,291	0,291	0,74
6,00	0,299	0,299	0,74
8,00	0,307	0,307	0,74
10,00	0,312	0,312	0,74
$\infty$	0,333	0,333	0,74

По ГОСТ 2590-88 для проката стального горячекатаного круглого стандартными являются диаметры: 5, 5,5, 6, 6,3, 6,5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,17, 18, 19, 20, 21, 22, 23,24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46,47,48, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 63, 65, 67, 68, 70, 72, 75, 78, 80, 82, 85, 87, 90, 92, 95, 97, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130,135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180,185, 190, 195, 200,210, 220, 230, 240, 250, 260,270.

### Контрольные вопросы

1. Определение напряжений при кручении.
2. Определение деформаций при кручении.
3. Расчет на прочность по допускаемым напряжениям при кручении.
4. Расчет на жесткость при кручении.

## ТЕМА 6. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

### 6.1 Понятие о деформации изгиба.

#### Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил

Поперечный изгиб стержня возникает при действии на него сил, перпендикулярных его оси и лежащих в плоскости симметрии стержня, или пар сил, плоскости которых проходят через ось. Стержень при таком нагружении принято называть балкой.

Деформация изгиба состоит в том, что ось балки искривляется, поперечные сечения балки наклоняются друг к другу, волокна балки удлиняются с выпуклой стороны и укорачиваются с вогнутой. Слой, в котором волокна не меняют своей длины, называется нейтральным слоем. Прямая, по которой нейтральный слой пересекается с поперечным сечением, называется нейтральной осью.

Балка воспринимает давление от других элементов конструкции и передает их на опоры. Эти давления и реакции опор являются внешними силами балки (нагрузками).

Существующие опоры балок, при всем многообразии их конструкций, относятся к одному из трёх видов: шарнирно-неподвижная опора, шарнирно-подвижная опора и защемление.

Шарнирно-неподвижная опора ( $A$ , рисунок 6.1) позволяет опорному сечению свободно поворачиваться вокруг шарнира  $A$ , но не допускает перемещения этого сечения вдоль оси. Опора этого вида в ответ на нагружение балки порождает две неизвестные реакции  $N_A$  и  $H_A$ .

Шарнирно-подвижная опора ( $B$ , рисунок 6.1) в отличие от неподвижной допускает осевое перемещение опорного сечения и потому порождает только одну неизвестную (по величине) реакцию  $R_B$ .

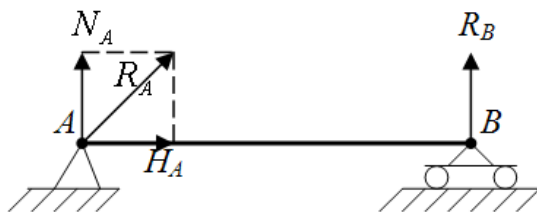


Рисунок 6.1 – Шарнирно-неподвижная и шарнирно-подвижная опоры

Защемление (рисунок 6.2) получается из шарнирно-неподвижной опоры уничтожением шарнира и, следовательно, не допускает никаких перемещений опорного сечения. Защемление порождает три неизвестных реакции: силы  $N_A$ ,  $H_A$  и опорный момент  $M_A$ .

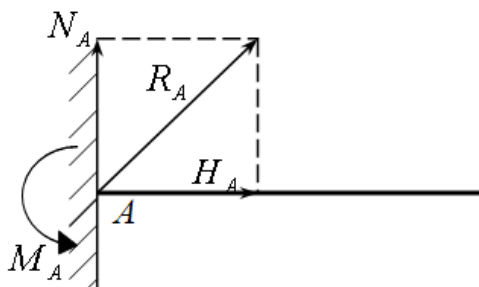


Рисунок 6.2 – Защемление

Устройство опор балок далеко не всегда соответствует схемам, приведенным выше. Чтобы отнести опору к тому или иному виду, надо установить – допускает ли её устройство хотя бы небольшой поворот или перемещение. При этом надо иметь в виду, что деформации балок весьма малы.

Для определения напряжений в сечениях балки необходимо уметь выражать внутренние силы (усилия) в любом сечении через внешние силы.

При изгибе балки в любом её поперечном сечении возникают элементарные касательные и нормальные усилия, которые приводятся к силе  $Q$  и паре с моментом  $M$ .

Сила  $Q$  складывается из элементарных касательных усилий и называется поперечной силой.

Для выражения силы  $Q$  через внешние силы применяют метод сечений. Рассекают балку на две части плоскостью и рассматривают равновесие левой отсечённой части.

Поперечная сила  $Q$  численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на плоскость самого сечения.

Поперечная сила в сечении считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена вверх, а справа – вниз, и отрицательна в противоположном случае (рисунок 6.3).

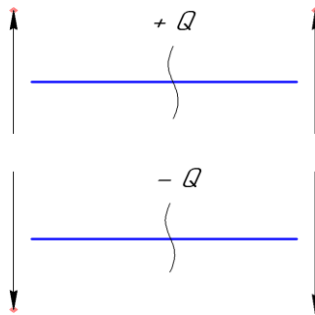


Рисунок 6.3 – Определение знака поперечной силы

Момент внутренних сил  $M$  складывается из моментов элементарных нормальных усилий и называется изгибающим моментом.

Изгибающий момент  $M$  в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно поперечной оси сечения.

Изгибающий момент принято считать положительным, если внешняя нагрузка изгибает балку выпуклостью вниз или стремится повернуть левую часть балки по направлению хода часовой стрелки, а правую часть против хода часовой стрелки и отрицательным, если внешняя нагрузка изгибает балку вы-

пуклостью вверх или стремится повернуть левую часть балки против хода часовой стрелки, а правую часть по направлению хода часовой стрелки.

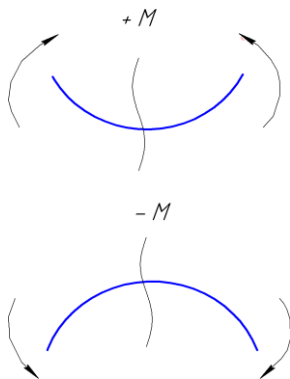


Рисунок 6.4 – Определение знака изгибающего момента

Графики распределения перерезывающих сил и изгибающих моментов по длине балки называют эпюрами.

При построении эпюры  $Q$  и  $M$  балку разбивают на участки, границами которых являются точки приложения сосредоточенных сил и окончания действия распределенных нагрузок.

На каждом участке берут произвольное сечение и составляют аналитические выражения для  $Q$  и  $M$ , которые справедливы в пределах рассматриваемого участка.

Для построения эпюры на данном участке достаточно получить две точки – в начале и в конце участка. Подставив в найденные выражения  $Q$  и  $M$  абсциссу начала и конца участка, определяют их величины.

Положительные значения  $Q$  и  $M$  откладывают вверх от оси эпюры, отрицательные вниз.

Эпюра  $M$  получается построенной со стороны сжатых волокон.

Ниже для примера построены эпюры  $Q$  и  $M$ .

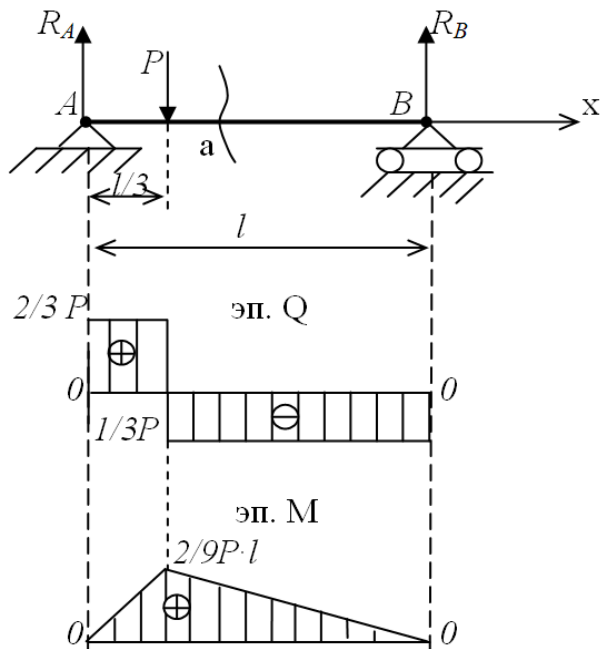


Рисунок 6.5 – Эпюры Q и M для заданной балки

Реакции опоры:

$$\sum M_A = 0. \quad R_B l - P \cdot l/3 = 0,$$

$$R_B = P/3.$$

$$R_B + R_A = P,$$

$$R_A = 2/3 P.$$

В сечении  $x = a$ .

$$Q_a = R_a - P = -1/3 P$$

или

$$Q_a = -R_B = -1/3 P.$$

$$M_a = \frac{2}{3} P \frac{1}{3} l = \frac{2}{9} Pl \text{ или } M_a = \frac{1}{3} P \frac{2}{3} l = \frac{2}{9} Pl.$$

Между изгибающим моментом  $M$ , поперечной силой  $Q$  и интенсивностью распределённой нагрузки  $q$  установлены (Д. И. Журавским) следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x), \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q, \quad \text{или} \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q. \quad (6.1)$$

Проверку эпюр  $Q$  и  $M$  осуществляют на основании правил, вытекающих из дифференциальных зависимостей:

- на участках балки, где нет распределенной нагрузки, эпюра  $Q$  ограничена горизонтальной прямой, а эпюра  $M$  – наклонной прямой;

- на участках балки с равномерно распределенной нагрузкой эпюра  $Q$  ограничена прямой наклоненной линией, а эпюра  $M$  – параболой. При этом: а) наклон эпюры  $Q$  идет в сторону действия нагрузки; б) выпуклость параболы обращена в сторону, противоположную направлению действия нагрузки;

- на участках балки с положительной  $Q$  момент возрастает, а на участках, где  $Q$  отрицательна – убывает;

- в сечениях, где  $Q$  меняет знак, изгибающий момент имеет экстремальное значение. Если  $Q$  меняет знак с «+» на «-», то момент максимален, если с «-» на «+», то минимален;

- в сечении, где приложена сосредоточенная сила на эпюре  $Q$  будет «скачок» на величину и в направлении приложенной силы, а на эпюре  $M$  – излом графика;

- в сечении, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре  $M$  получается «скачок» на величину момента. Если момент действует по часовой стрелке – «скачок» вверх, если против часовой стрелки – вниз;

– если на участке поперечная сила равна нулю, то эпюра  $M$  ограничена горизонтальной прямой.

## 6.2 Нормальные напряжения при изгибе

Если система внешних сил, приложенных к балке, приводится к парам сил, то есть поперечные силы в сечениях отсутствуют, то деформация балки называется чистым изгибом (рисунок 6.6). При чистом изгибе в сечениях балки действуют только нормальные напряжения  $\sigma$ , которые приводятся к изгибающему моменту  $M$ .

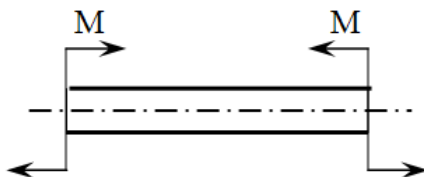


Рисунок 6.6 – Пример чистого изгиба

Практически чистый изгиб осуществим только при условии, что собственный вес балки мал по сравнению с внешними нагрузками.

В основу теории чистого изгиба положены следующие предположения (допущения):

1. При чистом изгибе плоские поперечные сечения остаются плоскими (гипотеза плоских сечений).
2. Продольные волокна друг на друга не давят и испытывают простое линейное растяжение или сжатие.
3. Деформации волокон и, следовательно, нормальные напряжения изменяются только по высоте сечения (по ширине сечения остаются постоянными).

Кроме того, следует иметь в виду следующие ограничения:

1. Балка имеет плоскость симметрии, и все внешние силы лежат в этой плоскости.



2. Материал балки подчиняется закону Гука, причём модуль упругости при растяжении и сжатии одинаков.

3. Соотношения между размерами балки обеспечивают условия плоского изгиба, при котором ось балки остаётся в плоскости действия внешних сил.

Для отыскания нормальных напряжений при изгибе применяют метод сечений.

Балку, подвергающуюся чистому изгибу парами  $M$ , разрежем сечением 1-1 на две части и рассмотрим равновесие одной части, например левой (рисунок 6.7).

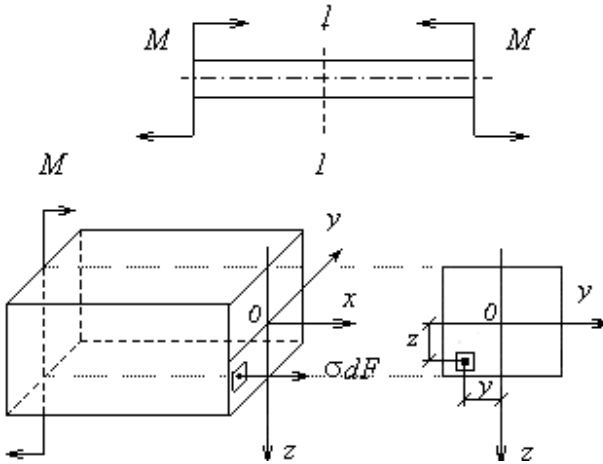


Рисунок 6.7 – Сечение балки при чистом изгибе

Плоскость координат  $xoy$  совместим с нейтральным слоем, положение которого пока неизвестно. Ось  $z$  направим вниз по линии пересечения плоскости симметрии с плоскостью сечения 1-1.

Для равновесия пространственной системы сил можно записать шесть известных уравнений статики. В данном случае три из них по очевидным причинам обращаются в тождества:

$$\sum Y = 0, \sum Z = 0, \sum M_x = 0. \quad (6.2)$$

Остальные три приводят к следующим результатам:

$$\sum X = 0, \int_F \sigma dF = 0, \quad (6.3)$$

$$\sum M_y = 0, \int_F \sigma z dF = M, \quad (6.4)$$

$$\sum M_z = 0, \int_F \sigma y dF = 0. \quad (6.5)$$

Однако найти  $\sigma$  из этих уравнений невозможно, пока неизвестен закон распределения  $\sigma$  по высоте сечения, и неизвестно положение нейтральной оси. Для решения этих вопросов рассмотрим деформацию балки. Выделим элемент балки длиной  $dx$  и установим его вид после деформации (рисунок 6.8).

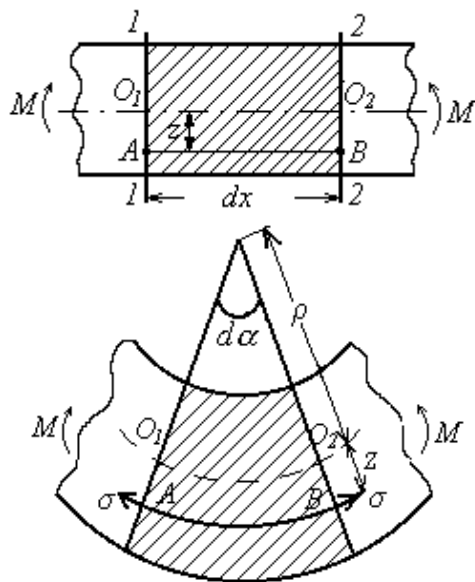


Рисунок 6.8 – Элемент балки, подверженный действию внешнего изгибающего момента

Найдём удлинение волокна  $AB$  лежащего на расстоянии  $z$  от нейтрального слоя. Первоначальная длина  $l$  волокна  $AB$  равна  $O_1O_2$ , или  $l = \rho d\alpha$ , где  $\rho$  – радиус кривизны нейтрального слоя.

После деформации длина волокна измеряется по дуге  $AB$  и будет равна:

$$l + \Delta l = (\rho + z) d\alpha.$$

Отсюда абсолютное и относительное удлинения,  $\Delta l$  и  $\varepsilon$ , равны:

$$\Delta l = (\rho + z) d\alpha - \rho d\alpha = z d\alpha;$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon = \frac{z}{\rho}. \quad (6.6)$$

Таким образом, относительные удлинения волокон пропорциональны их расстояниям до нейтрального слоя.

Исходя из гипотезы об отсутствии давления волокон друг на друга и закона Гука, заключаем, что каждое волокно испытывает простое растяжение (сжатие) под действием нормальных напряжений

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{E \cdot z}{\rho}. \quad (6.7)$$

На нейтральной оси (при  $z=0$ )  $\sigma=0$ . При переходе в сжимающую зону ( $z<0$ )  $\sigma$  меняют знак вместе с  $z$  (становятся сжимающими). Наибольшего значения  $\sigma$  достигают при  $z = z_{max}$ , то есть в крайних волокнах (рисунок 6.9).

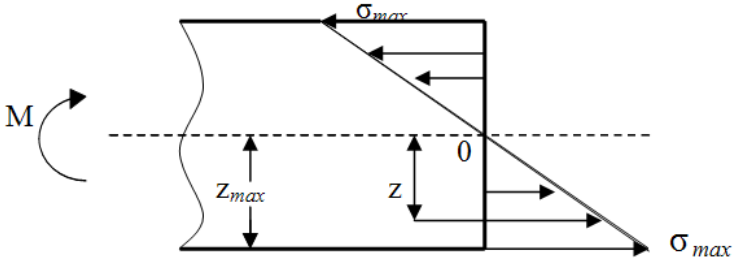


Рисунок 6.9 – Эпюра нормальных напряжений при изгибе

Подставим  $\sigma$  (6.7) в уравнение (6.3) и получим:

$$\int_F \sigma dF = \int_F \frac{E}{\rho} z dF = 0.$$

При  $\frac{E}{\rho} = const$  имеет место  $\int_F \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_F z dF = 0.$

Следовательно,

$$\int_F z \cdot dF = S_y = 0. \quad (6.8)$$

Этот интеграл ( $S_y$ ) является статическим моментом площади сечения относительно нейтральной оси  $y$ . Его равенство нулю означает, что нейтральная ось является центральной (проходит через центр тяжести сечения).

Таким образом, положение нейтральной оси и нейтрального слоя вполне определено.

