МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина»

Факультет гидромелиорации

Кафедра сопротивления материалов

ОБЪЕМНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Методические указания

Краснодар

КубГАУ

2020

Составители: В. А. Дробот, П. Г. Пасниченко

Объемное напряженное и деформированное состояние : метод. указания к выполнению расчетно-графических работ / сост. В. А. Дробот, П. Г. Пасниченко – Краснодар : КубГАУ, 2020. – 19 с.

В методическом указании изложены теоретические основы, а также практические указания по выполнению расчетно-проектировочной работы «Объемное напряженное и деформированное состояние». Приводится методика определения инвариант кубического уравнения, нахождение главных напряжений и направляющих косинусов. По расчетным данным выполняется графического построение векторов главных напряжений. Рассматривается определение напряжений с помощью круга Мора.

Издание предназначено для обучающихся по специальности 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений.

Рассмотрено и одобрено кафедрой сопротивления материалов, протокол № 6 от 03.02.2020.

Краткие сведения из теории напряженного и деформированного состояния

Объемным напряженным состоянием в данной точке твердого тела называют совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих на трех взаимно перпендикулярных площадках этой точки: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} (рис. 1).

В общем случае объемное напряженное состояние в точке тела задается как тензор напряжений, записывающийся в виде матрицы 3-го порядка, стороны которой содержат по три компонента полного напряжения, а столбцы - компоненты полных напряжений на разных площадках, параллельных координатным осям.

$$Т_н = \begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{matrix}$$

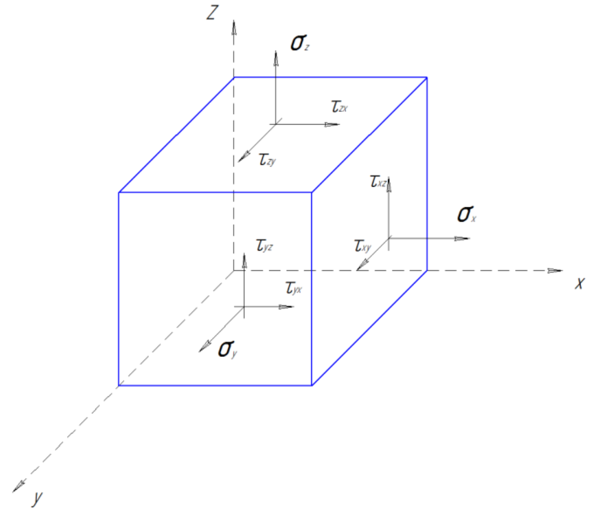


Рис. 1

Тензор напряжений в данной точке определяется тремя векторами полных напряжений по трем площадкам, перпендикулярным к координатным осям. При помощи тензора напряжений можно найти значения напряжений на любой площадке, проходящей через заданную точку.

Поскольку главные напряжения не зависят от принятых осей координат, то инварианты напряженного состояния будут равны

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = const$$
$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = const$$
$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\,\tau_{zx} = const$$

Зная инварианты тензора объемного напряженного состояния нетрудно найти значения главных напряжений из кубического уравнения

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

Если принять подстановку $\sigma = S + \sigma_{ср}$, то кубическое уравнение будет иметь такой вид:

$$S^3 + pS + q = 0$$

Здесь $p = I_2 - 3\sigma_{ср}^2$

$$q = - I_3 - 2\sigma_{ср}^3 + I_2\,\sigma_{ср}$$

$$\sigma_{ср} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

Корни полученного уравнения вычисляются по формулам

$$S_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi^o}{3}$$

$$S_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi^o}{3} + 240^o\right)$$

$$S_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi^o}{3} + 120^o\right)$$

$$\cos\varphi = -\frac{q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$$

Главные напряжения тогда будут равны:

$$\sigma_1 = S_1 + \sigma_{\text{ср}}$$

$$\sigma_2 = S_2 + \sigma_{\text{ср}}$$

$$\sigma_3 = S_3 + \sigma_{\text{ср}}$$

причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Для контроля правильности определения необходимо использовать инварианты объемного напряженного состояния:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = I_1$$

$$\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = I_2$$

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = I_3$$

Для определения направляющих косинусов вектора σ_1 - l_1, m_1, n_1, используем систему уравнений:

$$(\sigma_x - \sigma_1)\, l_1 + \tau_{yx} m_1 + \tau_{zx}\, n_1 = 0$$

$$\tau_{xy}\, l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)\, m_1 + \tau_{zy}\, n_1 = 0$$

$$\tau_{xz}\, l_1 + \tau_{yz} m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)\, n_1 = 0$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

Эту систему необходимо разделить на l_1, тогда

$$\sigma_x - \sigma_1 + \tau_{yx}\left(\frac{m_1}{l_1}\right) + \tau_{zx}\left(\frac{n_1}{l_1}\right) = 0$$

$$\tau_{xy} + (\sigma_y - \sigma_1)\left(\frac{m_1}{l_1}\right) + \tau_{zy}\left(\frac{n_1}{l_1}\right) = 0$$

$$\tau_{xz} + \tau_{yz}\left(\frac{m_1}{l_1}\right) + (\sigma_z - \sigma_1)\left(\frac{n_1}{l_1}\right) = 0$$

Разделив четвертое уравнение на l_1^2, будем иметь:

$$1 + \frac{m_1}{l_1}^{2} + \frac{n_1}{l_1}^{2} = \frac{1}{l_1^2}$$

$$l_1 = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{l_1}^{2} + \frac{n_1}{l_1}^{2}}$$

Отношение $(\frac{m_1}{l_1})$ и $(\frac{n_1}{l_1})$ определяется из двух уравнений показанной выше системы трех уравнений. Определив l_1, легко находятся остальные:

$$m_1 = l_1(\frac{m_1}{l_1}), \quad n_1 = l_1(\frac{n_1}{l_1})$$

Проверку правильности определения направляющих косинусов выполняют по четвертому уравнению:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

Для определения направляющих косинусов вектора второго главного напряжения σ_2 - l_2, m_2 и n_2 — в приведенную выше систему подставляют значение σ_2:

$$(\sigma_x - \sigma_2)\, l_2 + \tau_{yx} m_2 + \tau_{zx}\, n_2 = 0$$

$$\tau_{xy}\, l_2 + (\sigma_y - \sigma_2)\, m_2 + \tau_{zy}\, n_2 = 0$$

$$\tau_{xz}\, l_2 + \tau_{yz} m_2 + (\sigma_z - \sigma_2)\, n_2 = 0$$

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$

Выполнив указанные выше действия, находят l_2, m_2 и n_2.

