Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный аграрный университет»
Кафедра «Тракторы, автомобили и техническая механика»

И. И. Артемов, В. Н. Плешаков, А. А. Елисеева

Применение уравнений Лагранжа второго рода для решения задач динамики (методические указания)

Краснодар, 2013

УДК 531.314.2 (076)

Артемов И. И.
Применение уравнений Лагранжа второго рода для решения задач динамики: метод. указания / И. И. Артемов, В. Н. Плешаков, А. А. Елисеева. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – 30 с.

Методические указания предназначены для изучения метода составления уравнений Лагранжа второго рода и получения необходимых навыков применения их к решению задач динамики.

Методические указания предназначены для студентов следующих специальностей:110800.62 «Технические системы в агробизнесе» (квалификация (степень) «бакалавр»), 190601.65 «Автомобили и автомобильное хозяйство» (квалификация «специалист»), 230501.65 «Наземные транспортные средства» (квалификация « специалист»).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одной из трудностей решения задач динамики материальных систем с одной степенью свободы является выбор соответствующей общей теоремы динамики. В случаях систем с несколькими степенями свободы решение задач значительно усложняется, так как при этом требуется совместное применение некоторых общих теорем и уравнений динамики.

В подобных случаях наиболее удобно использование уравнений Лагранжа второго рода, являющихся универсальным методом составления дифференциальных уравнений движения материальных систем. Благодаря своей общности уравнения Лагранжа широко применяются для решения самых разнообразных задач техники.

Методические указания предназначены для самостоятельной и индивидуальной подготовки к практическим занятиям студентов факультета механизации и могут быть использованы для самостоятельной работы студентами других инженерных специальностей очных и заочного факультетов.

Изучение методических указаний предусматривает предварительное ознакомление студентов с выводом уравнений Лагранжа второго рода, однако следует отметить, что для понимания сущности и особенностей метода Лагранжа недостаточно изучение одной теории. Необходимо рассматривать много примеров и задач, т.е. изучение уравнений Лагранжа должно быть предметными.

Целью методических указаний является изучение метода составления уравнений Лагранжа второго рода и получение необходимых навыков применения их к решению задач динамики.

1 УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

(Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах)

Обобщенными координатами механической системы называют независимые между собой параметры $q_1, q_2, \ldots, q_k$, при помощи которых можно определить в каждый данный момент положение этой системы и через которые, следовательно, можно выразить декартовы координаты всех ее точек.

Число k независимых обобщенных координат равно числу степеней свободы данной системы.

В соответствии с числом независимых обобщенных координат данной механической системы имеем для нее k уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j; \qquad (j=1,2,..k), \tag{1}$$

где: T – кинетическая энергия системы;

Q_j – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j;

$\dot{q}_j$ – обобщенная скорость.

Для того, чтобы составить уравнение (1), необходимо выразить кинетическую энергию системы через обобщенные координаты и обобщенные скорости.

Уравнения Лагранжа второго рода представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_k$, описывающих движение механической системы, подчиненной идеальным связям. Уравнениями (1) Лагранжа можно пользоваться при изучении движения любой механической системы с геометрическими связями независимо от того, сколько точек или тел входят в систему, как движутся эти тела и какое движение (абсолютное или относительное) рассматривается.

При идеальных связях в правые части уравнений (1) входят обобщенные активные силы, и, следовательно, эти уравнения позволяют заранее исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей.

Обобщенные силы можно вычислять одним из следующих способов:

а) сообщить данной механической системе такое возможное перемещение, при котором изменяется только одна координата q_j, а все остальные обобщенные координаты остаются неизменными; затем составить сумму элементарных работ $\sum_{i=1}^{n} \delta A_{ji}$ всех заданных сил на этом перемещении и разделить эту сумму на вариацию δq_j, т.е.

$$Q_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta A_{ji}}{\delta q_j}, \quad (j=1,2\ldots,k) \qquad (2)$$

б) если механическая система находится под действием сил, имеющих потенциал, то обобщенные силы определяются по формуле

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \qquad (3)$$

где: П – потенциальная энергия системы.