Подставим  $\sigma$  (6.7) в уравнение (6.5) и получим:

$$\int_F \sigma \cdot y \cdot dF = \frac{E}{\rho} \int_F y \cdot z \cdot dF = 0,$$

$$\int_F y \cdot z \cdot dF = J_{yz} = 0. \quad (6.9)$$

Этот интеграл ( $J_{yz}$ ) называется центробежным моментом инерции относительно осей  $y$  и  $z$ . Для сечения, симметричного относительно оси  $z$  он равен нулю.

Этим подтверждается, что соблюдены требования плоского изгиба о наличии плоскости симметрии балки и расположении внешних сил в этой плоскости.

Заметим, что оси, относительно которых центробежные моменты инерции равны нулю, называются главными осями инерции сечения.

Наконец, подставим  $\sigma$  (6.7) в уравнение (6.4) и получим:

$$\int_F \sigma \cdot z \cdot dF = M, \quad \frac{E}{\rho} \int_F z^2 \cdot dF = M,$$

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M}{J_y}, \quad (6.10)$$

где  $J_y = \int_F z^2 \cdot dF$  – осевой момент инерции площади сечения

относительно оси  $y$  (сумма произведений площадок  $dF$  на квадраты их расстояний до оси  $y$ ).

Подставим (6.10) в (6.7) и получим формулу для вычисления  $\sigma$  при чистом изгибе:

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{J}. \quad (6.11)$$

Индекс  $y$  опущен, так как  $J$  всегда вычисляется относительно нейтральной оси сечения.

Из (6.10) можно записать  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$ .

Отсюда следует, что произведение  $EJ$  характеризует способность балки сопротивляться искривлению (изгибу) в зависимости от формы и размеров сечения и материала балки. Величину  $EJ$  называют жесткостью балки при изгибе.

Формулу максимальных напряжений в сечении балки:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{J} z_{max}$$

принято записывать в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W}, \quad (6.12)$$

где  $W = \frac{J}{z_{max}}$  – осевой момент сопротивления сечения.

В итоге из (6.11) следует, что нормальные напряжения в любой точке сечения прямо пропорциональны величине изгибающего момента и расстоянию от точки до нейтральной оси и обратно пропорциональны моменту инерции сечения относительно нейтральной оси.

Для проверки прочности балки по нормальным напряжениям необходимо найти опасное сечение, в котором  $M = M_{max}$ . Тогда условие прочности по нормальным напряжениям можно записать в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (6.13)$$

Если материал балки неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо составить два условия прочности:

$$\sigma_p = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma_p] \text{ и } \sigma_{сж} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma_{сж}]. \quad (6.14)$$

Из условия прочности следует, что осевой момент сопротивления  $W$  характеризует влияние формы и размеров сечения балки на её прочность.

### 6.3 Касательные напряжения при изгибе

Рассмотрим общий случай прямого изгиба, когда в сечениях балки наряду с изгибающими моментами  $M$  действуют также перерезывающие силы  $Q$ , к которым приводятся касательные напряжения  $\tau$ . Относительно  $\tau$  сделаем следующие предположения:

1) направления  $\tau$  параллельны силе  $Q$ , которая является их равнодействующей;

2) касательные напряжения на площадках, расположенных на равных расстояниях от нейтральной оси равны между собой.

В теории упругости доказано, что эти предположения (предложенные Д. И. Журавским) вполне приемлемы для балок прямоугольного сечения.

Выясним закон распределения  $\tau$  по высоте сечения. Для этого, выделим сечениями  $mn$  и  $m_1n_1$  элемент балки длиной  $dx$ , отсечём его нижнюю часть плоскостью  $PP_1$ , параллельной нейтральному слою, и рассмотрим равновесие отсечённого элемента (рисунок 6.10).

Фасадные грани отсечённого элемента свободны от напряжений. На грани, параллельной нейтральному слою, в соответствии с законом парности действуют:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Их равнодействующая равна  $\tau_{xz} b dx$ .

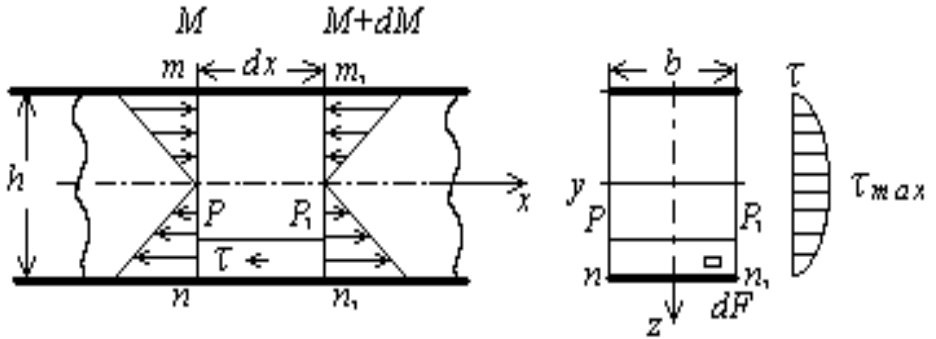


Рисунок 6.10 – Касательные напряжения при изгибе, эпюра касательных напряжений

Напряжения  $\tau_{zx}$  на боковых гранях элемента (в сечениях  $mn$  и  $m_1n_1$ ) в рассмотрение не входят, как перпендикулярные оси  $x$ .

Нормальные напряжения на левой грани элемента (в сечении  $mn$ ) на площадке  $dF$  создают усилие:

$$\sigma \cdot dF = \frac{M \cdot z}{J} \cdot dF . \quad (6.15)$$

Сумма этих усилий по площади грани равна:

$$\int_{z_1}^{h/2} \frac{M \cdot z}{J} \cdot dF , \quad (6.16)$$

где  $z_1$  – расстояние от нейтрального слоя до плоскости  $PP_1$ .

Аналогично, на правой грани элемента (в сечении  $m_1n_1$ ) действует суммарное осевое усилие:

$$\int_{z_1}^{h/2} \frac{M + dM}{J} \cdot z \cdot dF . \quad (6.17)$$



Усилия  $\tau_{xz} b dx$  и усилия (6.16), (6.17) должны удовлетворять уравнению равновесия отсечённого элемента:

$$\sum X = 0, \text{ или}$$

$$\tau_{xz} \cdot b \cdot dx = \int_{z_1}^{h/2} \frac{M + dM}{J} \cdot z \cdot dF - \int_{z_1}^{h/2} \frac{M}{J} \cdot z \cdot dF, \text{ откуда}$$

$$\tau_{xz} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{bJ} \int_{z_1}^{h/2} z \cdot dF.$$

В этом уравнении  $\frac{dM}{dx} = Q$ , а  $\int_{z_1}^{h/2} z \cdot dF = S_y^0$  – статический момент площади отсечённой части сечения относительно нейтральной оси.

В итоге для вычисления касательных напряжений при прямом изгибе получается следующая формула (формула Журавского):

$$\tau = \frac{Q \cdot S_y^0}{J \cdot b}. \quad (6.18)$$

Из (6.18) следует, что закон распределения  $\tau$  по высоте сечения определяется законом изменения  $S_y^0$  от координаты  $z$ .

Для прямоугольного сечения  $dF = b \cdot dz$  и

$$S_y^0 = \int_{z_1}^{h/2} b \cdot z \cdot dz = \left| \frac{b \cdot z^2}{2} \right|_{z_1}^{h/2} = \frac{b}{8} (h^2 - 4 \cdot z_1^2).$$

Момент инерции площади прямоугольного сечения относительно нейтральной оси  $y$  равен:

$$J = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

После подстановки в (6.18) выражений  $S_y^0$  и  $J$  для прямоугольной балки получаем:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{b \cdot h} \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{h^2}\right). \quad (6.19)$$

Отсюда следует, что  $\tau$  изменяются по высоте сечения по параболическому закону (рисунок 6.10). Максимум  $\tau$  достигают в точках нейтральной оси ( $z=0$ ), а у краёв сечения ( $z=\pm h/2$ ) они обращаются в нуль.

При выводе формулы для  $\tau$  мы использовали закон для  $\sigma$ , полученный при чистом изгибе. Правомерность такого подхода объясняется весьма слабым влиянием  $\tau$  на картину чистого изгиба.

Действие касательных напряжений порождает сдвиг, который заставляет сечения балки искривляться. Однако пока поперечная сила остается постоянной по длине, искривление всех сечений получается одинаковым и не влияет на деформации растяжения (или сжатия) продольных волокон.

В случае, когда на балку действует распределённая нагрузка, и величина поперечной силы непрерывно меняется по длине балки, искривление поперечных сечений также не оказывает существенного влияния на деформации продольных волокон от действия изгибающего момента.

Рассмотрим условие прочности материала по касательным напряжениям.

Следует иметь в виду, что чаще всего балка прямоугольного сечения, в которой нормальные напряжения ниже допускаемых, оказывается недогруженной по касательным напряжениям.

Однако в частном случае, когда при большой поперечной силе изгибающий момент невелик, величина касательных напряжений может определять требуемые размеры балки.

Условие прочности балки по касательным напряжениям в общем случае имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}^0}{J \cdot b(z)} \leq [\tau]. \quad (6.20)$$

где  $Q_{\max}$  – поперечная сила в опасном сечении;

$S_{\max}^0$  – максимальное значение статического момента, определяющее  $\tau_{\max}$  по высоте сечения;

$b(z)$  – ширина сечения в том слое, для которого вычисляются напряжения.

В частном случае, для балки прямоугольного сечения условие прочности балки по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\max}}{b \cdot h} \leq [\tau]. \quad (6.21)$$

## 6.4 Пример расчета балок на прочность

### Пример 1

Построить эпюры  $Q$  и  $M$  для балки, показанной на рисунке 6.11 а.

1. Определяем опорные реакции, составляя уравнения моментов относительно опоры  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum M_A &= M - F \cdot 4 + R_B \cdot 3 - 3 \cdot q \cdot 1,5 = 0, \\ R_B &= \frac{F \cdot 4 + 3 \cdot q \cdot 1,5 - M}{3} = \frac{30 \cdot 4 + 3 \cdot 20 \cdot 1,5 - 10}{3} = \frac{200}{3} \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\sum M_B = M - F \cdot 1 - R_A \cdot 3 + 3 \cdot q \cdot 1,5 = 0,$$

$$R_A = \frac{-F \cdot 1 + 3 \cdot q \cdot 1,5 + M}{3} = \frac{-30 \cdot 1 + 3 \cdot 20 \cdot 1,5 + 10}{3} = \frac{70}{3} \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = \frac{70}{3} + \frac{200}{3} - 30 - 20 \cdot 3 = 0.$$

2. Разбиваем балку на участки. Балка имеет три участка, пометим их на схеме римскими цифрами.

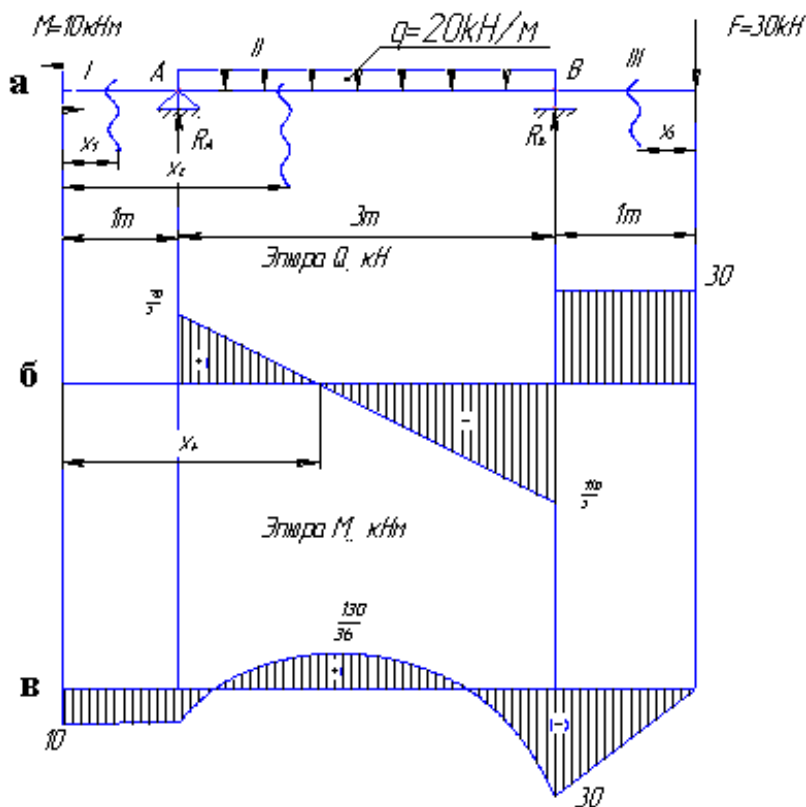


Рисунок 6.11 – Поперечный изгиб балки:

а – схема балки; б – эпюра поперечных сил  $Q$ , кН;

в – эпюра изгибающих моментов  $M$ , кНм

3. Для произвольного сечения каждого участка составляем выражения  $Q$  и  $M$ , а затем вычисляем их значения в начале и конце участка.

Для 1 участка  $0 \leq x_1 \leq 1\text{ м}$

$$Q_1 = 0;$$

$$M_1 = -M = -10\text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для 2 участка  $1 \leq x_2 \leq 4\text{ м}$

$$Q_2 = R_A - q \cdot (x_2 - 1);$$

$$M_2 = R_A \cdot (x_2 - 1) - M - q \cdot \frac{(x_2 - 1)^2}{2};$$

$$\text{при } x_2 = 1\text{ м } Q_2 = R_A = \frac{70}{3}\text{ кН}; M_2 = -M = -10\text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } x_2 = 4\text{ м } Q_2 = R_A - q \cdot (4 - 1) = \frac{70}{3} - 20 \cdot 3 = \frac{110}{3}\text{ кН};$$

$$M_2 = R_A \cdot 3 - M - q \cdot \frac{3^2}{2} = \frac{70}{3} \cdot 3 - 10 - 20 \cdot \frac{3^2}{2} = -30\text{ кН} \cdot \text{м};$$

Построив по этим данным эпюру  $Q$ , обнаруживаем, что в некотором сечении на этом участке усилие обращается в нуль, а это значит, что в сечении момент имеет экстремальное значение. Найдем его. Из условия  $Q_2 = 0$  найдем абсциссу  $x_0$  сечения, в котором действует  $M_{\max}$ :

$$Q_2 = R_A - q \cdot (x_0 - 1) = 0;$$

$$x_0 = \frac{R_A + q}{q} = \frac{\frac{70}{3} + 20}{20} = \frac{13}{6};$$

$$M_{\max 2} = R_A \cdot (x_0 - 1) - M - q \cdot \frac{(x_0 - 1)^2}{2} = \frac{70}{3} \cdot \left(\frac{13}{6} - 1\right) - 10 - 20 \cdot \frac{\left(\frac{13}{6} - 1\right)^2}{2} = \frac{130}{36} \kappa H \cdot m.$$

Для 3 участка  $0 \leq x_3 \leq 1m$

$$Q_3 = F = 30 \kappa H;$$

$$M_3 = -F \cdot x_3,$$

$$\text{при } x_3 = 0m, M_3 = 0,$$

$$\text{при } x_3 = 1m, M_3 = -30 \cdot 1 = -30 \kappa H \cdot m.$$

4. По полученным значениям  $Q$  и  $M$  строим эпюры (рисунки 6.11 б и в).

### Пример 2

Для балки, показанной на рисунке 6.13 а, построить эпюры  $Q$  и  $M$ , подобрать следующие варианты сечений (рисунок 6.12) и дать оценку рациональности сечения. Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.

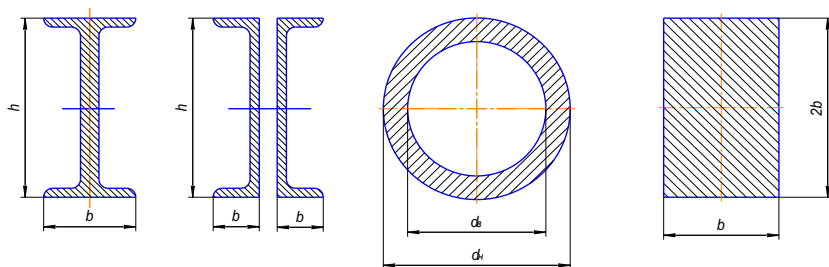


Рисунок 6.12 – Рассматриваемые сечения

1. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = F \cdot 1 + M + R_B \cdot 6 - M - 5 \cdot q \cdot 4,5 = 0,$$

$$R_B = \frac{-F \cdot 1 - M + M + 5 \cdot q \cdot 4,5}{6} = 66,7 \kappa H.$$

$$\sum M_B = F \cdot 7 + M + 5 \cdot q \cdot 1,5 - R_A \cdot 6 - M = 0,$$

$$R_A = \frac{F \cdot 7 + M + 5 \cdot q \cdot 1,5 - M}{6} = 83,3 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum Y = R_A + R_B - F - 5 \cdot q = 83,3 + 66,7 - 50 - 5 \cdot 20 = 0.$

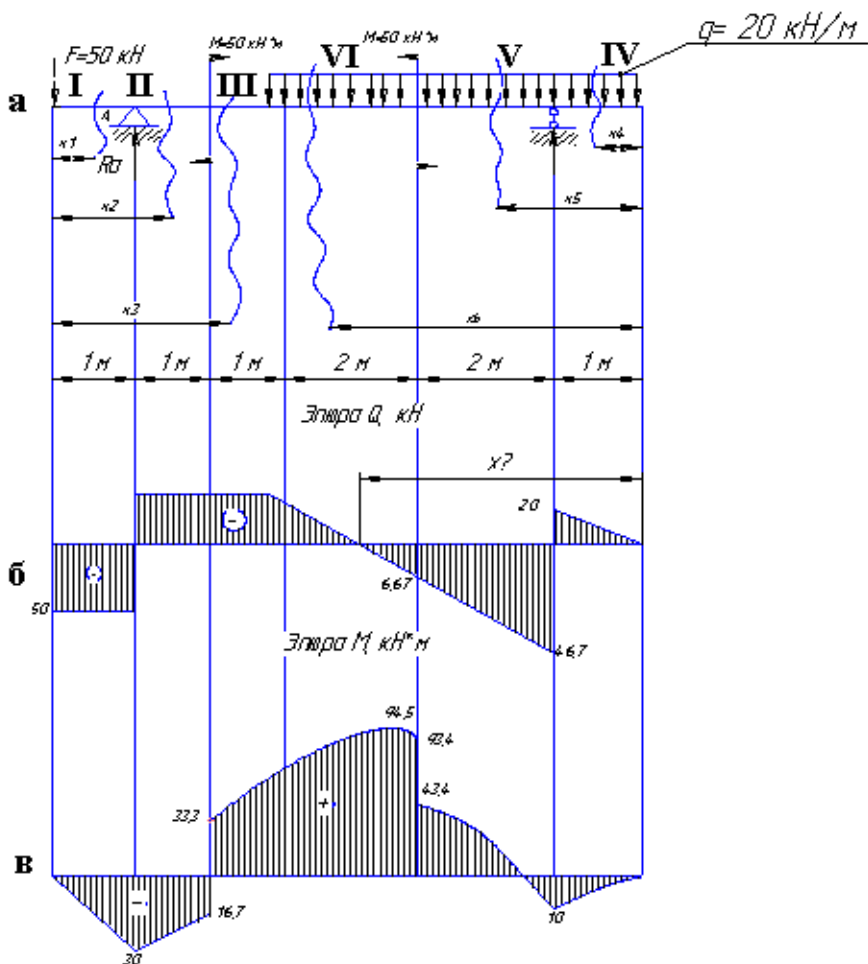


Рисунок 6.13 – Поперечный изгиб балки:

а – схема балки; б – эпюра поперечных сил  $Q$ , кН; в – эпюра изгибающих моментов  $M$ , кНм

2. Разбиваем балку участки. Балка имеет шесть участков. Направление отсчета для первых трех участков слева направо. Для трех последних – справа налево.