Для определения направляющих косинусов третьего вектора главного напряжения σ_3 - l_3, m_3 и n_3 в систему уравнений подставляем значения σ_3 . Вначале вычисляем $\frac{m_3}{l_3}$ и $\frac{n_3}{l_3}$, а затем

$$l_3 = \frac{1}{1 + \frac{m_3}{l_3}^{2} + \frac{n_3}{l_3}^{2}}$$

Зная l_3, находим m_3 и n_3.

Для получения направления σ_1 необходимо построить точку M_1 по координатам, пропорциональным косинусам l_1, m_1, n_1. Вектор OM_1 дает направление σ_1. Соответственно, построив точку M_2, получим вектор OM_2 - σ_2 и M_3 дает вектор OM_3 - σ_3 . Например, если

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$, а $l_1 = \frac{1}{3}$ $m_1 = \frac{1}{3}$ $n_1 = \frac{1}{3}$

$l_2 = \frac{1}{6}$ $m_2 = \frac{2}{6}$ $n_2 = \frac{1}{6}$

$l_3 = \frac{1}{2}$ $m_3 = 0$ $n_3 = \frac{1}{2}$

то векторы главных напряжений будут распределены таким образом (рис. 2).

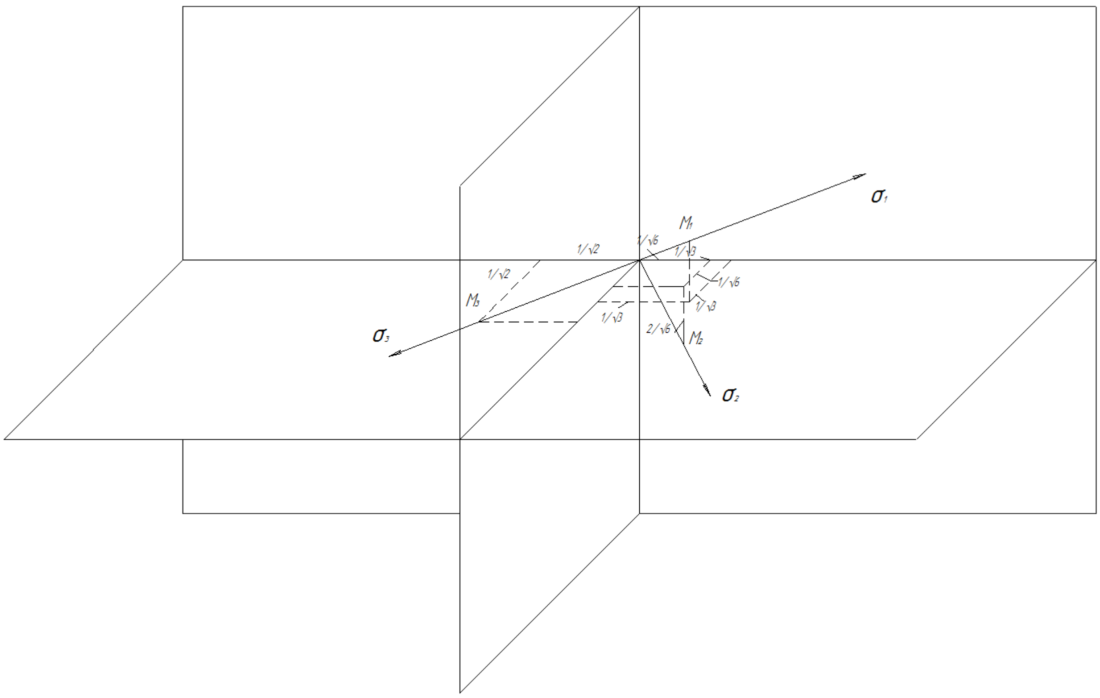


Рис. 2

Круг напряжений и эллипсоид напряжений

В объемной задаче напряжения на площадках, параллельных главным напряжениям, определяются точками трех кругов Мора. Для любых пространственно наклоненных площадок, не параллельных ни одному из главных напряжений, нормальные и касательные напряжения определяются координатами точек области, заштрихованными на круге напряжений (рис. 3).