Из формулы (2) получается размерность обобщенной силы $[Q] = \frac{[A]}{[q]}$.

Так, если размерность обобщенной координаты имеет размерность длины, то обобщенная сила имеет размерность силы (Н), если же обобщенной координатой является угол φ, то обобщенная сила имеет размерность момента (Н$\cdot$м).

При вычислении обобщенной силы по формуле (3) необходимо предварительно потенциальную энергию системы выразить через обобщенные координаты этой системы.

Интегрируя систему уравнений (1) Лагранжа, находят обобщенные координаты как функции времени t и определяют постоянные интегрирования из начальных условий задачи.

2 МЕТОДИКА И ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

Преимуществом применения уравнений Лагранжа второго рода к решению задач динамики перед другими способами является единообразие приемов, которые при этом нужно выполнять. Рекомендуемая последовательность составления уравнений Лагранжа такова:

1) определить число степеней свободы материальной системы;

2) выбрать систему координат и ввести независимые обобщенные координаты в числе, равном числу степеней свободы системы;

3) вычислить обобщенные силы Q_1, Q_2, … Q_k, последовательно задавая элементарные положительные приращения $(\delta q_k > 0)$ только соответствующей обобщенной координате;

4) вычислить кинетическую энергию T системы как функцию обобщенных координат и обобщенных скоростей;

5) найти частные производные кинетической энергии системы по обобщенным скоростям, т.е. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}$, … $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$, а затем вычислить их производные по времени

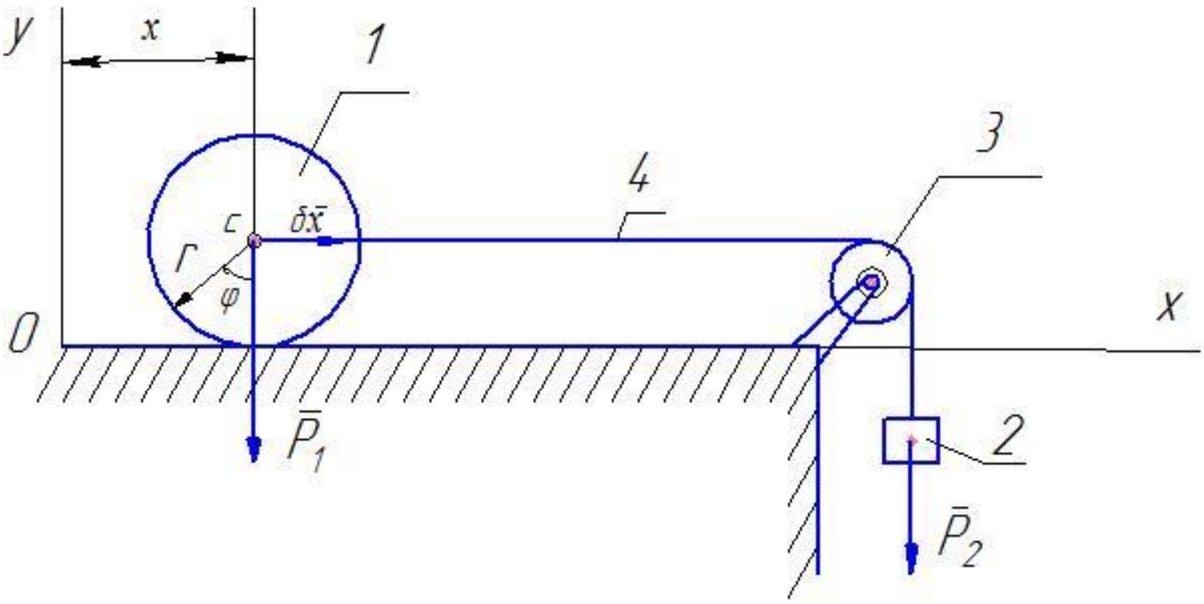
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right), \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right), \dots , \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right);$$

6) определить частные производные кинетической энергии системы по обобщенным координатам, т.е. $\frac{\partial T}{\partial q_1}, \frac{\partial T}{\partial q_2}, \dots , \frac{\partial T}{\partial q_k}$;

7) полученные в пунктах 3), 5), 6) результаты подставить в уравнения Лагранжа второго рода и проинтегрировать их, учитывая начальные условия движения;

8) в соответствии с конкретными условиями задачи провести анализ полученного решения.