3. Для произвольного сечения каждого участка составляем выражения  $Q$  и  $M$ , а затем вычисляем их значения в начале и в конце участка.

Для 1 участка  $0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$

$$Q_1 = -F = -50 \text{ кН};$$

$$M_1 = -F \cdot x_1,$$

$$\text{при } x_1 = 0 \text{ м}, M_1 = 0,$$

$$\text{при } x_1 = 1 \text{ м}, M_1 = -50 \cdot 1 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для 2 участка  $1 \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$

$$Q_2 = -F + R_A = -50 + 83,3 = 33,3 \text{ кН};$$

$$M_2 = -F \cdot x_2 + R_A \cdot (x_2 - 1),$$

$$\text{при } x_2 = 1 \text{ м}, M_2 = -50 \cdot 1 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$\text{при } x_2 = 2 \text{ м}, M_2 = -50 \cdot 2 + 83,3 \cdot 1 = -16,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для 3 участка  $2 \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$

$$Q_3 = -F + R_A = -50 + 83,3 = 33,3 \text{ кН};$$

$$M_3 = -F \cdot x_3 + R_A \cdot (x_3 - 1) + M,$$

$$\text{при } x_3 = 2 \text{ м}, M_3 = -50 \cdot 2 + 83,3 \cdot (2 - 1) + 50 = 33,3 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$\text{при } x_3 = 3 \text{ м}, M_3 = -50 \cdot 3 + 83,3 \cdot (3 - 1) + 50 = 66,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для 4 участка  $0 \leq x_4 \leq 1 \text{ м}$

$$Q_4 = q \cdot x_4,$$

$$M_4 = -\frac{q \cdot x_4^2}{2},$$



при  $x_4 = 0 \text{ м}$ ,  $Q_4 = 0$ ,  $M_4 = 0$ ,

при  $x_4 = 1 \text{ м}$ ,  $Q_4 = 20 \cdot 1 = 20 \text{ кН}$ ,  $M_4 = -\frac{20 \cdot 1^2}{2} = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Для 5 участка  $1 \leq x_5 \leq 3 \text{ м}$

$$Q_5 = q \cdot x_5 - R_B,$$

$$M_5 = -\frac{q \cdot x_5^2}{2} + R_B \cdot (x_5 - 1),$$

при  $x_5 = 1 \text{ м}$ ,  $Q_5 = 20 \cdot 1 - 66,7 = 46,7 \text{ кН}$ ,

$$M_5 = -\frac{20 \cdot 1^2}{2} + 66,7 \cdot (1 - 1) = -10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

при  $x_5 = 3 \text{ м}$ ,  $Q_5 = 20 \cdot 3 - 66,7 = 6,67 \text{ кН}$ ,

$$M_5 = -\frac{20 \cdot 3^2}{2} + 66,7 \cdot 2 = 43,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для 6 участка  $3 \leq x_6 \leq 5 \text{ м}$

$$Q_6 = q \cdot x_6 - R_B,$$

$$M_6 = -\frac{q \cdot x_6^2}{2} + R_B \cdot (x_6 - 1) + M,$$

при  $x_6 = 3 \text{ м}$ ,  $Q_6 = 20 \cdot 3 - 66,7 = 6,67 \text{ кН}$ ,

$$M_6 = -\frac{20 \cdot 3^2}{2} + 66,7 \cdot (3 - 1) + 50 = -93,3 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

при  $x_6 = 5 \text{ м}$ ,  $Q_6 = 20 \cdot 5 - 66,7 = 33,3 \text{ кН}$ ,

$$M_6 = -\frac{20 \cdot 5^2}{2} + 66,7 \cdot 4 + 50 = 66,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В некотором сечении на этом участке усилие обращается в нуль, а это значит, что в сечении момент имеет экстремаль-

ное значение. Найдем его. Из условия  $Q_6 = 0$  найдем абсциссу  $x_0$  сечения, в котором действует  $M_{\max}$ :

$$Q_6 = q \cdot x_0 - R_B = 0,$$
$$x_0 = \frac{R_B}{q} = \frac{66,7}{20} = 3,335 \text{ м},$$
$$M_{\max 6} = -\frac{20 \cdot 3,335^2}{2} + 66,7 \cdot (3,335 - 1) + 50 = 94,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. По полученным значениям  $Q$  и  $M$  строим эпюры (рисунки 6.13 б, в). Эпюры необходимо проверить по дифференциальным зависимостям.

5. Подбираем сечения балок.

Подбор сечения производим по наибольшему абсолютному значению изгибающего момента.

В нашем примере  $M_{\max} = 94,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

По условию прочности:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma],$$

где  $W$  – момент сопротивления,  $\text{м}^3$ .

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

А. Подбор двутавра

$$W = \frac{94,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 591 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 591 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента прокатной стали ГОСТ 8230-72 принимаем швеллер №27,  $W = 308 \text{ см}^3$ ,  $A = 35,2 \text{ см}^2$ .

Определим рабочее напряжение

$$\sigma_p = \frac{M_{\max}}{2 \cdot W_{\text{шв}}} = \frac{94,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 308 \cdot 10^{-6}} = 153,5 \text{ МПа}.$$

Определим недонапряжение

$$\frac{[\sigma] - \sigma_p}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{160 - 153,5}{160} \cdot 100\% = 4,06\% \quad \text{— расхождение в пределах нормы.}$$

Б. Подбор балки кольцевого сечения

$$W = 0,1 \cdot d_n^3 \cdot (1 - c^4) = 0,1 \cdot d_n^3 \cdot (1 - 0,8^4) = 0,059 \cdot d_n^3,$$

$$d_n = \sqrt[3]{\frac{W}{0,059}} = \sqrt[3]{\frac{591 \cdot 10^{-6}}{0,059}} = 21,7 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

$$d_n = 22 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Округляем до  $d_n = 22 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

$$A = \frac{\pi \cdot d_n^2}{4} \cdot (1 - c^2) = \frac{3,14 \cdot (0,22)^2}{4} \cdot (1 - 0,8^2) = 137 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

В. Подбор балки прямоугольного сечения

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2 \cdot b)^2}{6} = \frac{2}{3} \cdot b^3,$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 591 \cdot 10^{-6}}{2}} = 9,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Округляем до  $b = 0,1 \text{ м}$ .

$$h = 2 \cdot b = 0,2 \text{ м.}$$
$$A = b \cdot h = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02 \text{ м}^2.$$

### Пример 3

Расчет балочного элемента конструкции в модуле АРМ Beam

Общий порядок расчета:

- 1) задание длины первого сегмента балки;
- 2) задание поперечного сечения первого сегмента балки;
- 3) задание второго сегмента балки;
- 4) задание опор;
- 5) задание радиальных сил;
- 6) задание изгибающих моментов;
- 7) задание распределенных сил;
- 8) задание параметров материала балки;
- 9) проведение расчета;
- 10) просмотр и вывод результатов расчета на печать.

Провести расчет балки (рисунок 6.14), изготовленной из стали 40, со следующими геометрическими параметрами поперечных сечений:

– участок АВ – квадратное поперечное сечение со стороной 70 мм;

– участок ВС – цилиндрическое поперечное сечение с наружным диаметром 100 мм и толщиной стенки 4 мм.

В результате расчета следует определить напряжения в наиболее нагруженном сечении, а также эпюры всех силовых факторов.

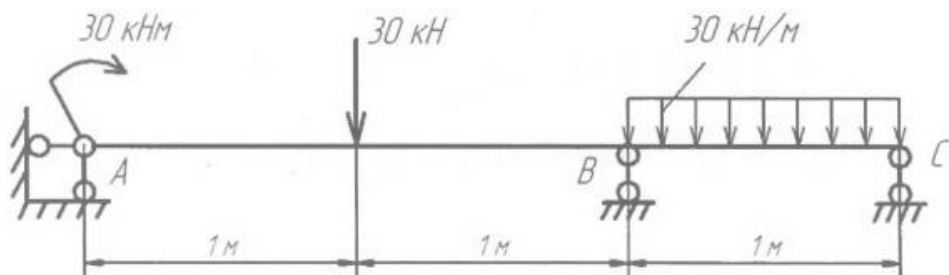


Рисунок 6.14 – Схема нагружения балки

### *Задание длины первого сегмента балки*

После открытия основного окна модуля АРМ Веампереходим в режим создания сегмента балочного элемента нажа-



тием кнопки «Сегмент» (меню **Задать/Сегмент**). Затем щелчком левой кнопки мыши в окне редактора отмечаем точку, в которой будет находиться начало сегмента. Если теперь перемещать курсор, то за ним будет «тянуться» прямоугольник, длина которого динамически отображается в строке статуса. Для завершения создания сегмента балки снова щелкните левой кнопкой мыши и в поле ввода «**Длина сегмента, мм**» открывшегося диалогового окна «**Сегмент балки**» запишите число **2000**.

### *Задание поперечного сечения первого сегмента балки*

#### *1. Создание внешнего контура поперечного сечения.*

Нажатие кнопки «**Задать сечение**» приводит к открытию окна «**Редактор сечений**», в поле которого следует нарисовать контур сечения.

В рассматриваемом случае поперечное сечение представляет собой квадрат. Создать его можно различными способами, например, с помощью построения четырех отрезков, образующих стороны квадрата. Для отрисовки первого горизонтальной отрезка следует поступить следующим образом:

– нажать на панели инструментов «**Рисование**», выпадающая панель инструментов «**Отрезок**», кнопку «**Через 2 точки**»



**ки**) (меню «**Рисовать**»)/«**Отрезок**»/«**Через 2 точки**»);

– щелкнуть в произвольной точке поля редактора левой кнопкой мыши и, смещая курсор в горизонтальном направлении (например, вправо), нажать клавишу «**Пробел**» на клавиатуре для ввода параметров отрезка с клавиатуры;

– на вкладке «**Длина и угол**» открывшегося диалогового окна «**Вторая точка**» задать длину создаваемого отрезка и угол его наклона относительно горизонтальной оси.

При первоначальном открытии диалогового окна «**Вторая точка**» (рисунок 6.15) в его полях ввода записаны текущие значения длины и угла динамического объекта.

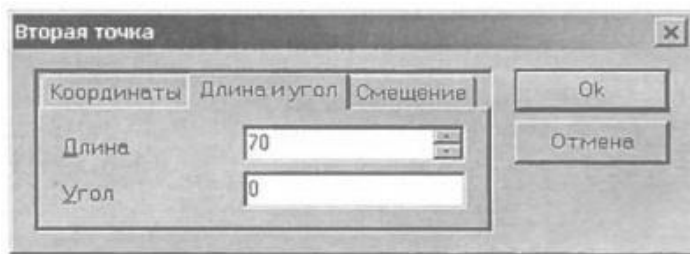


Рисунок 6.15 – Диалоговое окно «**Вторая точка**»

После ввода длины отрезка и его угла нажатием кнопки «**Ок**» в этом диалоговом окне или клавиши «**Enter**» на клавиатуре завершаем создание горизонтального отрезка.

Аналогичным образом создаем следующие стороны квадрата, обращая внимание на то, что вторая точка последнего отрезка должна быть привязана к начальной точке первого.

Контур поперечного сечения может быть также импортирован через файл формата «**\*.dxf**». Для того чтобы произвести импорт, воспользуйтесь меню «**Файл/Импорт...**», а затем в стандартном диалоговом окне укажите путь к импортируемому

му файлу формата «\*.dxf».

2. *Выделение контуров (внешнего и внутренних) поперечного сечения.* Созданный внешний контур сечения сегмента балки необходимо выделить. Кроме того, следует выделить его внутренние(если они есть) контуры. Для этого на панели «**Контур**» есть специальные кнопки – «**Простой контур**»



(меню «**Контур**»/Простой контур») и «**Набираемый**



**контур**» (меню «**Контур**»/«**Набираемый контур**»).

После нажатия кнопки «**Простой контур**» щелкните сначала на любом из элементов наружного контура, а затем на любом из элементов каждого из внутренних контуров (если они есть). Замкнутые контуры после щелчка должны окраситься в синий цвет. Одновременно с нажатием одной из этих кнопок открывается диалоговое окно «**Выбор контура**», в котором после выделения всех контуров нужно нажать кнопку «**Ок**» (вместо кнопки «**Ок**» можно нажать правую кнопку мыши или клавишу «**Пробел**» на клавиатуре). Область между выделенными контурами, т. е. собственно сопряженная поверхность, окрасится в серый цвет. Это означает, что программа адекватно «поняла» задачу, т. е. будет воспринимать выделенный объект как поперечное сечение.

3. *Завершения создания поперечного сечения.* Для завершения создания поперечного сечения следует нажать кнопку



«**Ок**» (меню «**Файл/Ок**»), после чего программа производит расчет параметров поперечного сечения.




Нажатие кнопки «**Отмена**» (меню «**Файл / Отменить**») вызывает закрытие окна редактора поперечных сечений без запуска на расчет отрисованного поперечного сече-

ния.

4. *Присвоение сегменту балки заданного поперечного сечения.* После того как расчет параметров поперечного сечения завершится, изображение созданного сечения появится в области диалогового окна **«Сегмент балки»**. Нажав в этом окне кнопку **«Параметры сечения»**, пользователь имеет возможность просмотреть параметры поперечного сечения сегмента в открытом диалоговом окне **«Результаты»**.

Нажатием кнопки **«Ок»** в диалоговом окне **«Сегмент балки»** пользователь присваивает сегменту балки это поперечное сечение. В основном окне редактора отрисовывается сегмент балки, поперечные размеры которого будут соответствовать размерам поперечного сечения.

5. *Редактирование параметров созданного поперечного сечения.* Если требуется изменить параметры уже созданного сегмента балки, то это можно сделать в режиме редактирования. Для перехода в режим редактирования нужно нажать


кнопку **«Сегмент»**  (меню **«Задать/Сегмент»**), а затем переместить курсор на тот сегмент балки, который следует отредактировать, и щелкнуть на нем правой кнопкой мыши. Откроется диалоговое окно **«Сегмент балки»**, с помощью которого можно изменить длину сегмента или присвоить ему новое сечение.




#### *Создание второго сегмента балки*


Аналогичным образом вводим другой сегмент балки, который автоматически «пристыковывается» к тому концу уже созданного сегмента, вблизи которого будет создаваться новый сегмент. После этого аналогичным образом задается поперечное сечение (или импортируется через файл формата **«\*.dxf»**).



### Задание опор

Для простановки опор нажимаем кнопку **«Опора»**  (меню **«Задать/Опора»**) и в открывшемся диалоговом окне **«Редактирование опоры»** выбираем тип устанавливаемой опоры из выпадающего списка **«Тип»**. Могут быть установлены следующие типы опор:

- неподвижная жесткая опора  ;
- подвижная жесткая опора  ;
- упругая опора  .


В нашем случае для установки левой опоры (точка А) выбираем тип **«Неподвижная жесткая опора»** , а в поле ввода **«Расположение»** вводим 0.

Аналогичным образом устанавливаем подвижные жесткие опоры в точках В и С.

Для редактирования существующей опоры следует после перехода в режим создания опоры щелкнуть на ней правой кнопкой мыши.

### Задание радиальных сил

По условию на балку действует радиальная сила величиной 30 кН. Для задания этой силы нажимаем кнопку **«Ради-**

**альная сила»**  (меню **«Задать/Радиальная сила»**) и в открывшемся диалоговом окне **«Поперечная сила»** (рисунок 6.16) указываем параметры и обозначение силы, а именно:

- для фиксации точки приложения силы в поле ввода **«Расстояние от левого конца балки, мм»** вводим число 1000;

– величину суммарной радиальной силы можно задавать либо ее модулем и направлением (выбрать «**Тип данных – Модуль и угол**»), либо величинами проекций (выбрать «**Тип данных – Проекции**»); в рассматриваемом примере выбираем тип данных *Проекции*.