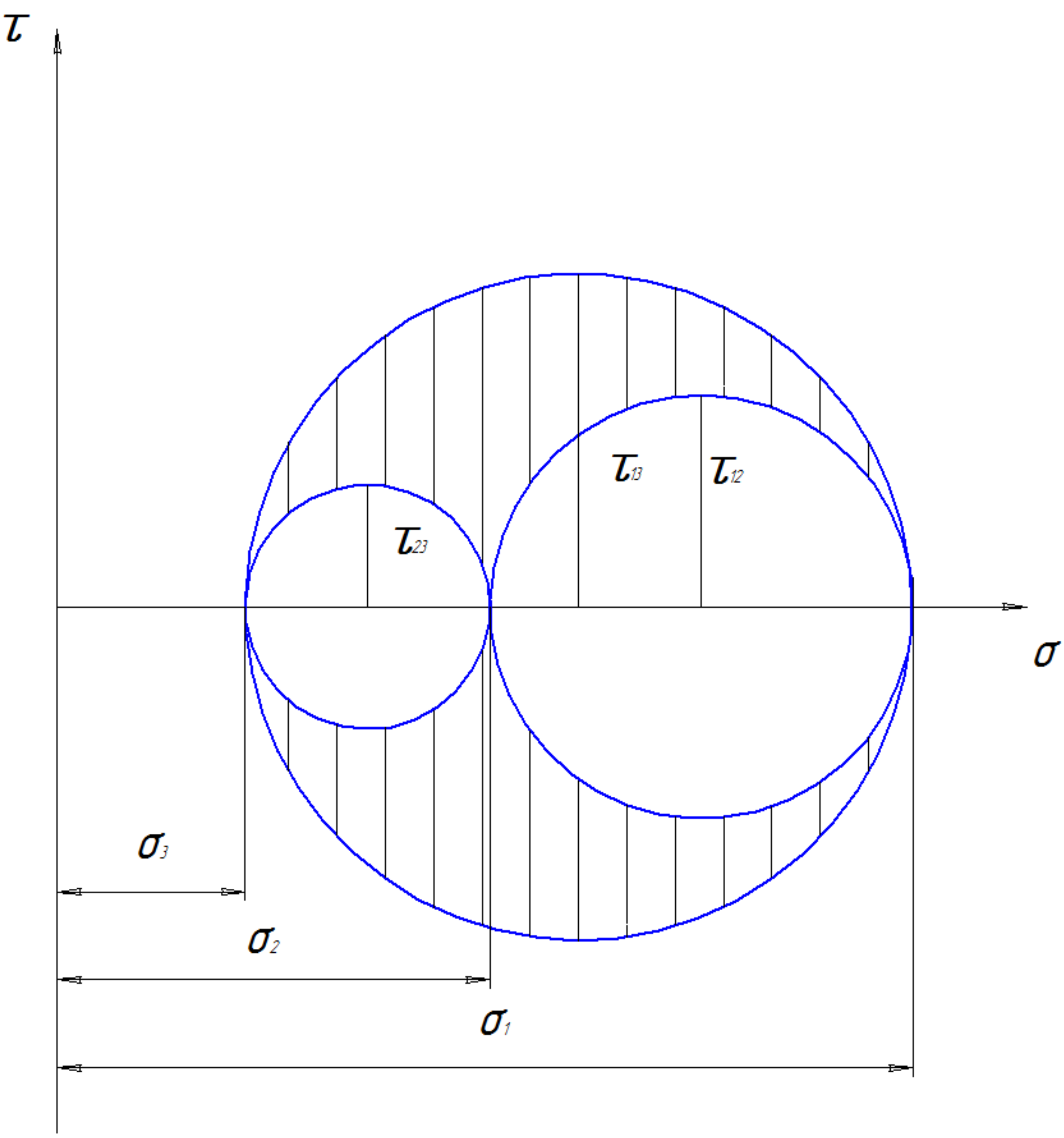


Рис. 3

При изображении объемного напряженного состояния в данной точке твердого тела применяется эллипсоид напряжений.

Уравнение эллипсоида напряжений:

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^3}{\sigma_3^3} = 1$$

Величины полных напряжений на наклонных площадках представляются радиус-векторами, косинусы которых лежат на поверхности эллипсоида.

Полуоси эллипсоида напряжений равны величинам σ_1, σ_2, σ_3 (рис. 4).

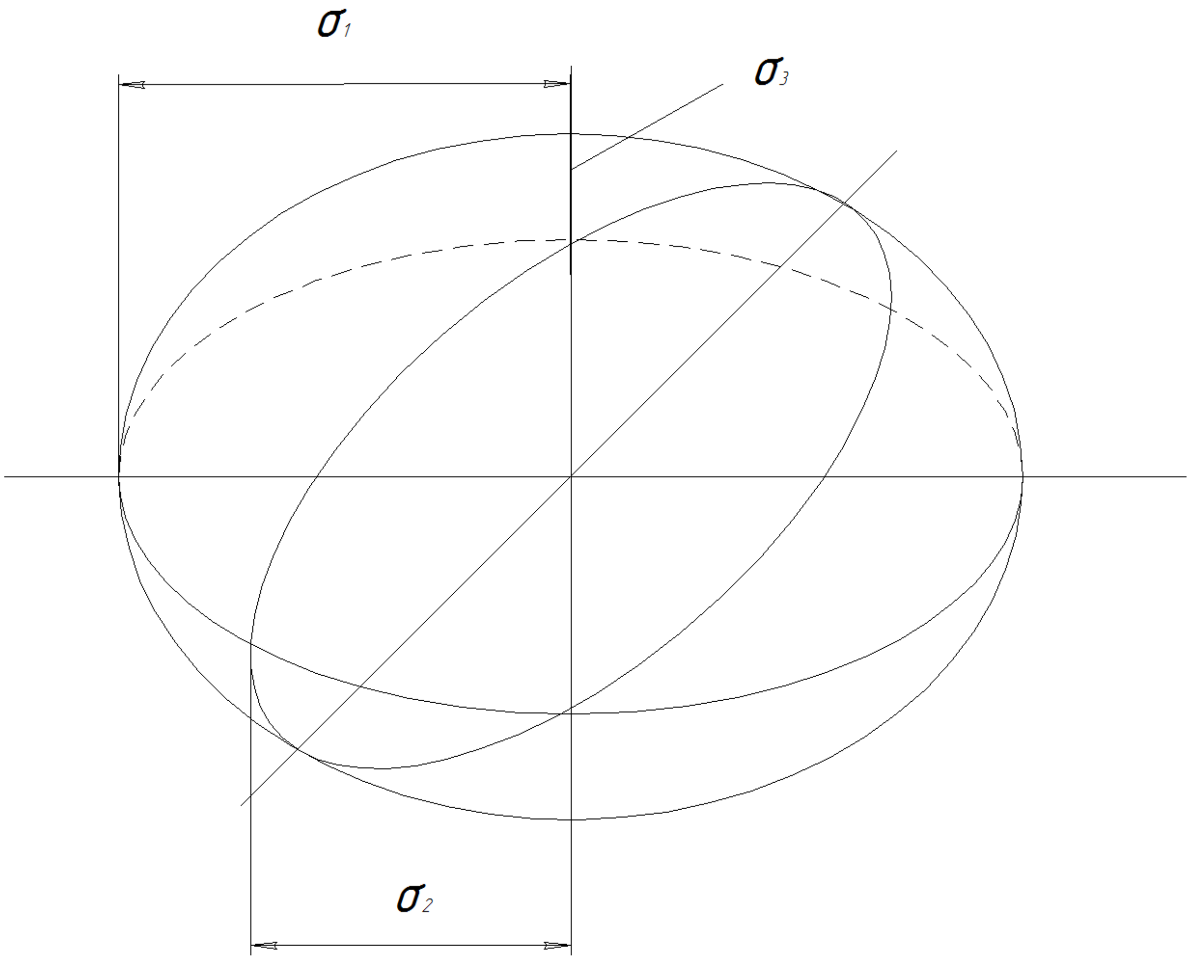


Рис. 4

Эллипсоид напряжений может быть в форме шара ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$); эллипсоида вращения - два главных напряжения равны между собой; и может переходить в плоский эллипс.