ПРИМЕР 1. Найти закон движения системы, состоящей из однородного катка 1 радиуса r и веса P_1, катящегося без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости, и груза 2 веса P_2, подвешенного на нерастяжимой и невесомой нити 4, проходящей через невесомый блок 3 и соединенной с осью С катка 1 (рис.1). В начальный момент цилиндр и груз находились в покое. Сопротивлением качению пренебречь.



1 – каток; 2 – груз; 3 – блок; 4 – нить

Рисунок 1. Механическая система

РЕШЕНИЕ. Система движущихся тел имеет одну степень свободы, так как положение ее определяется одним параметром. Таким параметром может служить или перемещение x центра тяжести С катка от неподвижной оси Оу, или угол φ поворота катка. Примем за обобщенную координату данной системы перемещение x, т.е. положим $q_1 = x$.

Так как рассматриваемая система имеет одну степень свободы, то мы будем иметь для нее одно уравнение Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \qquad (1)$$

Вычислим обобщенную силу Q_x, которая соответствует обобщенной координате $q_1 = x$. Для этого дадим возможное перемещение системе, соответствующее изменению координаты x на весьма малую величину δx. Сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к системе, при этом перемещении будет равна $\delta A = P_2 \cdot \delta x$, так как сила тяжести P_1 на возможном перемещении δx работы не совершает.

Следовательно, обобщенная сила

$$Q_x = P_2 \tag{2}$$

Определяем кинетическую энергию T системы

$$T = T_1 + T_2$$

где: T_1 – кинетическая энергия катка 1;

T_2 – кинетическая энергия груза 2.

Из условия задачи следует, что кинетическая энергия нити и блока D равна нулю.

Каток 1 движется плоскопараллельно, поэтому

$$T_1 = \frac{P_1 \cdot \dot{x}^2}{2g} + \frac{I_c \dot{\varphi}^2}{2},$$

где: $\dot{x}$ – скорость центра тяжести C катка;

$\dot{\varphi}$ – угловая скорость катка;

I_c – момент инерции катка относительно его геометрической оси.

Груз 2 движется поступательно со скоростью $\dot{x}$, следовательно

$$T_2 = \frac{P_2 \cdot \dot{x}^2}{2g}.$$

Так как по условию задачи каток катится без скольжения, то, как известно, $x = r \cdot \varphi$ и тогда $\dot{x} = r \cdot \dot{\varphi}$, откуда $\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{r}$. Момент инерции катка $I_c = \frac{P_1 \cdot r^2}{2g}$. Тогда кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{4g}(3P_1 + 2P_2)\cdot\dot{x}^2 .$$

Находим производные

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2g}(3p_1 + 2p_2)\cdot\dot{x} ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{1}{2g}(3p_1 + 2p_2)\cdot\ddot{x} ; \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Подставим эти выражения, а также значение Q_x из (2) в уравнение (1) Лагранжа

$$\frac{1}{2g}(3P_1 + 2P_2)\cdot\ddot{x} = P_2$$

или

$$\ddot{x} = \frac{2P_2 g}{3P_1 + 2P_2} = const .$$

Интегрируя это уравнение дважды, получим

$$\dot{x} = \frac{2P_2 g}{3P_1 + 2P_2}t + C_1 \quad \text{и} \quad x = \frac{P_2 g}{3P_1 + 2P_2}t^2 + C_1 t + C_2$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из начальных условий: при $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$. Следовательно, $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Тогда закон движения системы

$$x = \frac{P_2 g}{3P_1 + 2P_2}t^2 .$$

ПРИМЕР 2. Для привода двухножевого режущего аппарата применяют два синусных механизма, с помощью которых приводятся в движение два ножа 1 и 2 (рис.2), движущихся в противоположных направлениях. Найти по какому закону должен изменяться момент М, который приводит во вращательное движение кривошип 3, чтобы его угловая скорость ω была постоянной. Известно, что масса каждого из ножей m и длина кривошипа $2a$.