Для задания величины проекций:

- в поле ввода «**Вертикальная, Н**» – вводим число -30000(поскольку сила направлена вниз);
- поле ввода «**Горизонтальная, Н**» – оставляем пустым;
- поле ввода «**Имя**» – можем оставить пустым;
- поле ввода «**Индекс**» – можем оставить пустым.

Если при визуализации изображения силы будет обнаружено, что оно имеет противоположное выбранному направлению, то следует вызвать соответствующее окно щелчком правой кнопки мыши и изменить знак силового фактора.

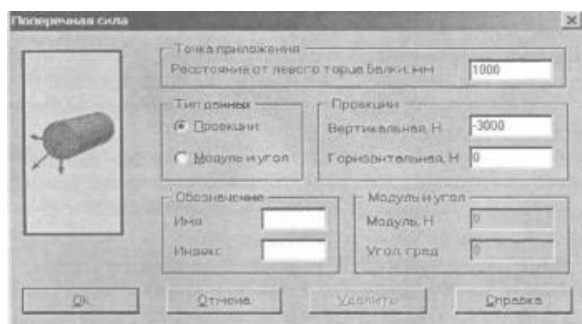



Рисунок 6.16 – Диалоговое окно «**Поперечная сила**»

### *Задание изгибающих моментов*

Нажимаем кнопку «**Момент изгиба**»  (меню «**Задать/Момент изгиба**») и в открывшемся диалоговом окне «**Момент изгиба**» (рисунок 6.17) задаем параметры и обозначение момента. Рассмотрим задание изгибающего момента величиной 30 кН.

Для фиксации точки приложения момента в поле ввода «**Расстояние от левого торца балки, мм**» вводим число **0**.

Величину суммарного изгибающего момента можно задавать либо его модулем и направлением (выбрать «**Тип данных – Модуль и угол**»), либо величинами проекций (выбрать «**Тип данных – Проекция**»); в рассматриваемом примере выбираем тип данных *Проекция*.

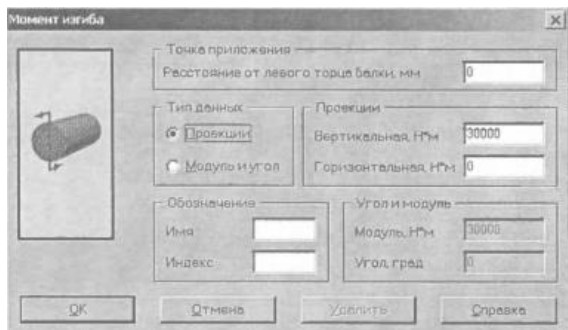


Рисунок 6.17 – Диалоговое окно «**Момент изгиба**»

Для задания величины проекций:

– в поле ввода «**Вертикальная, Н \* м**» – вводим число 30000;

– поле ввода «**Горизонтальная, Н \* м**» – оставляем пустым;

– поле ввода «**Имя**» – можем оставить пустым;

– поле ввода «**Индекс**» – можем оставить пустым.

Если при визуализации изображения моментов будет обнаружено, что они имеют противоположное заданному направлению, то следует вызвать соответствующее окно щелчком правой кнопки мыши и изменить знак силового фактора.

### *Задание распределенных сил*

Для задания распределенной силы нажимаем кнопку

«**Распределенная**

**сила**»



(меню

«**За-**

дать/Распределенная сила») и в открывшемся диалоговом окне «Распределенная сила» (рисунок 6.18) указываем границы и величину распределенной силы. Рассмотрим задание распределенной силы величиной 30 кН/м.

Для фиксации точки приложения силы:

- в поле ввода «Левая граница, мм» – вводим 2000;
- в поле ввода «Правая граница, мм» – вводим 3000;

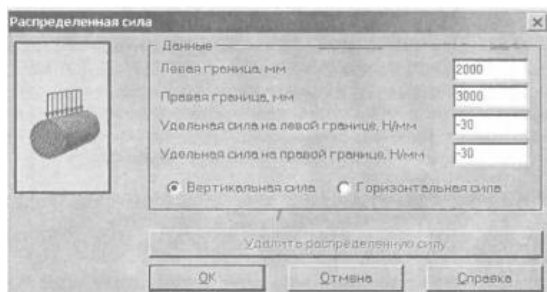


Рисунок 6.18 – Диалоговое окно «Распределенная сила»

Для задания величины распределенной силы:

- в поле ввода «Удельная сила на левой границе, Н/мм» – вводим -30(30 кН/м или 30 Н/мм);
- в поле ввода «Удельная сила на правой границе, Н/мм» – вводим -30 (направление силы – сверху вниз).

Переключатель «Вертикальная/Горизонтальная сила» следует установить в положение «Вертикальная сила».

Если при визуализации изображения распределенной силы будет обнаружено, что оно имеет противоположное заданному направлению, то следует вызвать соответствующее окно щелчком правой кнопки мыши и изменить знак силового фактора. Для вызова режима редактирования вертикальной силы достаточно простого щелчка на ней правой кнопки мыши, а для редактирования горизонтальной силы необходимо одновременно нажать правую кнопку мыши и клавишу **Shift** на клавиатуре.

### *Задание параметров материала балки*

Для задания материала либо нажимаем кнопку «**Матери-**



**ал**» (меню «**Материал/Материал...**») и в открывшееся диалоговое окно «**Материал**» заносим параметры материала балки, либо выбираем марку материала из базы данных, которая вызывается нажатием кнопки «**База данных...**».

### *Проведение расчета*

Для запуска на расчет выбираем меню «**Рассчитать!**» и в открывшемся диалоговом окне «**Выбор типа расчета**» устанавливаем флажок в опции «*Статический расчет*». После нажатия кнопки «**Ок**» производится расчет балки.

### *Просмотр и вывод результатов расчета на печать*

1. Для просмотра результатов расчета выбираем в меню «**Результаты**» пункт «**Графики...**», а в открывшемся вслед за этим окне «**Выбор результатов расчета**» – необходимый для просмотра график. Для того чтобы эпюры силовых факторов строились на фоне балки, нужно поставить флажок в опции «*Рисовать балку*».

2. Для просмотра напряжений в поперечном сечении балки выбираем меню «**Результаты/ Напряжения в сечении**» и отмечаем то сечение, напряжение в котором необходимо просмотреть, т. е. щелкаем левой кнопкой мыши на выбранном сечении. После этого откроется диалоговое окно «**Карта напряжений**», в области которого будет показано распределение напряжений в выбранном поперечном сечении балки в соответствии с изображенной слева цветовой шкалой напряжений. Фрагмент диалогового окна «**Карта напряжений**» приведен на рисунке 6.19.

При смещении указателя мыши по поперечному сечению в строке статуса будут динамически отслеживаться его координаты и величина эквивалентных напряжений на конкретном

конечном элементе поперечного сечения.

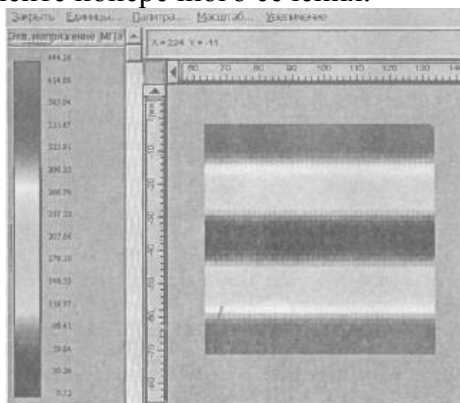



Рисунок 6.19 – Диалоговое окно «Карта напряжений»

3. Для вывода результатов расчета на печать нажмите в

основном окне программы кнопку «Печать»  (меню «Файл/Печать...»), затем в открывшемся стандартном окне «Печать» выберите один из установленных принтеров и произведите печать.

4. Исходные данные и результаты расчета можно вывести в текстовый файл формата «\*.rtf», доступный для дальнейшего чтения большинством современных текстовых редакторов. Для вывода результатов в формат «\*.rtf» следует выбрать в меню «Файл/Сохранить» тип файла «\*.rtf» и сохранить его в этом формате.

## Контрольные вопросы

1. Внутренние силовые факторы при изгибе.
2. Дифференциальные зависимости при изгибе.
3. Величина нормальных напряжений при изгибе. Касательные напряжения при изгибе.
4. Расчет на прочность по допускаемым напряжениям при изгибе.

## ТЕМА 7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 7.1 Общие положения

Сложным сопротивлением называются виды нагружения, при которых в поперечных сечениях одновременно действуют несколько внутренних силовых факторов.

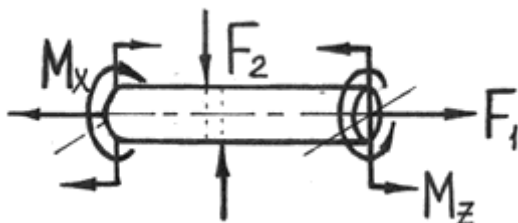


Рисунок 7.1 – Пример нагружения стержня при сложном сопротивлении

Сложный вид деформации можно рассматривать как сумму простых видов, изученных ранее (растяжение, изгиб, кручение), при которых в сечениях элементов конструкций возникал только один внутренний силовой фактор: нормальная сила  $N$  – при растяжении (рисунок 7.2 а), крутящий момент  $M_x$  – при кручении (рисунок 7.2 б), изгибающий момент  $M_z$  – при чистом изгибе (рисунок 7.2 в). Эти виды нагружения (растяжение, изгиб, кручение) являются простыми.

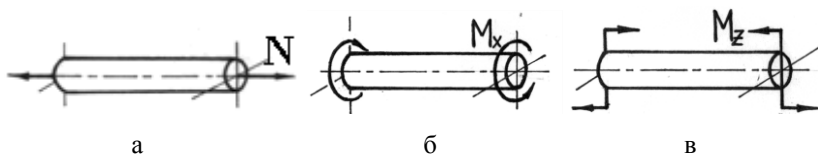


Рисунок 7.2 – Примеры простых видов деформации

Основные соотношения, полученные для них, приведены в таблице 7.1

Таблица 7.1 – Основные соотношения, полученные для различных видов нагружения

Виды нагружения	Напряжения	Деформации
Растяжение	$\sigma = \frac{N}{F}$ Условие прочности: $\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} \leq [\sigma]$	$\Delta l = \frac{Nl}{EF}$
Кручение	$\tau = \frac{M_k}{J_\rho} \rho$ Условие прочности: $\tau_{max} = \frac{M_{kmax}}{W_\rho} \leq [\tau]$	$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_\rho}$
Изгиб	$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$ Условие прочности: $\sigma_{max} = \frac{M_{xmax}}{W_x} \leq [\sigma]$	$EJ_x y'' = M_x$

Но при сложном сопротивлении должен быть применим принцип независимости действия сил (частный случай принципа суперпозиции или наложения, применяемый в механике деформируемого твердого тела).

Напомним формулировку принципа независимости действия сил: напряжение (деформация) от группы сил равно сумме напряжений (деформаций) от каждой силы в отдельности. Он справедлив, если функция и аргумент связаны линейной зависимостью. В задачах механики материалов и конструкций становится неприменимым, если:

- напряжения в какой-либо части конструкции от одной из сил или группы сил превышают предел пропорциональности  $\sigma_{nc}$ ;
- деформации или перемещения становятся настолько большими, что нарушается линейная зависимость между ними и нагрузкой.



Например, дифференциальное уравнение изгиба стержня является нелинейным и вытекающая из него зависимость прогиба  $f$  от нагрузки  $P$  для консольной балки, изображенной на рисунке 7.3 а, также является нелинейной (рисунок 7.3 б). Однако, если прогибы балки невелики ( $f \ll l$ ) настолько, что  $(dv/dz)^2 \ll 1$  (так как  $dv/dz \approx f/l$ ), то дифференциальное уравнение изгиба становится линейным (как видно из рисунка 7.3 б, начальный участок зависимости  $P$  от  $f$ , описываемый этим уравнением, также является линейным).

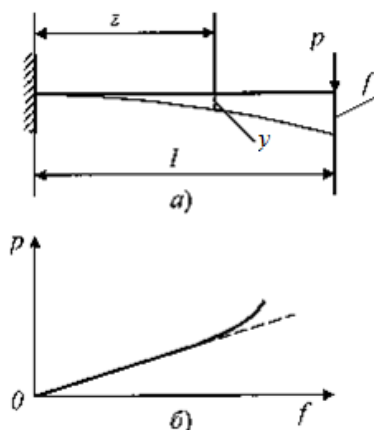


Рисунок 7.3 – Модели изгиба балки:

а – расчетная схема; б – линейное и нелинейное сопротивление

Задачи на сложное сопротивление решаются следующим образом. Определяются напряжения и деформации при действии простейших видов деформации, составляющих сложное сопротивление, а затем полученные результаты суммируют, используя при необходимости теории прочности.

На практике одновременное действие всех силовых факторов встречается крайне редко. Чаще приходится иметь дело с более простыми комбинациями нагружений – косой или пространственный изгиб, внецентренное растяжение или сжатие и изгиб с кручением.

## 7.2 Расчет балки, подверженной косому или пространственному изгибу

Косым называют изгиб, при котором плоскость действия изгибающего момента, возникающего в сечении, не совпадает ни с одной из главных плоскостей бруса (при этом плоскость действия изгибающего момента обязательно должна проходить через центр тяжести сечения) (рисунок 7.4).

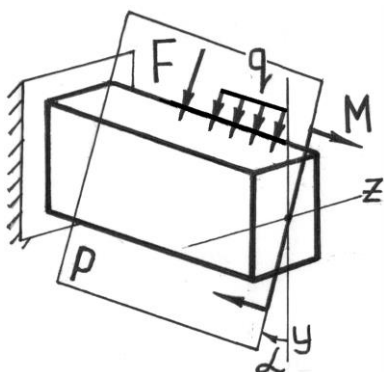


Рисунок 7.4 – Брус, подверженный действию косоого изгиба

При косом изгибе изогнутая ось представляет собой плоскую кривую, и плоскость, в которой она расположена, не совпадает с плоскостью действия нагрузки.

При пространственном изгибе нагрузка приложена в разных плоскостях, деформированная ось является пространственной кривой.

## 7.3 Определение внутренних усилий при косом изгибе

При косом изгибе в поперечных сечениях бруса действуют следующие внутренние усилия:  $M_z$ ,  $M_y$  – изгибающие моменты и  $Q_y$ ,  $Q_z$  – поперечные (перерезывающие) силы. Это легко показать мысленно рассекая стержень и определяя внутренние усилия при косом изгибе консольной балки под действием сосредоточенной силы  $F$  на свободном конце (рисунок 7.5):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N = 0; & \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x = 0; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow Q_y = F \cdot \cos \alpha; & \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y = F \cdot \sin \alpha \cdot x; \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow Q_z = F \cdot \sin \alpha; & \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z = F \cdot \cos \alpha \cdot x. \end{aligned}$$

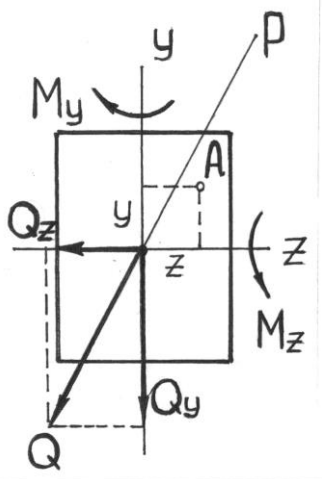


Рисунок 7.5 – Внутренние усилия при косом изгибе стержня

Правило знаков для внутренних усилий: изгибающие моменты – положительны, если вызывают растяжение в положительном квадранте координатной системы  $zOy$ ; поперечные силы – положительны, если под их действием отсеченный элемент поворачивается по часовой стрелке.

Таким образом, косой изгиб может быть представлен как совместное действие двух плоских изгибов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях инерции.

Для определения полного изгибающего момента  $M$  и полной поперечной силы  $Q$  при косом изгибе достаточно определить внутренние усилия для каждого из плоских изгибов в отдельности (то есть  $Q_y$ ,  $M_z$  и  $Q_z$ ,  $M_y$ ), а затем найти их векторную сумму:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}, \quad Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}.$$

## 7.4 Определение напряжений при косом изгибе

Если разложить внешние силы по главным осям инерции  $Ox$  и  $Oy$ , то получим две системы сил  $P_{1x}, P_{2x}, \dots, P_{nx}$  и  $P_{1y}, P_{2y}, \dots, P_{ny}$ , каждая из которых вызывает прямой изгиб с изгибающими моментами соответственно  $M_y$  и  $M_x$  (рисунок 7.6). Применяя принцип независимости действия сил, нормальные напряжения  $\sigma$  (рисунок 7.7) определим как алгебраическую сумму напряжений от  $M_x$  и  $M_y$ :

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x$$

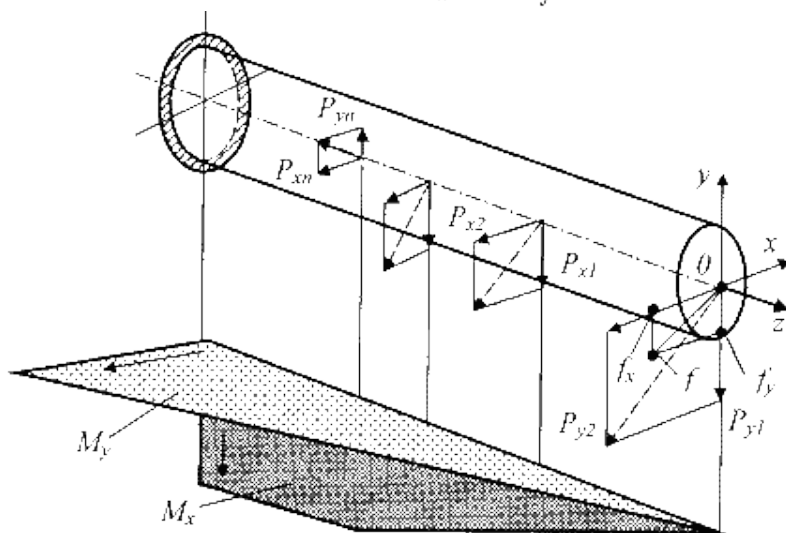


Рисунок 7.6 – Расчетная модель косоуго изгиба бруса

Чтобы не связывать себя формальными правилами знаков, слагаемые будем определять по модулю, а знаки ставить по смыслу.