Пример. Определить значение главных напряжений и направляющие косинусы векторов главных напряжений. Построить векторы главных напряжений, круговую диаграмму главных напряжений, если тензор напряжений в рассматриваемой точке известен и равен в мегапаскалях (МПа)

$$T_н = \begin{matrix} 50 & 60 & 40 \\ 60 & 100 & -30 \\ 40 & -30 & -100 \end{matrix}$$

Решение

1) $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$

Введем обозначения

$S_1 + \sigma_{ср} = 0$ $\qquad$ $S^3 + pS + q = 0$

$p = I_2 - 3\sigma_{ср}^2$ $\qquad$ $q = -I_3 - 2\sigma_{ср}^3 + I_2\,\sigma_{ср}$

$\cos\varphi = -\frac{q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$

$\sigma_1 = S_1 + \sigma_{ср}$

$\sigma_2 = S_2 + \sigma_{ср}$

$\sigma_3 = S_3 + \sigma_{ср}$

$S_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi^o}{3}$

$S_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\varphi^o}{3} + 240^o)$

$S_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\varphi^o}{3} + 120^o)$

2) Вычисляем $\sigma_{ср}$

$\sigma_{ср} = \frac{50+100-100}{3} = 16{,}7$ (МПа)

<u>$\sigma_{ср} = 16{,}7$ (МПа)</u>

Для вычисления $p = I_2 - 3\sigma_{ср}^2$ находим I_2:

$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$ = 5 000 - 10 000 - 5 000 - 3600 - 900 - 1600 = - 16 100

<u>I_2 = - 16100 (МПа^2)</u>

$p = I_2 - 3\sigma_{ср}^2$ = - 16 100 - 3 x 16,7^2 = 16 936,7

<u>p = 16 936,7 (МПа^2)</u>

Для вычисления q определим I_3:

$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}$ = - 500 000 - 50 x 900 - 100 x 1600 + + 100 x 3600 - 2 x 60 x 30 x 40 = - 500 000 - 45 000 - 160 000 + 360 000 - 144 000 = - 489 000

<u>I_3 = - 489 000 (МПа^3)</u>

$q = -I_3 - 2\sigma_{ср}^3 + I_2\,\sigma_{ср}$ = - 489 000 - 2 x 16,7^3 - 16 100 x 16,7 = 210815,1 (МПа^3)

<u>q = 210815,1 (МПа^3)</u>

$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ = 100 + 50 +100 = 50 (МПа)

<u>I_1 = 50 (МПа)</u>

Вычислим косинус φ

$\cos\varphi = -\frac{q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = -\frac{210815{,}1}{2\sqrt{-\frac{16\,936{,}7^3}{27}}} = -0{,}248$ $\qquad \varphi = 104^o\,20^I$

Находим S_1, S_2, S_3

$S_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi^o}{3} = 2\sqrt{-\frac{16\,936{,}7}{3}}\cos\frac{104^o 20^I}{3}$ = 150,3 x 0,82 = 123,418

$S_1 = 123{,}418$ (МПа)

$S_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\varphi^o}{3} + 240^o) = 150{,}3 \times \cos(35^o + 240^o) = 13{,}1$

$S_2 = 13{,}1$ (МПа)

$S_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\varphi^o}{3} + 120^o)$

$S_3 = 150{,}3 \times \cos(35^o + 120^o) = 136{,}218$

$S_3 = 136{,}218$ (МПа)

Находим $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$

$\sigma_1 = S_1 + \sigma_{ср} = 123{,}418 + 16{,}7 = 140$ $\qquad$ $\sigma_1 = 140$ (МПа)

$\sigma_2 = S_2 + \sigma_{ср} = 13{,}1 + 16{,}7 = 29{,}8$ $\qquad$ $\sigma_2 = 29{,}8$ (МПа)

$\sigma_3 = S_3 + \sigma_{ср} = 136{,}218 + 16{,}7 = -119{,}518$ $\qquad$ $\sigma_3 = -119{,}518$ (МПа)

Проверка:

$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$

$I_2 = 140 \times 29{,}8 - 29{,}8 \times 119{,}518 - 119{,}518 \times 140 = -16122{,}157$ $\qquad$ (0,0014) (МПа^2)

$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

$I_1 = 140 + 29{,}8 - 119{,}518 = 50{,}28$ (МПа)

$I_3 = \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$

$I_3 = -140 \times 29{,}8 \times 119{,}518 = -498629{,}09$ (МПа^3)

Находим касательные напряжения

$\tau_{1-2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{140 - 29{,}8}{2} = 55{,}1$ $\qquad$ $\tau_{1-2} = 55{,}1$ (МПа)

$\tau_{1-3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{140 + 119{,}518}{2} = 129{,}759$ $\qquad$ $\tau_{1-3} = 129{,}759$ (МПа)

$\tau_{2-3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{29{,}8 + 119{,}518}{2} = 74{,}569$ $\qquad$ $\tau_{2-3} = 74{,}569$ (МПа)

Определим октаэдрические напряжения

$p_{y\ окт} = \frac{1}{3}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \frac{1}{3}\sqrt{140^2 + 29.8^2 + 119.518^2} = \frac{186.38}{3} = 107.606$ (МПа)

$\sigma_{окт} = \frac{139{,}818 + 29{,}8 - 119{,}518}{3} = 16{,}679$ (МПа)

$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} =$

$\frac{1}{3}\sqrt{140 - 29{,}8)^2 + (29{,}8 + 119{,}518)^2 + (119{,}518 - 140)^2} = 106{,}304$ (МПа)