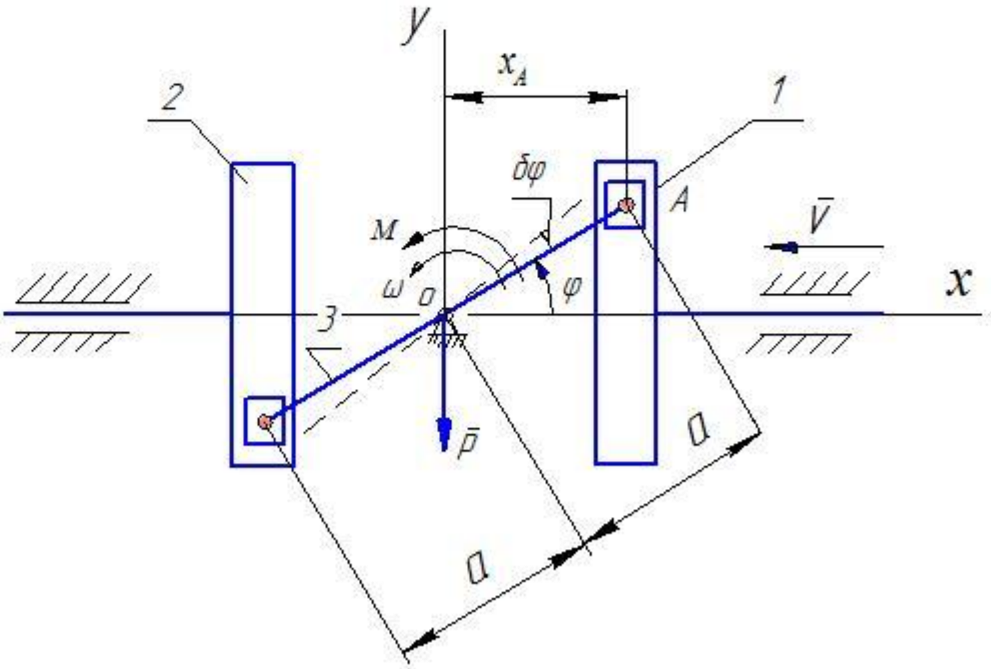


Рисунок 2. Схема двухножевого режущего аппарата

РЕШЕНИЕ. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы.

За обобщенную координату систему примем угол φ поворота кривошипа, отсчитываемый от горизонтали. Тогда движение данной системы описывается одним уравнением Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi} \qquad (1)$$

На механизм действуют задаваемые силы: вес P движущихся ножей, приложенный в центре O масс системы, и вращающийся момент M, приложенный к кривошипу 3.

Чтобы найти обобщенную силу Q_{φ}, соответствующую обобщенной координате φ, сообщим системе возможное перемещение, т.е. дадим углу φ приращение $\delta\varphi$.

Составим сумму элементарных работ задаваемых сил и моментов на этом возможном перемещении. В эту сумму войдет только работа вращающегося момента M

$$\delta A_{\varphi} = M \cdot \delta\varphi \, .$$

Следовательно, обобщенная сила

$$Q_\varphi = M \tag{2}$$

Определим кинетическую энергию системы как функцию обобщенной координаты φ и обобщенной скорости $\dot{\varphi}$, равной угловой скорости ω кривошипа.

Кинетическая энергия системы равна $T = T_1 + T_2$, где T_1 и T_2 – кинетическая энергия ножей 1 и 2 соответственно, совершающих поступательное движение вдоль оси Ox с одинаковой по величине скоростью V.