Таким образом, расчет на косоуго изгиб с применением принципа независимости действия сил сводится к расчету на два прямых изгиба с последующим алгебраическим суммированием напряжений.

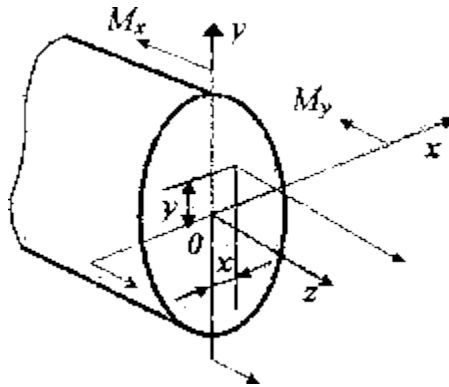


Рисунок 7.7 – Связь нормального напряжения с внутренними изгибающими моментами

В случае поперечных сечений, имеющих две оси симметрии и выступающие угловые точки (рисунок 7.8) с равными по модулю и максимальными одноименными координатами  $|x_A| = x_B = x_C = |x_D| = x_{\max}$  и  $|y_A| = y_B = y_C = |y_D| = y_{\max}$  напряжения в этих точках будут равны:

$$\sigma_{A,B,C,D} = \pm \frac{M_x}{J_x} y_{\max} \pm \frac{M_y}{J_y} x_{\max} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} .$$

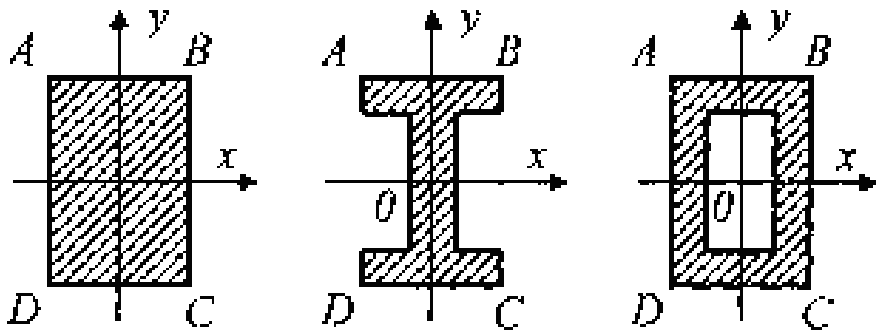


Рисунок 7.8 – Симметричные варианты сечений

Слагаемые в этом выражении рекомендуется определять по модулю, а знаки ставить по смыслу. Например, на рисунке 7.9 верхний ряд знаков «+» и «-» соответствует напряжениям от  $M_x$ , а нижний ряд – от  $M_y$ , и напряжения в этих точках будут равны:

$$\sigma_A = -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}, \quad \sigma_B = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y},$$

$$\sigma_C = \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}, \quad \sigma_D = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}.$$

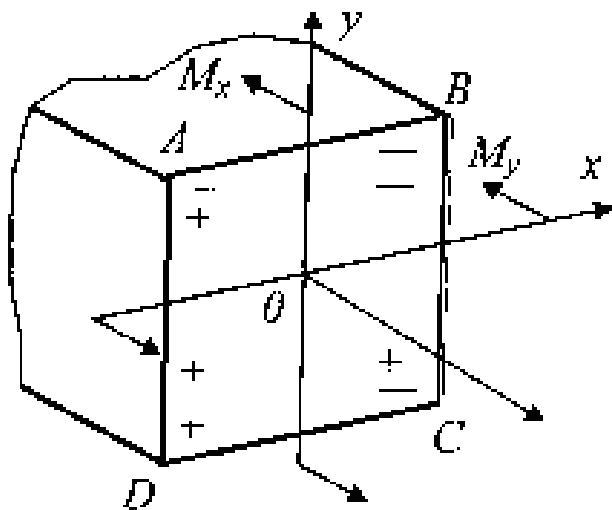


Рисунок 7.9 – Расстановка знаков от действия моментов

Условие прочности для балок из пластичного материала с указанным типом сечений запишется в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

Касательные напряжения от поперечных сил, если нельзя воспользоваться формулой Журавского, допустимо не учитывать.

При проведении расчетов на прочность условие прочности составляется для опасной точки поперечного сечения, т.е. для точки, в которой нормальные напряжения достигают максимальных значений. Самой нагруженной точкой в сечении произвольной формы является точка, наиболее удаленная от нейтральной линии, разделяющей растянутую и сжатую зоны сечения.

В связи с этим, большое значение приобретают вопросы, связанные с определением положения нейтральной линии.

Положив  $\sigma = 0$ , получим уравнение нейтральной линии:

$$\pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} = 0 \quad .$$

Так как напряжения в точках поперечного сечения будут пропорциональными расстояниям от нейтральной линии, то  $\sigma_{\max}$  будут возникать в наиболее удаленных от нее точках.

Силовая плоскость – это плоскость действия результирующего момента  $M_{рез}$  (рисунок 7.10),  $\varphi$  – угол наклона силовой плоскости к вертикали.

$$M_{рез} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad ,$$

$$tg \varphi = \frac{M_y}{M_x} \quad ,$$

$$tg \alpha = -tg \varphi \cdot \frac{J_x}{J_y} \quad . \quad (7.1)$$

Свойства нейтральной линии:

1) если  $J_x \neq J_y$ , то  $\alpha \neq \varphi$ , то есть силовая плоскость и нейтральная линия не являются перпендикулярными;

2) если  $J_x = J_y$ , то из (7.1) следует, что  $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi$ , то есть нейтральная линия и силовая плоскость перпендикулярны. В этом случае стержень испытывает плоский изгиб (примерами таких стержней являются стержни с сечением – круг, кольцо, квадрат);

3) знак «минус» в формуле (7.1) указывает, что силовая плоскость и нейтральная линия при косом изгибе проходят через противоположные квадранты.

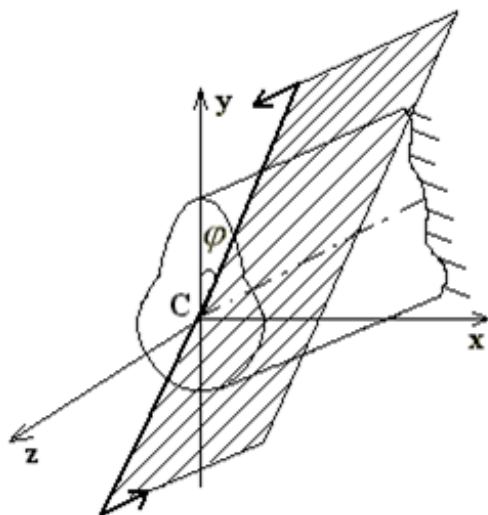


Рисунок 7.10 – Силовая плоскость

Для определения опасных точек сечения следует построить касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной линии. Точки касания и будут являться опасными (точки *A* и *B* на рисунке 7.11).



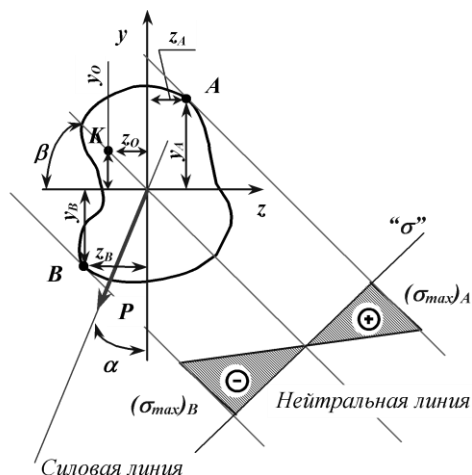


Рисунок 7.11 – Положение нейтральной линии при косом изгибе

Для некоторых сечений (прямоугольник, двутавр, швеллер и т. п.) наиболее напряженные точки расположены в углах этих сечений, т. е. их можно найти без определения положения нейтральной линии (рисунок 7.12).

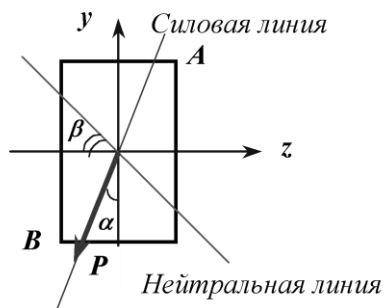


Рисунок 7.12 – Положение нейтральной линии и опасных точек сечения при косом изгибе для прямоугольника

Условия прочности составляют в зависимости от свойств того материала, из которого изготовлен элемент конструкции (брус).

Для хрупкого материала используют два условия прочности – для опасной точки, где имеет место растяжение (для нашего случая точка  $A$  на рисунке 7.11), и для точки, где имеет место сжатие (точка  $B$ ):

$$\sigma_{\max}^p = \frac{M_z}{J_z} y_A + \frac{M_y}{J_y} z_A \leq [\sigma_p],$$

$$|\sigma_{\max}^c| = \frac{M_z}{J_z} y_B + \frac{M_y}{J_y} z_B \leq [\sigma_c].$$

Необходимость использования двух условий прочности для хрупкого материала объясняется разными механическими свойствами материала при растяжении и сжатии. Хрупкий материал плохо сопротивляется растяжению и хорошо – сжатию.

Для пластичного материала, который одинаково сопротивляется и растяжению и сжатию, используют одно условие прочности для точки поперечного сечения, где имеют место максимальные по абсолютной величине нормальные напряжения:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z \leq [\sigma] \quad ,$$

где  $z$  и  $y$  – координаты данной точки.

При расчетах на прочность касательными напряжениями от поперечных сил пренебрегают, т.к. их влияние незначительно.

## 7.5 Определение перемещений при косом изгибе

Перемещения при косом изгибе определяют по принципу независимости действия сил, т. е. рассчитывают прогибы  $\Delta_z$  и

$\Delta_y$  в направлении главных осей, а величину полного прогиба в любом сечении балки получают геометрическим суммированием:  $\Delta = \sqrt{\Delta_z^2 + \Delta_y^2}$ .

Например, для балки, изображенной на рисунке 7.13, прогиб конца консоли определится следующим образом:

$$\Delta_y = \frac{P_y l^3}{3EJ_z} = \frac{P \cos \alpha}{3EJ_z} l^3 ,$$

$$\Delta_z = \frac{P_z l^3}{3EJ_y} = \frac{P \sin \alpha}{3EJ_y} l^3 ,$$

$$\Delta = \sqrt{\Delta_z^2 + \Delta_y^2} .$$

Направление полного перемещения ( $tg \varphi$ ) определится величиной отношения  $\Delta_z/\Delta_y$  (рисунок 7.13):

$$tg \varphi = \frac{\Delta_z}{\Delta_y} = \frac{P \sin \alpha}{3EJ_y} \frac{3EJ_z}{P \cos \alpha} = \frac{J_z}{J_y} tg \alpha .$$

Направление полного прогиба при косом изгибе перпендикулярно нейтральной линии и не совпадает с направлением внешней силы (рисунок 7.13).

При косом изгибе (впрочем, как и при остальных видах нагружения) имеем три задачи расчета на прочность:

- 1) проверка прочности;
- 2) подбор сечения [определить  $W_z$  (размеры сечения), при заданном отношении  $W_z/W_y$ ];
- 3) проверка по несущей способности (определить  $M$ ).

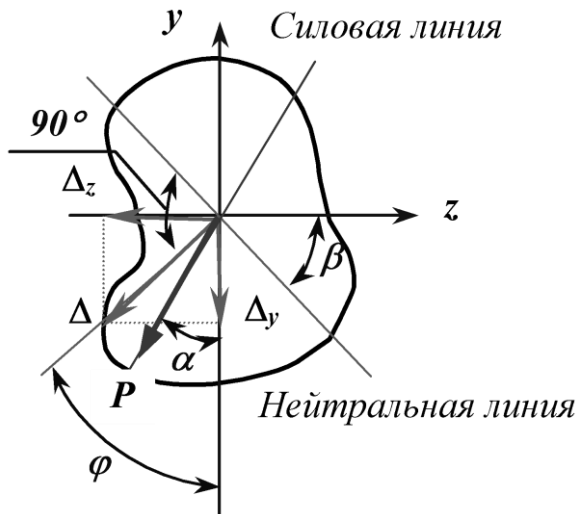


Рисунок 7.13 – Перемещение при косом изгибе

Порядок проверки прочности балки, работающей в условиях косоугольного или пространственного изгиба, тот же, что и для балки, работающей при плоском поперечном изгибе. Для этого необходимо:

- построить эпюры внутренних усилий (изгибающих моментов). Для построения эпюр внутренних усилий раскладываем нагрузку на вертикальную и горизонтальную составляющие. Вертикальная составляющая вызывает изгиб относительно горизонтальной оси  $y$ , горизонтальная – относительно оси  $z$ ;

- выбрать опасные сечения – это сечения, где имеет место наиболее неблагоприятное сочетание изгибающих моментов;

- в опасных сечениях найти опасные точки – точки с максимальными нормальными напряжениями;

- записать условие прочности в этих точках. Из условия прочности либо подобрать размеры поперечного сечения, либо найти допустимую нагрузку, либо просто сделать вывод о возможности безопасной эксплуатации конструкции.

## 7.6 Примеры расчета балок на косой изгиб

### Пример 1

Подобрать прямоугольное сечение балки (рисунок 7.14) при условии, что  $h = 2b$ ,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $P = 60$  кН,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $l = 2,8$  м.

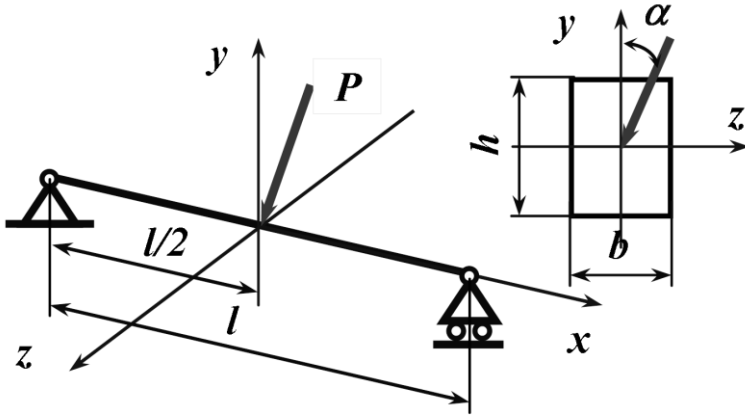


Рисунок 7.14 – Расчетная схема

Разложив силу  $P$  на две составляющие, действующие по направлению главных осей поперечного сечения балки, определяем опорные реакции и строим эпюры изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$  (рисунок 7.15). Наибольшие моменты действуют в среднем сечении, где

$$M_{z_{\max}} = \frac{Pl}{4} \cos \alpha, \quad M_{y_{\max}} = \frac{Pl}{4} \sin \alpha,$$

следовательно, это сечение является опасным.

Для определения положения опасной точки расставим знаки от  $\sigma(M_z)$  и  $\sigma(M_y)$  в угловых точках поперечного сечения балки (рисунок 7.15). При действии момента  $M_z$  в точ-

как  $A$  и  $D$  будут иметь место положительные (растягивающие) напряжения, а в точках  $C$  и  $B$  – отрицательные (сжимающие) напряжения. При действии момента  $M_y$  в точках  $A$  и  $C$  будут иметь место положительные  $\sigma$ , а в точках  $B$  и  $D$  – отрицательные. Точки поперечного сечения  $A$  и  $B$ , в которых действуют нормальные напряжения одного знака, являются опасными; для них и должны составляться условия прочности.

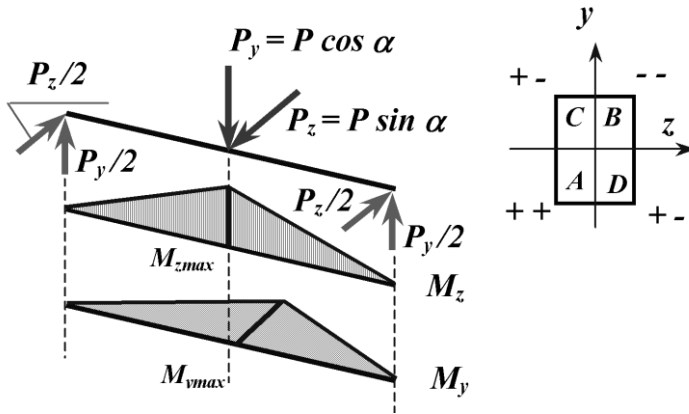


Рисунок 7.15 – Эпюры изгибающих моментов к примеру 1

Судя по условию задачи, материал, из которого изготовлена балка, является пластичным ( $[\sigma]=160$  МПа) и, следовательно, одинаково сопротивляется деформации растяжения и деформации сжатия. Таким образом, точки  $A$  и  $B$  являются равноопасными, и для них используется одно условие прочности:

$$\sigma_{расч} = \sigma_{max} = \frac{M_{zmax}}{W_z} + \frac{M_{ymax}}{W_y} \leq [\sigma] \quad .$$

Вычислим моменты сопротивления сечения при заданном соотношении высоты и ширины:

$$W_z = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3, \quad W_y = \frac{2bb^2}{6} = \frac{1}{3}b^3.$$

Подставляя в условие прочности выражения для изгибающих моментов и моментов сопротивления, получим:

$$b \geq \sqrt{\frac{3Pl(0.5 \cos \alpha + \sin \alpha)}{4[\sigma]}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 60 \cdot 10^3 \cdot 2.8 \cdot (0.5 \cdot 0.866 + 0.5)}{4 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0.0902 \text{ м},$$

тогда  $h = 2b = 18,04 \text{ см}$ .