Определим значения направляющих косинусов вектора первого главного напряжения σ_1 - l_1, m_1 и n_1

$$(\sigma_x - \sigma_1) + \tau_{yx}\frac{m_1}{l_1} + \tau_{zx}\frac{n_1}{l_1} = 0$$
$$\tau_{xy} + \quad \sigma_y - \sigma_1 \quad \frac{m_1}{l_1} + \quad \tau_{zy}\frac{n_1}{l_1} = 0$$

$$(50 - 140) + 60\frac{m_1}{l_1} + 40\frac{n_1}{l_1} = 0$$
$$60 + \quad 100 - 140 \quad \frac{m_1}{l_1} - 30\frac{n_1}{l_1} = 0$$

$$(-90) + 60\frac{m_1}{l_1} + 40\frac{n_1}{l_1} = 0$$
$$60 - 40\frac{m_1}{l_1} - 30\frac{n_1}{l_1} = 0$$

$$-9 + 6\frac{m_1}{l_1} + 4\frac{n_1}{l_1} = 0 \qquad 3$$
$$6 - 4\frac{m_1}{l_1} - 3\frac{n_1}{l_1} = 0 \qquad 4$$

$$-27 + 18\frac{m_1}{l_1} + 12\frac{n_1}{l_1} = 0$$
$$24 - 16\frac{m_1}{l_1} - 12\frac{n_1}{l_1} = 0 \qquad \Rightarrow \quad -3 + 2\frac{m_1}{l_1} = 0 \qquad \frac{m_1}{l_1} = 1{,}5$$

$$-9 + 6\frac{m_1}{l_1} + 4\frac{n_1}{l_1} = 0 \qquad 4$$
$$6 - 4\frac{m_1}{l_1} - 3\frac{n_1}{l_1} = 0 \qquad 6$$

$$-36 + 24\frac{m_1}{l_1} + 16\frac{n_1}{l_1} = 0$$
$$36 - 24\frac{m_1}{l_1} - 18\frac{n_1}{l_1} = 0 \qquad \Rightarrow \quad -2\frac{n_1}{l_1} = 0 \qquad \frac{n_1}{l_1} = 0$$

$1 + (\frac{m_1}{l_1})^2 + (\frac{n_1}{l_1})^2 = \frac{1}{l_1^2}$

$1 + 1{,}5^2 + 0^2 = \frac{1}{l_1^2}$ $\qquad$ $3{,}25 = \frac{1}{l_1^2}$ $\qquad$ $l_1^2 = \frac{1}{3{,}25}$ $\qquad$ $\underline{l_1 = 0{,}5547}$

$\underline{n_1 = 0}$

$\frac{m_1}{l_1} = 1{,}5$ $\qquad$ $\frac{m_1}{0{,}5547} = 1{,}5$ $\qquad$ $\underline{m_1 = 0{,}832}$

$0{,}832^2 + 0 + 0{,}5547^2 = 0{,}999916 \approx 1{,}0$

Определим значения направляющих косинусов векторов второго главного напряжения σ_2 - l_2, m_2, n_2

$$(\sigma_x - \sigma_2) + \tau_{yx}\frac{m_2}{l_2} + \tau_{zx}\frac{n_2}{l_2} = 0$$
$$\tau_{xy} + \quad \sigma_y \;-\; \sigma_2 \;\; \frac{m_2}{l_2} + \;\; \tau_{zy}\frac{n_2}{l_2} \;=\; 0$$

$$(50 - 29{,}8) + 60\frac{m_2}{l_2} + 40\frac{n_2}{l_2} = 0$$
$$60 + \;\; 100 - 29{,}8 \;\; \frac{m_2}{l_2} - 30\frac{n_2}{l_2} \;=\; 0$$

$$20{,}2 + 60\frac{m_2}{l_2} + 40\frac{n_2}{l_2} = 0$$
$$60 + 70{,}2\frac{m_2}{l_2} - 30\frac{n_2}{l_2} \;=\; 0$$

$$10{,}1 + 30\frac{m_2}{l_2} + 20\frac{n_2}{l_2} = 0 \qquad 3$$
$$30 + 35{,}1\frac{m_2}{l_2} - 15\frac{n_2}{l_2} \;=\; 0 \qquad 4$$

$$30{,}3 + 90\frac{m_2}{l_2} + 60\frac{n_2}{l_2} = 0$$
$$120 + 140{,}4\frac{m_2}{l_2} - 60\frac{n_2}{l_2} \;=\; 0 \qquad => \quad 150{,}3 + 130{,}4\frac{m_2}{l_2} = 0 \qquad \frac{m_2}{l_2} = 1{,}153$$

$$10{,}1 + 30\frac{m_2}{l_2} + 20\frac{n_2}{l_2} = 0 \qquad 1{,}17$$
$$30 + 35{,}1\frac{m_2}{l_2} - 15\frac{n_2}{l_2} \;=\; 0$$

$$11{,}817 + 35{,}1\frac{m_2}{l_2} + 23{,}4\frac{n_2}{l_2} = 0$$
$$30 + 35{,}1\frac{m_2}{l_2} - 15\frac{n_2}{l_2} \;=\; 0 \qquad => \qquad 41{,}817 + 8{,}4\frac{n_2}{l_2} = 0 \qquad \frac{n_2}{l_2} = -\,4{,}978$$

$$1 + \left(\frac{m_2}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{l_2}\right)^2 = \frac{1}{l_2^2}$$

$$1 + 1{,}153^2 + 4{,}978^2 = \frac{1}{l_2^2} \qquad 27{,}11 = \frac{1}{l_2^2} \qquad \underline{l_2 = 0{,}192}$$

$$\frac{m_2}{l_2} = 1{,}153 \qquad \frac{m_2}{0{,}192} = 1{,}153 \qquad \underline{m_2 = 0{,}2213}$$

$$\frac{n_2}{l_2} = -\,4{,}978 \qquad \frac{n_2}{0{,}192} = -\,4{,}978 \qquad \underline{n_2 = -\,0{,}9558}$$

$$0{,}9558^2 + 0{,}192^2 + 0{,}221^2 = 0{,}99939 \approx 1{,}0$$

Определим значения направляющих косинусов вектора третьего главного напряжения σ_3 - l_3, m_3, n_3

$$(\sigma_x - \sigma_3) + \tau_{yx}\frac{m_3}{l_3} + \tau_{zx}\frac{n_3}{l_3} = 0$$
$$\tau_{xy} + \quad \sigma_y \;-\; \sigma_3 \;\; \frac{m_1}{l_1} + \;\; \tau_{zy}\frac{n_3}{l_3} \;=\; 0$$

$$(50 + 119{,}518) + 60\frac{m_3}{l_3} + 40\frac{n_3}{l_3} = 0$$
$$60 + 100 + 119{,}518 \frac{m_3}{l_3} - 30\frac{n_3}{l_3} = 0$$

$$169{,}518 + 60\frac{m_3}{l_3} + 40\frac{n_3}{l_3} = 0$$
$$60 + 219{,}518\frac{m_3}{l_3} - 30\frac{n_3}{l_3} = 0$$

$$84{,}753 + 30\frac{m_3}{l_3} + 20\frac{n_3}{l_3} = 0 \qquad 3$$
$$30 + 109{,}759\frac{m_3}{l_3} - 15\frac{n_3}{l_3} = 0 \qquad 4$$

$$-254{,}277 + 90\frac{m_3}{l_3} + 60\frac{n_3}{l_3} = 0$$
$$120 + 439{,}036\frac{m_3}{l_3} - 60\frac{n_3}{l_3} = 0$$