Так как масса каждого из ножей равна m, то $T_1 = T_2$ и кинетическая энергия системы определяется

$$T = T_1 + T_2 = 2T_1 = mV^2 \tag{3}$$

Скорость V поступательного движения, например, ножа 1, вполне определяется проекцией скорости точки A кривошипа на ось Ox. Абсцисса точки A равна $x_A = a\cos\varphi$. Тогда $V = \dot{x}_A = -a\dot{\varphi}\sin\varphi$ и с учетом (3) кинетическая энергия системы равна

$$T = ma^2(\dot{\varphi})^2\sin^2\varphi.$$

Найдем производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2ma^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi,$$

$$\ldots\ \ldots \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2m\cdot a^2\cdot(\ddot{\varphi}\cdot\sin^2\varphi + \dot{\varphi}^2\cdot\sin 2\varphi), \quad \ldots. \tag{4}$$

$$\ldots. \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = ma^2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi. \qquad \ldots. \tag{5}$$

Учитывая, что $\dot{\varphi} = \omega = const$ (по условию) и, следовательно, $\ddot{\varphi} = 0$, формула (4) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2m \cdot a^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin 2\varphi \qquad (6)$$

Подставим из формулы (5) и (6) , а также значение Q_φ из (2) в уравнение (1) Лагранжа

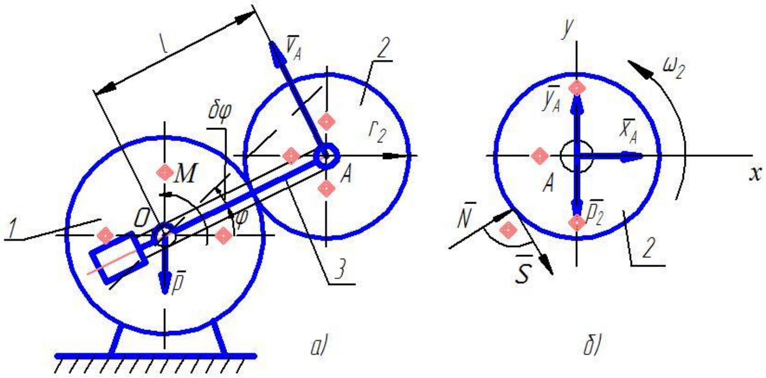
$$2m \cdot a^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin 2\varphi - m \cdot a^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin 2\varphi = M,$$

или

$$M = ma^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi.$$

Таким образом, закон изменения вращающего момента кривошипа (при $\dot{\varphi} = \omega = const$) $\quad M = ma^2 (\dot{\varphi})^2 \sin 2\varphi$

ПРИМЕР 3. В эпициклическом механизме кривошип с противовесом вращается под действием приложенного к нему момента М (рис.3а). Момент инерций кривошипа с противовесом относительно оси его вращения равен I_o. Центр тяжести подвижной шестерни и кривошипа с противовесом находится на оси вращения кривошипа. Расстояние между осями шестерен равно l. Подвижная шестерня имеет радиус r_2, массу m_2 и момент инерции относительно ее оси I_2. Определить, пренебрегая трением, угловое ускорение ε кривошипа и окружное усилие $\bar{S}$ в точке соприкосновения шестерен.



а) 1 - неподвижное (центральное колесо) колесо; 2 – подвижная шестерня; 3 – кривошип ОА с противовесом .

б) подвижная шестерня, освобожденная от связей.

Рисунок 3. Эпициклический механизм

РЕШЕНИЕ. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату системы примем угол поворота φ кривошипа, отсчитываемый от горизонтали. Следовательно, движение рассматриваемой системы описывается одним уравнением Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi} \qquad (1)$$

На механизм действуют задаваемые силы: вес P кривошипа с противовесом, приложенный в точке O, и вращающий момент M , приложенный к кривошипу. Чтобы найти обобщенную силу Q_{φ}, соответствующую обобщенной координате φ, сообщим системе возможное перемещение, сообщив углу φ приращение $d\varphi$.

Составим сумму элементарных работ задаваемых сил на этом возможном перемещении. В эту сумму войдет только работа вращающего момента

$$\delta A_{\varphi} = M \cdot \delta\varphi$$

Согласно правилу определения обобщенных сил

$$Q_{\varphi} = M \qquad (2)$$

Определим кинетическую энергию системы как функцию обобщенной координаты φ и обобщенной скорости $\dot{\varphi}$, равной угловой скорости ω кривошипа.

Кинетическая энергия T системы равна

$$T = T_1 + T_2, \qquad (3)$$

где: T_1 – кинетическая энергия кривошипа с противовесом, вращающегося вокруг неподвижной оси;

T_2 – кинетическая энергия шестерни, совершающей плоское движение.