### Пример 2

При установке на опоры двутавровой балки (№ 60:  $W_y = 182 \text{ см}^3$ ,  $W_z = 2560 \text{ см}^3$ ), предназначенной для работы на изгиб в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью стенки, была допущена ошибка и стенка двутавра отклонилась от вертикали на угол  $\varphi = 1^\circ$ . Определить связанное с этим увеличение наибольших нормальных напряжений.

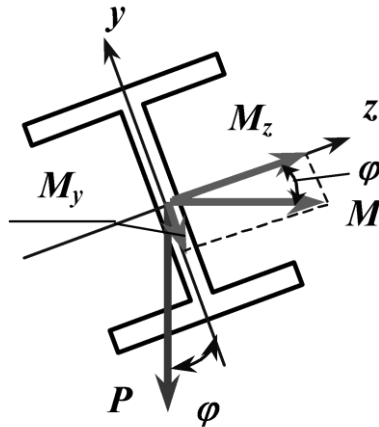


Рисунок 7.16 – Появление внутренних изгибающих моментов при косом изгибе к примеру 2

Отклонение оси двутавра (ось  $y$ ) от вертикали привело к возникновению косоугольного изгиба (рисунок 7.16) и появлению изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$ :

$$M_y = M \sin \varphi = M \sin 1^\circ = 0.0175 M,$$

$$M_z = M \cos \varphi = M \cos 1^\circ = 0.9998 M = M.$$

Максимальные напряжения при косом изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{M_z}{W_z} \left( 1 + \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{W_z}{W_y} \right),$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \left( 1 + \frac{0.0175}{0.9998} \cdot \frac{2560}{182} \right) = 1.246 \frac{M_z}{W_z},$$

так как  $M_z \approx M$ , то  $\sigma_{\max} = 1.246 \frac{M}{W_z}$ .

В случае правильной установки балки, сила  $P$  совпадала бы с вертикальной осью балки  $y$ , и имел бы место прямой изгиб, изгибающий момент был бы равен  $M$  (рисунок 7.16), а напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}.$$

Таким образом, максимальные напряжения при косом изгибе за счет такого незначительного отклонения от вертикали возрастут на 24,6 %.

## 7.7 Внецентренное сжатие или растяжение

Вторым практически важным случаем сложения деформаций от изгиба и от продольных сил является так называемое



внецентренное сжатие или растяжение, вызываемое одними продольными силами. Этот вид нагружения довольно распространен в технике, так как в реальной ситуации почти невозможно приложить растягивающую нагрузку точно в центре тяжести.

Внецентренным растяжением-сжатием называется случай, когда равнодействующая сил, приложенных к отброшенной части стержня, направлена параллельно оси стержня, но не совпадает с этой осью (рисунок 7.17).



Рисунок 7.17 – Пример внецентренного растяжения (сжатие)

Внецентренное растяжение (сжатие) испытывают короткие стержни. Все сечения являются равноопасными, поэтому нет необходимости в построении эпюр внутренних силовых факторов.

Представим, что после проведения разреза равнодействующая  $P$  сил действующих на отброшенную часть и приложенная к оставшейся проходит через точку с координатами  $(x_p; y_p)$  в главных центральных осях поперечного сечения (рисунок 7.18).

Приведем силу  $P$  в центр тяжести сечения, т.е. направим вдоль оси стержня (сила  $N$ ). При этом появятся две пары сил  $M_{x_c}$  и  $M_{y_c}$  относительно главных центральных осей (рисунок 7.19).

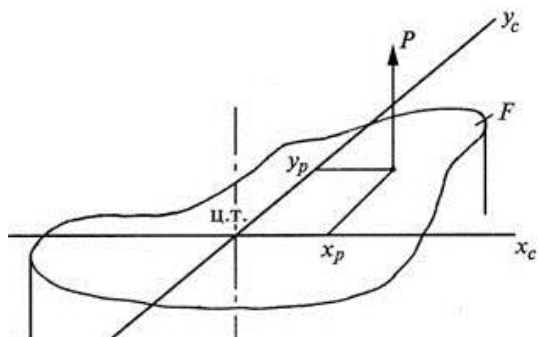


Рисунок 7.18 – Сечение стержня при внецентренном растяжении

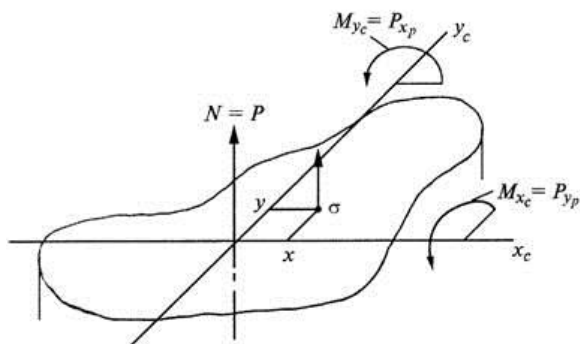


Рисунок 7.19 – Приведение действующей силы к центру тяжести сечения

Таким образом, в поперечном сечении стержня при внецентренном растяжении и сжатии возникают три внутренних силовых фактора: нормальная сила  $N$  и два изгибающих момента  $M_{x_c}$  и  $M_{y_c}$  относительно главных центральных осей поперечного сечения.

Для вычисления нормального напряжения в поперечном сечении в окрестности точки с произвольными координатами  $x, y$  воспользуемся принципом независимости действия сил. Будем вычислять нормальное напряжение от каждого внутреннего силового фактора в отдельности и результат сложим:

$$\sigma(x, y) = \frac{N}{F} + \frac{M_{x_c}}{J_{x_c}} y + \frac{M_{y_c}}{J_{y_c}} x. \quad (7.2)$$

По этой формуле можно вычислять нормальные напряжения в точках поперечного сечения стержня при совместном действии осевой силы и двух изгибающих моментов. В нашем случае все три внутренних силовых фактора зависят от внецентренно приложенной силы  $P$  (рисунок 7.19). Подставив соответствующие выражения в (7.2), получим:

$$\sigma(x, y) = \frac{P}{F} + \frac{P y_p y}{J_{x_c}} + \frac{P x_p x}{J_{y_c}}.$$

Вынесем величину нормального напряжения при осевом растяжении  $\sigma = P/F$  за скобки:

$$\sigma(x, y) = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y F}{J_{x_c}} + \frac{x_p x F}{J_{y_c}} \right).$$

Введем понятие о радиусе инерции относительно оси  $U$ :

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} \quad \text{— такое расстояние от оси } U \text{ до условной точки, где сосредоточена вся площадь сечения.}$$

Тогда момент инерции можно найти по формуле:

$$J_u = i_u^2 F. \quad (7.3)$$

Применив (7.3) в выражении  $\sigma(x, y)$ , получим:

$$\sigma(x, y) = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y}{i_{x_c}^2} + \frac{x_p x}{i_{y_c}^2} \right). \quad (7.4)$$

Мы получили формулу нормальных напряжений в поперечном сечении при внецентренном растяжении или сжатии. Если сила растягивающая, то перед скобкой ставится знак плюс, если сила сжимающая, то ставится – минус.

В этой формуле координаты точки, где определяются напряжения входят в первой степени. Следовательно, если величины напряжений откладывать в масштабе в виде аппликат перпендикулярно плоскости поперечного сечения, то концы этих отрезков будут лежать на плоскости, наклоненной к плоскости поперечного сечения. Будем называть эту плоскость плоскостью напряжений. Известно, что две наклоненные плоскости пересекаются по линии. В нашем случае в точках этой линии  $\sigma = 0$  – это нулевая линия, которая описывается уравнением:

$$1 + \frac{y_p y}{i_{x_c}^2} + \frac{x_p x}{i_{y_c}^2} = 0. \quad (7.5)$$

Анализируя (7.5) можно сделать вывод, что нейтральная линия при внецентренном растяжении и сжатии не проходит через центр тяжести, а отсекает на главных центральных осях отрезки  $a_{x_c}$  и  $a_{y_c}$ . Полагая последовательно в (7.5)  $x=0$  и  $y = 0$ , получим:

$$a_{x_c} = -\frac{i_{y_c}^2}{x_p}; \quad (7.6)$$

$$a_{y_c} = -\frac{i_{x_c}^2}{y_p}.$$

Из формул (7.6) следуют некоторые закономерности, связывающие положения полюса (т. е. точки приложения силы) и нейтральной линии, которые удобно использовать для анализа

решения задачи. Перечислим самые важные из этих закономерностей:

- нейтральная линия всегда расположена в квадранте, противоположном тому, в котором находится полюс (рисунок 7.20);

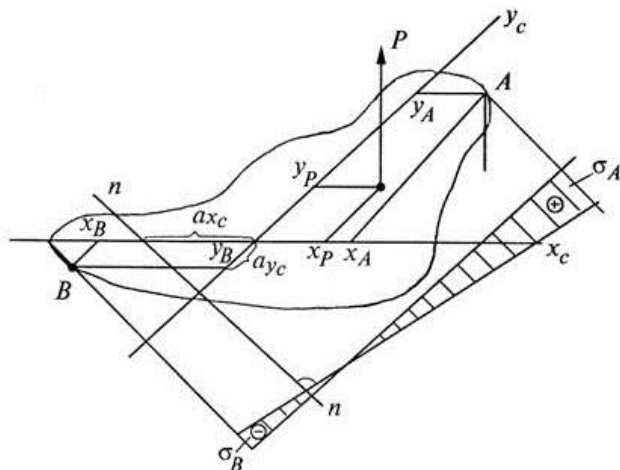


Рисунок 7.20 – Положение нейтральной линии

- если полюс находится на одной из главных осей, то нейтральная линия перпендикулярна этой оси;
- если полюс приближается к центру тяжести сечения, то нейтральная линия удаляется от него;
- если полюс движется по прямой линии, то нейтральная линия поворачивается вокруг неподвижной точки.

Для сечений со сложным контуром знание положения нулевой линии очень важно. Вспоминая про понятие плоскость напряжений, можно утверждать, что наибольшие по величине нормальные напряжения возникают в точках поперечного сечения наиболее удаленных от нулевой линии. Если взглянуть на плоскость напряжений вдоль нулевой линии, то она будет видна в виде линии соединяющей аппликаты напряжений, то есть в виде эпюры напряжений, отложенной от линии перпендикулярной нулевой линии (рисунок 7.20).

Наибольшее растягивающее нормальное напряжение возникает в точке  $A$ :

$$\sigma_A = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y_A}{i_{x_c}^2} + \frac{x_p x_A}{i_{y_c}^2} \right) > 0, \quad (7.7)$$

а наибольшее сжимающее нормальное напряжение возникает в точке  $B$ :

$$\sigma_B = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y_B}{i_{x_c}^2} + \frac{x_p x_B}{i_{y_c}^2} \right) < 0. \quad (7.8)$$

Таким образом, при внецентренном растяжении кроме растягивающих нормальных напряжений в поперечном сечении могут возникнуть и сжимающие. При внецентренном сжатии – наоборот.

Если материал стержня одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности получает такой вид:

$$|\sigma_{\max}| = F \left[ \frac{1}{F} + \frac{y_p y_1}{J_x} + \frac{z_p z_1}{J_y} \right] \leq [\sigma].$$

Хрупкий материал обладает различными свойствами в условиях растяжения и сжатия – плохо сопротивляется растяжению и хорошо сжатию, условия прочности составляют для двух точек: где действуют максимальные растягивающие (точка  $A$ ) и максимальные сжимающие (точка  $B$ ) напряжения:

$$\sigma_{p \max} = \sigma_A = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z_A + \frac{M_z}{J_z} y_A \leq [\sigma_p], \quad (7.9)$$

$$|\sigma_{c \max}| = \sigma_B = \frac{N}{F} - \frac{M_y}{J_y} z_B - \frac{M_z}{J_z} y_B \leq [\sigma_c].$$

Для поперечных сечений с выступающими углами, у которых обе главные оси инерции являются осями симметрии (прямоугольник, двутавр и др.)  $y_1 = y_{\max}$  и  $z_1 = z_{\max}$ . Поэтому формула упрощается, и мы имеем:

$$|\sigma_{\max}| = F \left[ \frac{1}{F} + \frac{y_P}{W_z} + \frac{z_P}{W_y} \right] \leq [\sigma] .$$

Если же материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо проверить прочность стержня как в растянутой, так и в сжатой зонах.

### 7.8 Примеры расчета стержней при внецентренном растяжении или сжатии

Стальная полоса шириной  $H = 10$  см и толщиной  $t = 1$  см, центрально растянута силами  $P = 70$  кН, имеет прорезь шириной  $h = 3$  см (рисунок 7.21). Определить наибольшие нормальные напряжения в сечении  $AB$ , не учитывая концентрации напряжений. Какой ширины  $h$  могла бы быть прорезь при той же величине растягивающего усилия, если бы она была расположена посередине ширины полосы?

При несимметричной прорези центр тяжести ослабленного сечения смещается от линии действия силы вправо и возникает внецентренное растяжение. Для определения положения центра тяжести ( $y_c$ ) ослабленное сечение представим как большой прямоугольник размерами  $H \times t$  (фигура I) из которого удален малый прямоугольник с размерами  $h \times t$  (фигура II). За исходную ось примем ось  $x$ .

$$y_c = \frac{F^I y_c^I - F^{II} y_c^{II}}{F^I - F^{II}} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot (-1.5)}{10 \cdot 1 - 3 \cdot 1} = 0.643 \text{ см.}$$

В этом случае в поперечном сечении  $AB$  возникает два внутренних силовых фактора: продольная сила  $N=P$  и изгибающий момент  $M_{x_c} = Py_c$ .

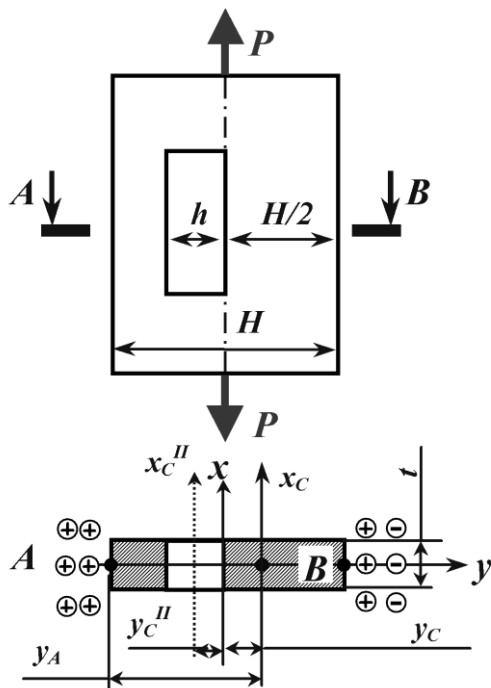


Рисунок 7.21 – Рассматриваемое сечение

С целью определения опасной точки расставим знаки напряжений по боковым сторонам поперечного сечения (рисунок 7.21). От продольной силы во всех точках сечения имеют место положительные (растягивающие) напряжения. От изгибающего момента слева от оси  $x_c$  имеют место растягивающие напряжения (знак плюс), справа – сжимающие (знак минус).

Таким образом, максимальные нормальные напряжения возникают в точке  $A$ :



$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F_n} + \frac{M_{x_c}}{J_{x_c}} y_A \quad ,$$

где  $F_n$  – площадь ослабленного сечения,  
равная  $F^I - F^{II} = 7 \text{ см}^2$ ;

$J_{x_c}$  – момент инерции ослабленного сечения относительно  
главной центральной оси  $x_c$ ;

$y_A$  – расстояние от нейтральной линии ( $x_c$ ) до наиболее  
удаленной точки (точки А).

$$\begin{aligned} J_{x_c} &= J_{x_c}^I - J_{x_c}^{II} = J_x^I + F^I y_c^2 - \left[ J_{x_{II}}^{II} + F^{II} \cdot \left( \frac{h}{2} + y_c \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1 \cdot 10^3}{12} + 1 \cdot 10 \cdot 0.643^2 - \left[ \frac{1 \cdot 3^3}{12} + 1 \cdot 3 \cdot (1.5 + 0.643)^2 \right] = \\ &= 71.43 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

$$y_A = \frac{H}{2} + y_c = 5,643 \text{ см.}$$

В результате максимальные нормальные напряжения будут равны:

$$\sigma_{\max} = \frac{7 \cdot 10^4}{7 \cdot 10^{-4}} + \frac{7 \cdot 10^4 \cdot 0.643 \cdot 5.643 \cdot 10^{-4}}{71.45 \cdot 10^{-8}} = 1.35 \cdot 10^8 \text{ Па} = 135 \text{ МПа} \quad .$$

При симметричной прорези шириной  $h_1$  возникает только растяжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F_1} = \frac{P}{(H - h_1)t} \quad ,$$

Тогда

$$h_1 = H - \frac{P}{\sigma_{\max} t} = 0.1 - \frac{10^4 \cdot 7}{135 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2}} = 0.048 \text{ м} = 4.8 \text{ см} \quad .$$

## 7.9 Ядро сечения при внецентренном сжатии

При конструировании стержней из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (бетон), весьма желательно добиться того, чтобы все сечение работало лишь на сжатие. Этого можно достигнуть, не давая точке приложения силы  $P$  слишком далеко отходить от центра тяжести сечения, ограничивая величину эксцентриситета.

Конструктору желательно заранее знать, какой эксцентриситет при выбранном типе сечения можно допустить, не рискуя вызвать в сечениях стержня напряжений разных знаков. Здесь вводится понятие о так называемом ядре сечения. Этим термином обозначается некоторая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой можно располагать точку приложения силы  $P$ , не вызывая в сечении напряжений разного знака.

На рисунке 7.22 поясняется данное определение ядра сечения.