=> $374{,}277 + 529{,}036\frac{m_3}{l_3} = 0$ $\quad \frac{m_3}{l_3} = -0{,}7075$

$$310{,}102 + 109{,}759\frac{m_3}{l_3} + 73{,}172\frac{n_3}{l_3} = 0$$
$$30 + 109{,}759\frac{m_3}{l_3} - 15\frac{n_3}{l_3} = 0$$

=> $280{,}102 + 88{,}172\frac{n_3}{l_3} = 0$ $\quad \frac{n_3}{l_3} = -3{,}177$

$1 + (\frac{m_3}{l_3})^2 + (\frac{n_3}{l_3})^2 = \frac{1}{l_3^2}$

$1 + 0{,}7075^2 + 3{,}177^2 = \frac{1}{l_3^2}$ $\qquad$ $\underline{l_3 = 0{,}294}$

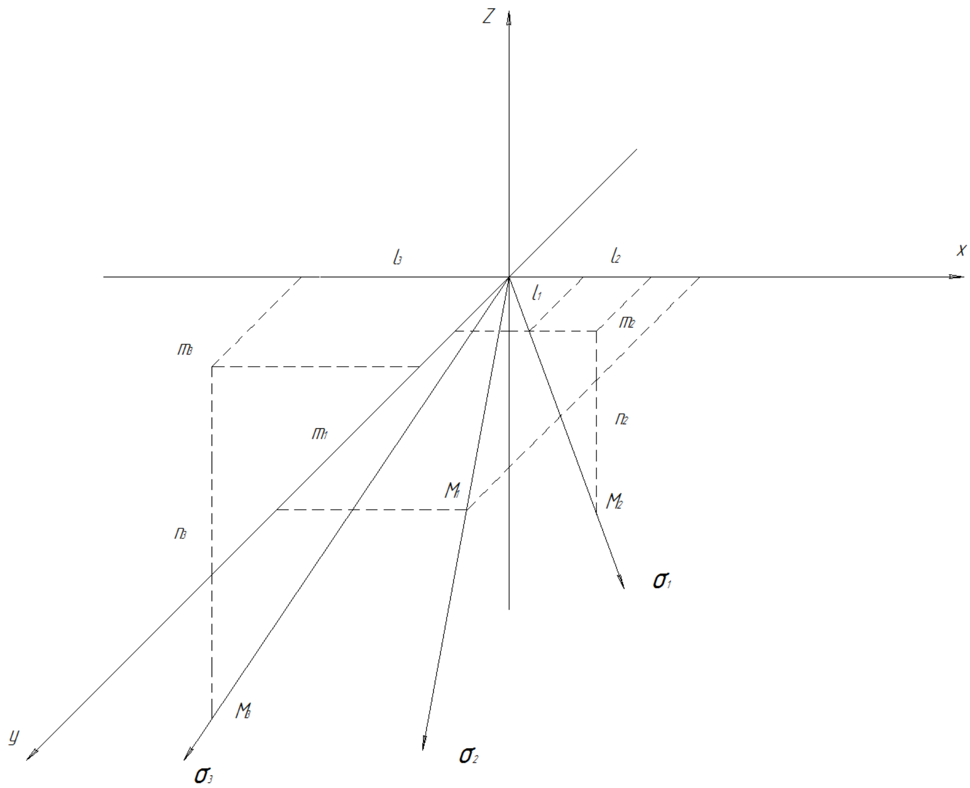
$\frac{m_3}{l_3} = -0{,}7075$ $\qquad$ $\frac{m_3}{0{,}294} = -0{,}7075$ $\qquad$ $\underline{m_3 = -0{,}2078}$

$\frac{n_3}{l_3} = -3{,}177$ $\qquad$ $\frac{n_3}{0{,}294} = -3{,}177$ $\qquad$ $\underline{n_3 = -0{,}934}$

$0{,}294^2 + 0{,}2078^2 + 0{,}934^2 = 1{,}001 \approx 1{,}0$

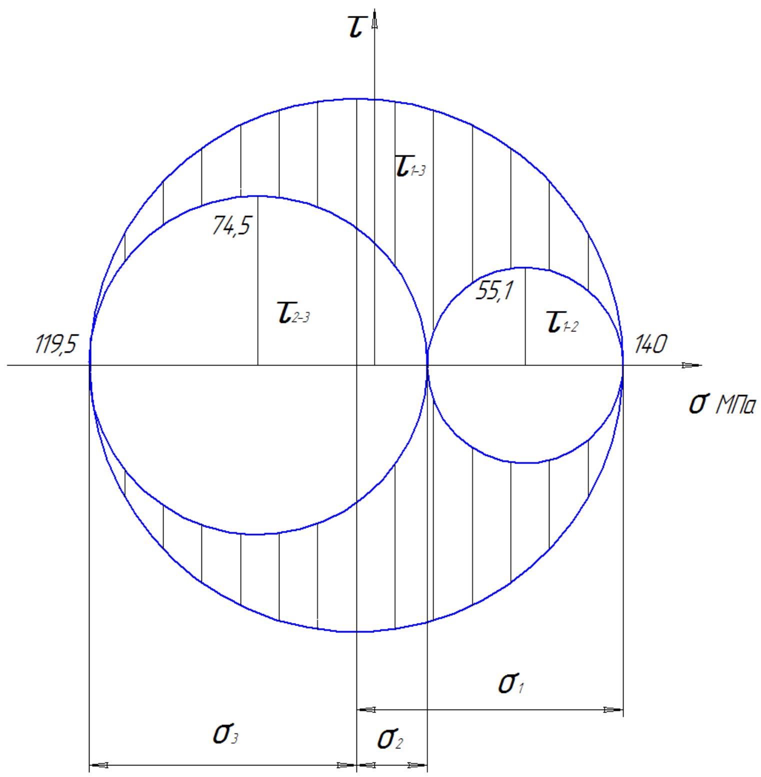
Строим векторы главных напряжений

$l_1 = 0{,}5547$	$l_2 = 0{,}192$	$l_3 = 0{,}294$
$m_1 = 0{,}832$	$m_2 = 0{,}2213$	$m_3 = -0{,}2078$
$n_1 = 0$	$n_2 = -0{,}9558$	$n_3 = -0{,}934$