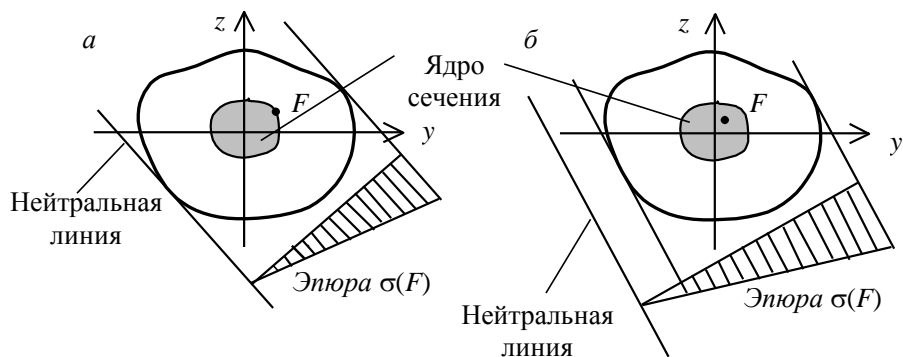


Рисунок 7.22 – Ядро сечения произвольного сечения

При приложении силы  $P$  в точке на границе ядра сечения с координатами  $(x_я; y_я)$  нулевая линия будет касательной к контуру поперечного сечения в точке  $B$  (рисунок 7.23) и отсекает на главных центральных осях отрезки  $a_{x_c}$  и  $a_{y_c}$ .

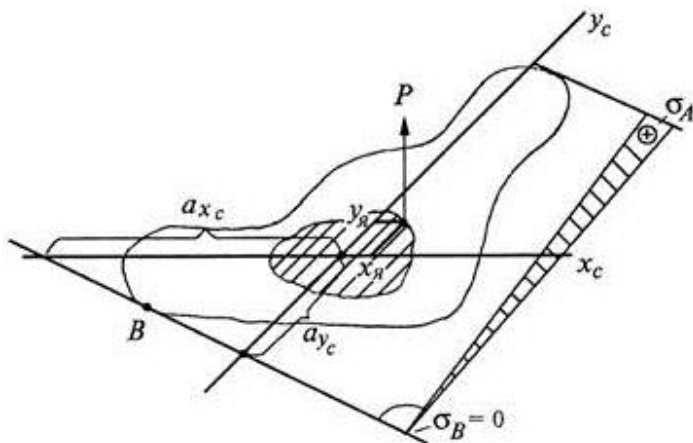


Рисунок 7.23 – Положение нейтральной линии при приложении силы на границе ядра сечения

Применяя (7.6), получим:

$$x_{я} = -\frac{i_{y_c}^2}{a_{x_c}}; \quad (7.10)$$

$$y_{я} = -\frac{i_{x_c}^2}{a_{y_c}}.$$

Формулы (7.10) описывают алгоритм вычисления координат точек границы ядра сечения:

1) проводится касательная к контуру поперечного сечения и определяются отрезки  $a_{x_c}$  и  $a_{y_c}$ ;

2) по формуле (7.10) определяются координаты  $x_{я}$  и  $y_{я}$ .

Такая процедура проводится со всеми касательными. Для сложного криволинейного контура, чем больше будет проведено касательных, тем точнее будет найден контур ядра сечения.

Можно доказать, что если касательная будет вращаться вокруг угла контура сечения, если он есть, то соответствующая точка на контуре ядра будет перемещаться по прямой линии, соединяющей точки ядра соответствующие крайним положениям касательных.

Таким образом, если контур поперечного сечения представляет собой многоугольник, то контур ядра сечения тоже будет иметь форму многоугольника, но необязательно с тем же количеством углов (их может быть меньше).

Для прямоугольного сечения ядро будет ромбом с диагоналями, равными одной трети соответствующей стороны сечения. Поэтому прямоугольное сечение при расположении силы по главной оси работает на напряжения одного знака, если точка приложения силы не выходит за пределы средней трети стороны сечения.

Для круглого сечения радиуса  $r$  очертание ядра будет по симметрии кругом радиуса  $r_0$ . Возьмем какое-либо положение нейтральной оси, касательное к контуру. Ось  $Oy$  расположим перпендикулярно к этой касательной. Тогда:

$$\alpha_y = r; \alpha_x = \infty; z_x = r_0 = -\frac{i_x^2}{\alpha_y} = -\frac{\frac{\pi r^4}{4}}{r} = -\frac{r}{4}$$

Таким образом, ядро представляет собой круг с радиусом, вчетверо меньшим, чем радиус сечения.

Для двутавра нейтральная ось при обходе контура не будет пересекать площади поперечного сечения, если будет касаться прямоугольного контура  $ABCD$ , описанного около двутавра (рисунок 7.24,  $a$ ). Следовательно, очертание ядра для двутавра имеет форму ромба, как и для прямоугольника, но с другими размерами.

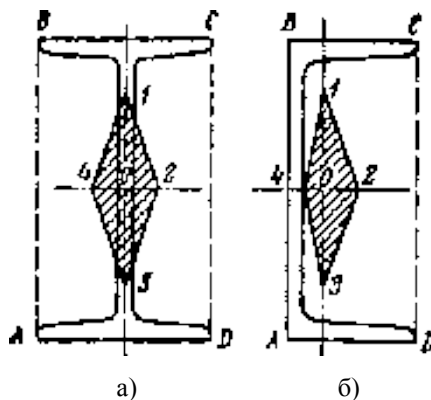


Рисунок 7.24 – Ядро сечения:

а – для двутавра; б – для швеллера

Для швеллера, как и для двутавра, точки 1, 2, 3, 4 контура ядра (рисунок 7.24, б) соответствуют совпадению нейтральной оси со сторонами прямоугольника  $ABCD$ .

### Контрольные вопросы

1. Косой изгиб. Внецентренное сжатие.
2. Напряжения при косом изгибе
3. Что такое силовая плоскость?
4. Свойства нейтральной линии.
5. Изгиб с кручением.

## ТЕМА 8. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

### 8.1 Общие положения

Под устойчивостью упругого тела понимают его способность сохранять состояние равновесия при внешних относительно малых воздействиях (возмущениях).

Упругое равновесие тела называют неустойчивым, если тело, будучи выведенным из него, в исходное состояние не возвращается.

Между этими двумя состояниями существует переходное (критическое) состояние, при котором тело находится в безразличном равновесии. Это означает, что тело может сохранять исходное состояние, но может и потерять его при незначительном воздействии.

Устойчивость формы равновесия тела зависит от величины приложенных к нему нагрузок. Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости исходной формы равновесия тела, называется критической ( $P_{кр}$ ).

Можно утверждать, что приложение критической нагрузки равносильно разрушению конструкции. Неустойчивая форма равновесия неминуемо будет утрачена, и деформации (напряжения) неограниченно возрастут.

Таким образом, при расчёте на устойчивость  $P_{кр}$  подобна разрушающей нагрузке при расчёте на прочность.

Следует иметь в виду, что потеря устойчивости (и разрушение) может наступить при напряжениях, существенно меньших тех, которые допускаются по условию прочности.

Задачу об устойчивости сжатого упругого стержня называют задачей Эйлера.

Представим себе, что под действием осевой силы стержень изогнулся – его ось отклонилась от прямолинейной формы равновесия (рисунок 8.1). Пусть отклонения оси стержня малы, и напряжения не превышают предела пропорциональности.

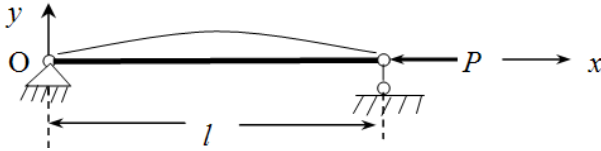


Рисунок 8.1 – Стержень под действием осевой силы

Вертикальные составляющие опорных реакций, очевидно, равны нулю. Поэтому изгибающий момент в произвольном сечении стержня будет равен:

$$M = -P \cdot y, \quad (8.1)$$

где  $y$  – прогиб стержня в данном сечении, а знак минус означает, что момент соответствует отрицательной кривизне оси стержня.

Для вывода дифференциального уравнения изогнутой оси стержня рассмотрим выражение:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py. \quad (8.2)$$

Под  $EJ$  следует понимать минимальную жесткость стержня. Именно в этой плоскости следует ожидать искривление оси стержня.

Пусть  $EJ = const$  вдоль оси стержня, тогда, положив:

$$\frac{P}{EJ} = k^2. \quad (8.3)$$

Приведём дифференциальное уравнение (8.2) к виду:

$$y'' + k^2 y = 0. \quad (8.4)$$

Решением этого уравнения будет:

$$y = A \sin kx + B \cos kx, \quad (8.5)$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  находятся из граничных условий для функции  $y$ , т.е. из условий закрепления концов стержня.

На левом конце  $x = 0, y = 0$ , следовательно  $B = 0$ .

На правом конце  $x = l, y = 0$ , что даёт  $A \sin kl = 0$ , следовательно,  $A = 0$  или  $kl = \pi n$ , где  $n = 0, 1, 2, 3$ .

Однако при  $A = 0$  решение является тривиальным – оно соответствует прямолинейной форме стержня. По той же причине следует отбросить корень  $kl = 0$ .

Таким образом, изогнутая ось является синусоидой с уравнением:

$$y = A \sin kx, \text{ где } k = \frac{\pi n}{l}. \quad (8.6)$$

Подстановка  $k$  в (8.3) из (8.6) приводит к формуле Эйлера:

$$P = n^2 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (8.7)$$

Формула Эйлера (8.7) выражает нагрузку, способную удержать в равновесии слегка искривленный стержень. Теоретически эта нагрузка имеет целый ряд значений ( $n=1, 2, 3$ ). Каждому значению  $n$  соответствует своя форма упругой линии (рисунок 8.2).

Однако с практической точки зрения интересно знать наименьшее значение силы  $P$ , поэтому следует принять  $n=1$ , тогда:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (8.8)$$



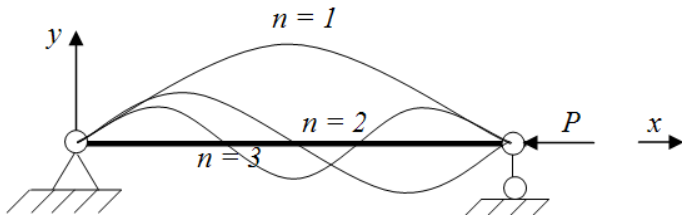


Рисунок 8.2 – Форма упругой линии при различных значениях  $n$

Этому значению критической силы соответствует изгиб стержня по синусоиде с одной полуволной:

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (8.9)$$

Значениям критической силы высших порядков соответствуют упругие линии с двумя, тремя и т. д. полуволнами (рисунок 2). Однако, как показывают исследования, эти формы равновесия неустойчивы. Кроме того, при нарастании осевой сжимающей силы в первую очередь реализуется форма равновесия с одной полуволной.

Из уравнения упругой линии (8.9) следует, что при  $x = \frac{l}{2}$  прогиб балки равен:  $y = y_{\max} = A$ .

Таким образом,  $A$  – это прогиб стержня посередине его длины. Поскольку равновесие стержня возможно при любом малом отклонении от прямолинейной формы, то величина  $A$  остается неопределённой. Однако прогиб  $A$  должен быть настолько мал, чтобы правомерным было применение дифференциального уравнения изогнутой оси стержня (8.2).

Подставим в формулу(8.8) для критической силы  $J = i^2 F$ , разделим её на площадь поперечного сечения стержня  $F$  и получим формулу критических напряжений:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \text{ или } \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i^2}{l^2}.$$

Введём величину  $\lambda = \frac{l}{i}$  – гибкость стержня. Она играет важную роль в проверке стержней на устойчивость. В итоге формула для  $\sigma_{кр}$  получит вид:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (8.10)$$

Формула Эйлера получена для стержня с шарнирным опиранием его концов. Для других случаев опирания критическую силу можно получить тем же путём. В результате получается обобщённая формула:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (8.11)$$

где  $\mu$  – коэффициент длины, отражающий влияние условий закрепления;

$\mu l$  – приведенная длина стержня.

Формула  $\sigma_{кр}$  (8.10) также может быть обобщена на другие случаи закрепления. Достаточно ввести в её знаменатель приведенную гибкость:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}.$$

Значения  $\mu$  для различных условий опирания стержня приводятся в справочной литературе. Ниже приведены некоторые из них:

–  $\mu = 2$  при одном защемлённом и другом свободном конце;

–  $\mu = \frac{1}{2}$  при двух защемлённых концах;

- $\mu = 0,7$  при заземлении на одном конце и подвижном шарнире на другом;
- $\mu = 1$  при шарнирном опирании обоих концов.

Из формулы (8.10) следует, что критические напряжения для стержня из данного материала с модулем  $E$  не зависят от прочности материала. Поэтому, для достаточно гибкого стального стержня ( $\lambda > 100$ )  $\sigma_{кр}$  оказываются ниже предела пропорциональности  $\sigma_{нц}$  и определяют, таким образом, несущую способность стержня при сжатии.

Однако у стальных стержней с гибкостью меньше предельной ( $\lambda < 100$ )  $\sigma_{кр}$  могут превышать  $\sigma_{нц}$ .

Опыты показали, что короткие стержни ( $\lambda = 30 \div 40$ ) теряют несущую способность из-за потери прочности материала при сжатии, а не потери устойчивости формы.

Стержни средней гибкости, наиболее широко применяемые на практике, по данным опытов теряют несущую способность из-за потери устойчивости формы, но при напряжениях  $\sigma_{нц} < \sigma_{кр} < \sigma_0$ .

Для проверки на устойчивость таких стержней применение формулы (8.10) не только принципиально недопустимо, но и крайне опасно по своим последствиям.

Для стержней, теряющих устойчивость за пределом упругости Ф. С. Ясинским предложена следующая эмпирическая формула:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (8.12)$$

где  $a$  и  $b$  – коэффициенты, зависящие от материала.

Они подобраны так, чтобы при  $\lambda = \lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{нц}}}$  напряжения  $\sigma_{кр}$  равнялись  $\sigma_{нц}$ , а при малых  $\lambda$  напряжения  $\sigma_{кр}$  мало отличались от опасных напряжений  $\sigma_0$ . Существуют таблицы

значений коэффициентов  $a$  и  $b$  для различных материалов, составленные по экспериментальным данным.

Таблица 8.1 – Коэффициенты формулы Ясинского, МПа

Материал	$a$	$b$
Сталь Ст.3	310	1,14
Сталь Ст.5	464	3,62
Кремнистая сталь	589	3,82
Дерево	29,3	0,19

## 8.2 Расчёт сжатых стержней на устойчивость

Очевидно, что практически  $\sigma_{кр}$  в сжатом стержне допускать нельзя – следует назначать некоторый запас устойчивости. Тогда допускаемое напряжение в расчётах на устойчивость будет выражаться формулой:

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}.$$

Коэффициент запаса устойчивости всегда несколько выше коэффициента запаса прочности. Этим компенсируются неизбежные на практике отклонения: начальной формы стержня, реальных свойств материала и способа приложения силы от принятых в расчёте.

Таким образом, условие устойчивости сжатого стержня имеет вид:

$$\sigma \leq [\sigma]_y, \quad (8.13)$$

где  $\sigma$  – действующие в стержне сжимающие напряжения.

Можно связать допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}$$

с допускаемым напряжением на прочность:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n_0}.$$

Из их отношения следует:

$$[\sigma]_y = \varphi \cdot [\sigma], \quad (8.14)$$

где  $\varphi = \frac{\sigma_{кр} n_0}{\sigma_0 n_y}$  – коэффициент продольного изгиба,

учитывающий уменьшение допускаемого напряжения на прочность.

Очевидно, что график зависимости  $\varphi$  от  $\lambda$  в некотором масштабе является графиком  $\sigma_{кр}$  от  $\lambda$ . Иначе говоря, для любого материала можно составить график или таблицу значений  $\varphi$  в функции от гибкости  $\lambda$ . Тогда, при известном модуле  $E$  и гибкости  $\lambda$ , коэффициент  $\varphi$  определяют из таблицы и условие устойчивости (8.13) с учётом (8.14) записывают в виде:

$$\frac{P}{\varphi F} \leq [\sigma]. \quad (8.15)$$

Эта формула при проверочном расчёте стержня на устойчивость не требует отыскания критических напряжений.

В проектировочном расчёте площадь сечения стержня  $F$  подбирают методом последовательных приближений. Суть метода состоит в следующем. Задаются значением  $\varphi$  в первом приближении ( $\varphi = \varphi_1$ ) и по условию (8.15) находят площадь сечения  $F$ , а затем гибкость  $\lambda$ . По значению  $\lambda$  из таблицы 2 находят фактическое значение  $\varphi_1'$ .

В качестве второго приближения для  $\varphi$  берут значение

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}.$$

Таблица 8.2 – Коэффициенты продольного изгиба

Гибкость $\lambda$	Значения $\varphi$			
	Ст. 3	Ст. 5	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	–	0,25
120	0,45	0,36	–	0,22
130	0,40	0,33	–	0,18
140	0,36	0,29	–	0,16
150	0,32	0,26	–	0,14

Расчёт ведётся до достижения незначительного отличия  $\varphi_i$  от  $\varphi_i'$ . Как правило, для подбора сечения требуется не более трёх приближений.

### 8.3 Пример расчета сжатых стержней на устойчивость и выносливость

На стойку, составленную из двух двутавров с шарнирно закрепленными концами, соединенных планками (рисунок 8.3), действует сжимающая сила  $F = 500 \text{ кН}$ .

Материал – сталь Ст 3 ГОСТ 380–71. Основное допускаемое напряжение на сжатие  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Требуется:

1) подобрать сечение стойки из условия устойчивости (номер двутавра);

- 2) определить ширину сечения стойки  $B$ ;
- 3) определить расстояние между соединительными планками  $l_0$ , ширину  $H$  и толщину  $t_{II}$  соединительных планок (для стойки состоящей из нескольких профилей).