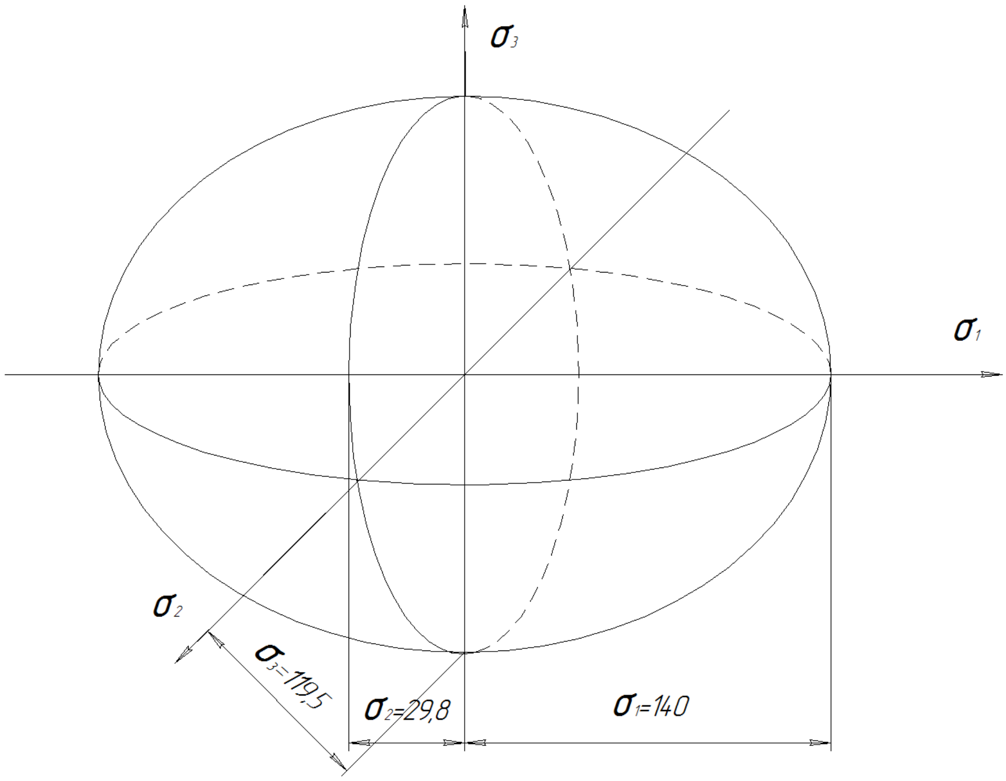
Строим круг главных напряжений

σ_1 = 140   МПа
σ_2 = 29,8 МПа
σ_3 = - 119,5 МПа
μ_σ = 40 МПа



Строим эллипсоид напряжений

σ_1 = 140 МПа
σ_2 = 29,8 МПа
σ_3 = - 119,5 МПа



Пример решения задачи
на объемное деформированное состояние

Определить относительные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, используя обобщенный закон Гука. Вычислить значения главных относительных деформаций по главным напряжениям и по тензору деформаций, сопоставив полученные значения.

Определить удельную потенциальную энергию изменения объема, удельную потенциальную энергию изменения формы и удельную полную потенциальную энергию, если дано :

σ_x = 500 кг/см^2 ; σ_y = 1000 кг/см^2 ; σ_z = 1000 кг/см^2 ; τ_{xy} = 600 кг/см^2 ; τ_{yz} = -300 кг/см^2 ; τ_{zx} = 400 кг/см^2 ; μ = 0,3 ; E = 2 x 10^6 кг/см^2 ; G = 8 x 10^5 кг/см^2 .

Решение

1. Находим значения относительных линейных и угловых деформаций

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{1}{2 \text{ x } 10^6}\left[500 - 0{,}3 \text{ x } 0\right] = 250 \text{ x } 10^{-6} = 2{,}5 \text{ x } 10^{-4} \textit{ о. е.}$$

$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_t)\right] = \frac{1}{2 \text{ x } 10^6}\left[1000 - 0{,}3\ (-500)\right] = 5{,}75 \text{ x } 10^{-4} \textit{ о. е.}$$

$\varepsilon_z = \frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{E}\,[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{2 \text{ x } 10^6}$ [- 1000 - 0,3 x 1500] = - 7,25 x 10^{-4} *о. е.*

$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{600}{8 \text{ x } 10^5}$ = 7,5 x 10^{-4} *о. е.*

$\gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{d\omega}{dy} = \frac{\tau_{yz}}{G} = -\,\frac{300}{8 \text{ x } 10^5}$ = - 3,75 x 10^{-4} *о. е.*

$\gamma_{zx} = \frac{d\omega}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{400}{8 \text{ x } 10^5}$ = 5 x 10^{-4} *о. е.*

2. Определяем главные деформации по главным напряжениям, найденным в первой задаче

σ_1 = 1400 кг/см^2 σ_2 = 298 кг/см^2 σ_3 = - 1195 кг/см^2

$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\,[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \text{ x } 10^6}$ [1400 - 0,3 (298-1195)] = 8,34 x 10^{-4} *о. е.*

$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\,[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \text{ x } 10^6}$ [298 - 0,3 (1400-1195)] = 1,18 x 10^{-4} *о. е.*

$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\,[\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \text{ x } 10^6}$ [-1195 - 0,3 (1400 + 298)] = - 8,52 x 10^{-4} *о. е.*

3. Вычисляем деформации по данным тензора деформаций

$\varepsilon^3 - I_1^8\,\varepsilon^2 + I_2^8\,\varepsilon_3 - I_3^8 = 0$

Находим первый инвариант тензора деформаций

$I_1^8 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_y$ - 2,5 x 10^{-4} + 5,75 x 10^{-4} - 7,25 x 10^{-4} = 1 x 10^{-4} *о. е.*

Определяем значение второго инварианта тензора деформаций

$I_2^8 = \varepsilon_x\,\varepsilon_y + \varepsilon_y\,\varepsilon_z + \varepsilon_z\,\varepsilon_x - \frac{1}{4}\,(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) =$
= 2,5 x 5,75 x 10^{-8} - 5,75 x 7,25 x 10^{-8} - 7,25 x 2,5 x 10^{-8} - $\frac{1}{4}$ (7,5^2 +3,75^2 + 5^2) =
= - 65,5 x 10^{-8} *о. е.*

Вычисляем значение третьего инварианта тензора деформаций

$I_3^8 = \varepsilon_x\,\varepsilon_y\,\varepsilon_y + \frac{1}{4}\,(\gamma_{xy}\,\gamma_{yz}\,\gamma_{zx} - \varepsilon_x\,\gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y\,\gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z\,\gamma_{xy}^2) =$
= - 2,5 x 5,75 x 7,25 x 10^{-4} + $\frac{1}{4}$ x 10^{-12} (-7,5 x 3,75 x 5 - 2,5 x 3,75^2 - 5,75 x 5^2 + 7,25 x 7,5^2) =
= (- 104 + 22) x 10^{-12} = - 82 x 10^{-12} (*о. е.*)^3

Приводим полное кубическое уравнение к неполному

$S_k^3 + p\,S_k + q = 0$

Находим значение коэффициента *p*

$p = I_2^8$ - 3 $\varepsilon_{\text{ср}}^2$ = - 65,5 x 10^{-8} -3 x $0{,}33^2$ x 10^{-8} = - 65,95 x 10^{-8} $(о.\ е.)^2$

$\varepsilon_{ср} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$ = 0,33 x 10^{-4}

Определяем коэффициент q

q = - I_3^8 - 2 $\varepsilon_{\text{ср}}^3$ + I_2^8 $\varepsilon_{ср}$ = 82 x 10^{-12} - 2 x $0{,}33^3$ x 10^{-12} - 65,5 x 0,33 x 10^{-12}

q = 60,4 x 10^{-12} $(о.\ е.)^3$

Находим косинус φ

$$\cos\varphi = \frac{-q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = \frac{-60{,}4 \text{ x } 10^{-12} \text{ x } 3}{2 \text{ x } 65{,}85 \text{ x } 10^{-12}\sqrt{\frac{65{,}85}{3}}} = -0{,}292$$

$\cos\varphi$ = - 0,292 $\varphi = 107^o$

Вычисляем коэффициенты S_1, S_2, S_3

$S_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi^o}{3}$ = 2 x 4,68 x 10^{-4} x cos $(\frac{107}{3})^o$ = 2 x 4,68 x 10^{-4} x 0,815 = 7,6 x 10^{-4} (*о. е.*)

$S_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\varphi^o}{3} + 240^o)$ = 2 x 4,68 x 10^{-4} x cos 275,6° = 0,91 x 10^{-4} *о. е.*

- 0,918

$S_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\varphi^o}{3} + 120^o)$ = 2 x 4,68 x 10^{-4} x cos 156,6° = - 8,58 x 10^{-4} *о. е.*

Находим главные деформации

$\varepsilon_1 = S_1 + \varepsilon_{cp}$ = 7,6 x 10^{-4} + 0,33 x 10^{-4} = 7,93 x 10^{-4} *о. е.*

$\varepsilon_2 = S_2 + \varepsilon_{cp}$ = 0,91 x 10^{-4} + 0,33 x 10^{-4} = 1,24 x 10^{-4} *о. е.*

$\varepsilon_3 = S_3 + \varepsilon_{cp}$ = - 8,58 x 10^{-4} + 0,33 x 10^{-4} = - 8,25 x 10^{-4} *о. е.*

Составление и проверка полученных результатов

ε_1^I = 8,34 x 10^{-4} ε_1^{II} = 7,93 x 10^{-4} *о. е.*

ε_2^I = 1,18 x 10^{-4} ε_2^{II} = 1,24 x 10^{-4} *о. е.*

ε_3^I = - 8,52 x 10^{-4} ε_3^{II} = - 8,25 x 10^{-4} *о. е.*

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = const$

$\varepsilon_1^I + \varepsilon_2^I + \varepsilon_3^I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_y$, 1 x 10^{-4} = 1 x 10^{-4}

$\varepsilon_1^{II} + \varepsilon_2^{II} + \varepsilon_3^{II} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_y$, 0,92 x 10^{-4} ≈ 1 x 10^{-4}

Полученные результаты довольно близко совпадают друг с другом

4. Определение потенциальной энергии

$u = u_V + u_ф$

Определяем потенциальную энергию изменения объема

$u_V = \frac{1}{2}\,\theta\varepsilon_{ср} = \ \frac{1}{2}$

$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_y\ = 2{,}5 \text{ x } 10^{-4} + 5{,}75 \text{ x } 10^{-4} - 7{,}25 \text{ x } 10^{-4} = 1 \text{ x } 10^{-4}$

$u_V = \frac{1}{2} \text{ x } 10^{-4} \text{ x } 1{,}67 = 0{,}00835$ кг · см/ см^3

Определяем потенциальную энергию изменения формы

$u_ф = \frac{1+\mu}{3E}\,(\,\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{G}\,(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) =$

$= \frac{1+0{,}3}{3 \text{ x } 2 \text{ x } 10^6}\,(500^2 + 1000^2 + 1000^2 - 5 \text{ x } 10^5 + 10^6 + 5 \text{ x } 10^5) + \frac{1}{8 \text{ x } 10^5}\,(36 \text{ x } 10^4 + 9 \text{ x } 10^4 +$

$+ 16 \text{ x } 10^4\,) = \frac{1{,}6}{6 \text{ x } 10^2} \text{ x } 325 + \frac{61}{80} = 0{,}867 + 0{,}7625 = 1{,}6295$ кг · см/ см^3

Находим полную удельную потенциальную энергию

$u\ = u_V + u_ф = 0{,}00835 + 1{,}695 = 1{,}703$ кг · см/ см^3

$u = 1{,}703$ кг · см/ см^3