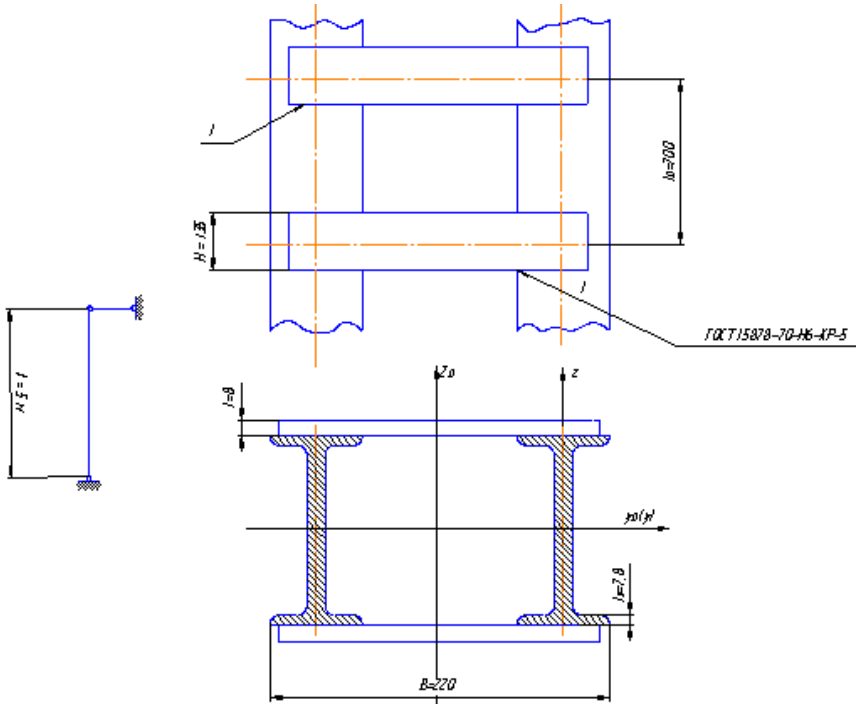


Рисунок 8.3 – Расчетная схема на устойчивость

*Подбор сечения стойки из условия устойчивости*

Условие устойчивости стержня имеет вид:

$$\frac{F}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma_{с.ж}],$$

где  $\varphi$  – коэффициента продольного изгиба;

$F$  – сжимающая сила, кН;

$A$  – площадь поперечного сечения стойки, м<sup>2</sup>;

$[\sigma_{сж}]$  – допускаемое напряжение, МПа.

При проектировочном расчете (подбор потребного диаметра стержня) задача решается методом последовательных приближений. Выбираем в первом приближении  $\varphi_1 = 0,5$  из интервала  $0 < \varphi < 1$  и определяем требуемую площадь поперечного сечения стержня в первом приближении.

1. Первое приближение  $\varphi_1 = 0,5$

Находим требуемую площадь поперечного сечения:

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma_{сж}]} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 62,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По сортаменту прокатной стали ГОСТ 8239-72 подбираем двутавр № 22,  $A = 32,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $I_y = 2790 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  
 $i_y = 0,0922 \text{ м}$ .

Определяем гибкость стойки по формуле:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}},$$

где  $\lambda$  – гибкость стойки;

$\mu$  – коэффициент длины, отражающий влияние условий закрепления;

$l$  – длина стойки, м;

$i_{\min}$  – минимальный радиус инерции, м.

Для определения  $i_{\min}$  необходимо знать минимальные моменты инерции поперечного сечения стойки. При увеличении расстояния между двутаврами момент инерции сечения стойки  $I_{Z_0}$  относительно оси  $Z_0$  будет увеличиваться, а отно-



нительно оси  $Y_0$  изменяться не будет и останется равным  $I_{y_0} = 2I_y$ , где  $I_y$  – момент инерции сечения одной ветви стойки относительно центральной оси двутавра. Поэтому в качестве минимального момента инерции поперечного сечения стойки принимается  $I_y$ , тогда:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2790 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 32,8 \cdot 10^{-4}}} = 0,092 \text{ м}.$$

Полученное значение совпадает с табличным значением  $i_y = 0,0922 \text{ м}$ , поэтому вычислять его не надо. Для стойки, составленной из углов или тонкостенного стержня, гибкость определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 5}{0,092} = 54,3.$$

По таблице для стали марки Ст 3 ГОСТ 380–71:  $\lambda = 50$  соответствует  $\varphi = 0,89$ ,  $\lambda = 60$  соответствует  $\varphi = 0,86$ .

Интерполируя получим:

$$\varphi_1 = \frac{0,89 - 0,86}{10} \cdot 5,7 + 0,86 = 0,8771.$$

Вычислим напряжение:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_1 \cdot A} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,8771 \cdot 65,6 \cdot 10^{-4}} = 87 \text{ МПа}.$$

Материал значительно недогружен.

2. Второе приближение. Приняв:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \frac{0,5 + 0,8771}{2} = 0,688.$$

Искомая площадь

$$A = \frac{F}{\varphi_2 \cdot [\sigma_{сж}]} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,688 \cdot 160 \cdot 10^6} = 45,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Подбираем двутавр № 18,  $A = 23,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $i_y = 0,074 \text{ м}$ .

Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 5}{0,074} = 67,4.$$

По таблице для стали марки Ст 3 ГОСТ 380-71:

$$\varphi_2' = \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 2,6 + 0,81 = 0,823.$$

Вычисляем напряжение:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_2' \cdot A} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,823 \cdot 46,8 \cdot 10^{-4}} = 130 \text{ МПа}.$$

Недогружение составляет:

$$\frac{160 - 130}{160} \cdot 100 = 18,8 \% > 1 \% , \text{ что недопустимо.}$$

*3. Третье приближение*

$$\varphi_3 = \frac{0,688 + 0,823}{2} = 0,755.$$

Искомая площадь

$$A = \frac{500 \cdot 10^3}{0,755 \cdot 160 \cdot 10^6} = 41,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По таблице ГОСТ 8239–72 получаем двутавр № 18.

В дальнейших расчетах принимаем двутавр № 16,  
 $A = 20,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $I_y = 873 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $I_z = 58,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  
 $i_y = 0,0657 \text{ м}$ ,  $i_z = 0,017 \text{ м}$ ,  $B = 0,081 \text{ м}$ .

Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 5}{0,0657} = 76.$$

По таблице для стали марки Ст 3 ГОСТ 380-71:

$$\varphi_3 = \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 4 + 0,75 = 0,774.$$

Вычисляем напряжение:

$$\sigma = \frac{500 \cdot 10^3}{0,774 \cdot 40,4 \cdot 10^{-4}} = 159,9 \text{ МПа}$$

Недогружение составляет:

$$\frac{160 - 159,9}{160} \cdot 100 = 0,0625 \% < 1 \%$$

Окончательно принимаем для стойки двутавра № 16.

*Определение ширины сечения стойки B (рисунок 8.4)*

Для обеспечения равно устойчивого положения принимаем:  $I_{z_0} = I_{y_0}$ , тогда:

$$I_{z_0} = 2 \left[ I_z + A \cdot \left( \frac{B}{2} - b \right)^2 \right] = 2I_y,$$

$$I_z + A \cdot \left( \frac{B}{2} - \frac{b}{2} \right)^2 = I_y,$$

$$\left( \frac{B}{2} - \frac{b}{2} \right)^2 = \frac{I_y - I_z}{A},$$

$$B = 2 \cdot \left( \sqrt{\frac{I_y - I_z}{A}} + \frac{b}{2} \right).$$

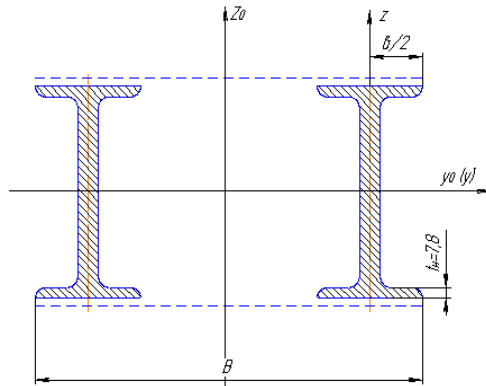


Рисунок 8.4 – Определение ширины стойки

Подставляя известные значения, получим:

$$B = 2 \cdot \left( \sqrt{\frac{873 \cdot 10^{-8} - 58,6 \cdot 10^{-8}}{20,2 \cdot 10^{-4}}} + \frac{8,1 \cdot 10^{-2}}{2} \right) = 0,208 \text{ м}$$

Принимаем  $B = 0,208$  м.

*Определим расстояние между соединительными планками  $l_0$ , ширину  $H$  и толщину  $t_{\Pi}$  соединительных планок (для стойки состоящей из нескольких профилей)*

Согласно строительным нормам и правилам (СНиП) максимальная гибкости отдельных ветвей между планками не должна превышать 40, т.е.  $\lambda \leq 40$ . Рассматривая участок ветви между планками как стержень с шарнирно-закрепленными концами ( $\mu = 1$ ), получим:

$$\lambda = \frac{l_0}{\mu \cdot i_{\min}} \leq 40,$$

откуда

$$l_0 \leq \mu \cdot i_{\min} \cdot 40,$$

где  $i_{\min}$  – минимальный радиус инерции одной ветви стойки.

В нашем случае  $i_{\min} = i_z$ , тогда

$$l_0 = 1 \cdot 0,017 \cdot 40 = 0,68 \text{ м}$$

Округляем:  $l_0 = 0,7 \text{ м}$ .

Размеры соединительных планок принимаем из конструктивных соображений.

$$H = (0,6 - 0,8) \cdot B.$$

Принимаем  $H = 135 \text{ мм}$

$$t_{II} \cong t = 0,008 \text{ м}$$

где  $t$  – средняя толщина полки, м

### **Контрольные вопросы**

1. Критическая сила. Формула Эйлера.
2. Четыре способа закрепления концов сжатого стержня. Пределы применимости формулы Эйлера.
3. Формула Ясинского.
4. Методика расчета сжатого стержня на устойчивость.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебном пособии изложена последовательность расчета внутренних силовых факторов при различных видах нагружения стержня.

Рассмотрены примеры по определению продольной силы в поперечных сечениях стержня при центральном растяжении-сжатии, крутящего момента при кручении, поперечной силы и изгибающего момента при поперечном изгибе, расчет сжатых стержней на устойчивость и выносливость.

Каждый раздел содержит контрольные вопросы, которые помогут читателю понять степень усвоения данного материала. Данные вопросы могут быть использованы для контроля знаний при аттестации студентов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абгарян, К. А. Динамика ракет [Текст] / К. А. Абгарян, И. М. Рапопорт. – М. : Машиностроение, 1969. – 378 с.
2. Абрамович, С. Ф. Динамическая прочность судового оборудования [Текст] / С. Ф. Абрамович, Ю. С. Крючков. – Л. : Судостроение, 1967. – 512 с.
3. Авдонин, А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций [Текст] / А. С. Авдонин. – М. : Машиностроение, 1969. – 402 с.
4. Алабужев, П. М. Теории подобия и размерностей. Моделирование [Текст] / П. М. Алабужев, В. Б. Геронимус, Л. М. Минкевич, Б. А. Шеховцов. – М. : Высшая школа, 1968. – 208 с.
5. Александров, А. В. Соппротивление материалов [Текст] / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М. : Высшая школа, 1995. – 560 с.
6. Ананьев, И. В. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование [Текст] / И. В. Ананьев, П. Г. Тимофеев. – М. : Машиностроение, 1965. – 526 с.
7. Ананьев, И. В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем [Текст] / И. В. Ананьев. – Гостехиздат, 1946. – 223 с.
8. Арсенин, В. Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции [Текст] / В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1966. – 368 с.
9. Бабаков, И. М. Теория колебаний [Текст] / И. М. Бабаков. – 3-е изд. – М. : Наука, 1968. – 560 с.
10. Балабух, Л. И. Строительная механика ракет [Текст] / Л. И. Балабух, Н. А. Алфутов, В. И. Усюкин. – М. : Высшая школа, 1984. – 391 с.
11. Бельский З. А. Конструкция летательных аппаратов [Текст] / З. А. Бельский, И. П. Власов, В. Н. Зайцев; под ред. д-р техн. наук С. Н. Кана. – М. : Оборонгиз, 1963. – 709 с.

12. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов [Текст] / Н. М. Беляев. – М. : Наука, 1976. – 608 с.

13. Биргер, И. А. Прочность. Устойчивость. Колебания. В 3 т. Т. 3 [Текст] / И. А. Биргер, Я. Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1968. – 567 с.

14. Бредихин, Б. А. Сопротивление материалов [Текст] / Б. А. Бредихин. 2-е изд., испр. и доп. – Краснодар : КубГАУ, 2006. – 206 с.

15. Булгаков, Б. В. Колебания [Текст] / Б. В. Булгаков. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. – 890 с.

16. Бычков, Д. В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций [Текст] / Д. В. Бычков. – М. : Госстройиздат, 1962. – 475 с.

17. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В. З. Власов, П. Н. Леонтьев. – М. : Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. – 490 с.

18. Гевондян, Т. А. Приборы для измерения и регистрации колебаний [Текст] / Т. А. Гевондян, Л. Т. Киселев. – М. : Машгиз, 1962. – 467 с.

19. Дарков, А. В. Сопротивление материалов [Текст] / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 4-е изд., перераб. – М. : Высшая школа, 1975. – 654 с.

20. Кочетов, В. Т. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособие / В. Т. Кочетов, А. Д. Павленко, М. В. Кочетов. – 3-е изд., перераб. и доп. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 544 с.

21. Маделунг, Э. Математический аппарат физики [Текст] / Э. Маделунг. – М. : Физматгиз, 1961. – 620 с.

22. Пановко, Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем [Текст] / Я. Г. Пановко. – М. : Физматгиз, 1960. – 193 с.

23. Пархиловский, И. Г. Автомобильные рессоры [Текст] / И. Г. Пархиловский. – М. : Машиностроение, 1978. – 232 с.



24. Писаренко, Г. С. Колебание упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале [Текст] : монография / Писаренко Георгий Степанович. – Киев : Наукова думка, 1970. – 380 с.

25. Серенсен, С. В. Динамика машин для испытаний на усталость [Текст] / С. В. Серенсен. – М. : Машиностроение, 1967 – 460 с.

26. Снитко, Н. К. Строительная механика [Текст] / Н. К. Снитко. – 3-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 1980. – 431 с.

27. Сопротивление материалов [Текст] / Г. С. Писаренко, В. А. Агаев, А. Л. Квитка [и др.]. – 5-е изд, перераб. и доп. – Киев : Вища школа, 1986. – 775 с.

28. Сорокин, Е. С. К вопросу неупругого сопротивления строительных материалов при колебаниях [Текст] / Е. С. Сорокин // Научное сообщение ЦНИПС. – М. : Госстройиздат, 1954. – Вып. 15. – С. 76.

29. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 514 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ.....	4
1.1 Основные принципы и гипотезы науки о сопротивлении материалов.....	4
1.2 Внешние и внутренние силы.....	7
1.3 Понятие о напряжениях и деформациях.....	10
ТЕМА 2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ. ГИБКИЕ НИТИ.....	13
2.1. Усилия в поперечном сечении стержня.....	13
2.2 Напряжения и деформации при растяжении (сжатии).....	13
2.3 Потенциальная энергия упругой деформации.....	16
2.4 Механические характеристики материалов.....	16
2.5 Расчет призматического стержня при растяжении (сжатии).....	21
2.6 Расчёт гибких нитей с учётом собственного веса.	24
2.7 Уравнение состояния провода линии электропередачи.....	28
ТЕМА 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ... ..	33
3.1 Напряженное состояние в точке тела.....	33
3.2 Виды напряженного состояния.....	38
3.3 Деформации при сложном напряженном состоянии. Связь между напряжениями и деформациями.....	43
3.4 Теории прочности.....	45
ТЕМА 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ.....	51
4.1 Основные понятия и определения.....	51

4.2	Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей.....	54
4.3	Моменты инерции простейших фигур.....	55
4.4	Вычисление моментов инерции сложных фигур..	60
4.5	Изменение моментов инерции при повороте осей координат.....	61
4.6	Главные оси и главные моменты инерции.....	62
4.7	Моменты сопротивления площади сечения.....	64
4.8	Пример определения геометрических характеристик составного поперечного сечения...	65
ТЕМА 5. КРУЧЕНИЕ.....		72
5.1	Общие понятия.....	72
5.2	Напряжения при кручении брусьев сплошного и кольцевого сечений.....	72
5.3	Расчет брусьев на прочность и жесткость при кручении.....	76
5.4	Пример расчета вала на кручение.....	78
ТЕМА 6. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ.....		89
6.1	Понятие о деформации изгиба. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.....	89
6.2	Нормальные напряжения при изгибе.....	95
6.3	Касательные напряжения при изгибе.....	102
6.4	Пример расчета балок на прочность.....	106
ТЕМА 7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.....		126
7.1	Общие положения.....	126
7.2	Расчет балки, подверженной косому или пространственному изгибу.....	129
7.3	Определение внутренних усилий при косом изгибе.....	129
7.4	Определение напряжений при косом изгибе.....	131
7.5	Определение перемещений при косом изгибе.....	137
7.6	Примеры расчета балок на косоу изгиб.....	140
7.7	Внецентренное сжатие или растяжение.....	143

7.8 Примеры расчета стержней при внецентренном растяжении или сжатии.....	150
7.9 Ядро сечения при внецентренном сжатии.....	153
ТЕМА 8. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.....	157
8.1 Общие положения.....	157
8.2 Расчёт сжатых стержней на устойчивость.....	163
8.3 Пример расчет сжатых стержней на устойчивость и выносливость.....	165
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	173
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	174

У ч е б н о е   и з д а н и е

**Дробот** Виктор Александрович,  
**Брусенцов** Анатолий Сергеевич

## **ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

*Учебное пособие*

В авторской редакции

Подписано в печать 00.00.0000. Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Усл. печ. л. – 10,4. Уч.-изд. л. – 8,1.

Тираж ..... экз. Заказ № .

Типография Кубанского государственного  
аграрного университета.

350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13