Тогда

$$T_1 = \frac{I_0 \cdot \omega^2}{2} = \frac{I_0 \cdot \dot{\varphi}^2}{2}$$

$$T_2 = m_2 \cdot \frac{V_A^2}{2} + I_2 \cdot \frac{\omega_2^2}{2}$$

Скорость V_A центра A тяжести шестерни 2 определяется

$$V_A = OA \cdot \omega = l \cdot \dot{\varphi}$$

Угловую скорость ω_1 подвижной шестерни определим с помощью мгновенного центра скоростей, находящегося в точке соприкосновения шестерен

…… $$\omega_2 = \frac{V_A}{r_2} = \frac{l \cdot \dot{\varphi}}{r_2} \qquad (4)$$

С учетом значений V_A и ω_1 кинетическая энергия шестерни 2 будет равна

$$T_2 = \frac{m_2 \cdot l \cdot \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{I_2 \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{2r_2^2}.$$

Подставим в равенство (3) значение T_1 и T_2, находим кинетическую энергию системы

$$T = \frac{1}{2} \cdot (I_0 + m_2 \cdot l^2 + I_1 \cdot \frac{l^2}{r_2^2}) \cdot \dot{\varphi}^2$$

Из этого выражения следует, что кинетическая энергия системы зависит от обобщенной скорости φ' и не зависит от обобщенной координаты φ, т.е. от положения механизма.

Найдем производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I_o + m_2 \cdot l^2 + I_2 \cdot \frac{l^2}{r_2^2} \right) \cdot \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \left(I_o + m_2 \cdot l^2 + I_2 \cdot \frac{l^2}{r_2^2} \right) \cdot \ddot{\varphi}$$

Подставим полученные выражения производных и значение Q_φ из (2) в уравнение (1) Лагранжа, получим

$$\left(I_o + m_2 \cdot l^2 + I_2 \cdot \frac{l^2}{r_2^2} \right) \cdot \ddot{\varphi} = M$$

откуда

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{M}{I_0 + m_2 \cdot l^2 + I_2 \cdot \frac{l^2}{r_2^2}}, \tag{5}$$

где: ε – угловое ускорение кривошипа.

Определяемое окружное усилие $\bar{S}$ является частью полной реакции зубчатой поверхности неподвижной шестерни. Освободим подвижную шестерню от связей (неподвижной шестерни и кривошипа) и заменим их действия составляющими реакций этих связей $\bar{S}$, $\bar{N}$ и $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ (рис.3,б)

Составим дифференциальное уравнение вращения подвижной шестерни в относительном движении вокруг оси, проходящей через точку А, перпендикулярно плоскости движения шестерни

$$I_2 \cdot \varepsilon_2 = M_A^e,$$

или

$$I_2 \cdot \varepsilon_2 = S \cdot r_2$$

где: M_A^e – главный момент внешних сил, действующих на подвижную шестерню относительно оси ее вращения, проходящей через точку A;

ε_2 – угловое ускорение шестерни.

Тогда

$$S = \frac{I_2 \cdot \varepsilon_2}{r_2} \qquad (6)$$

Дифференцируя по времени выражение (4), найдем угловое ускорение ε_1

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{l \cdot \ddot{\varphi}}{r_2}.$$

Подставим значение ε_2 и $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ из выражения (5) в равенство (6), найдем усилие S

$$S = \frac{I_2 \cdot l}{r_2^2} \cdot \ddot{\varphi} = \frac{I_2 \cdot l \cdot M}{I_0 \cdot r_2^2 + m_2 \cdot l^2 \cdot r_2^2 + I_2 \cdot l^2}.$$

Как видим, величина окружного усилия прямо пропорциональна величине вращающегося момента M.

ПРИМЕР 4. Составить дифференциальные уравнения движения эллиптического маятника, состоящего из ползуна A, массы m_1, скользящего без трения по горизонтальной плоскости и шарика B массы m_2, соединенного с ползу-ном стержнем O_1B длиной l (рис.4). Стержень может вращаться вокруг оси O_1, связанной с ползуном и перпендикулярной к плоскости чертежа. Массой стержня пренебречь.

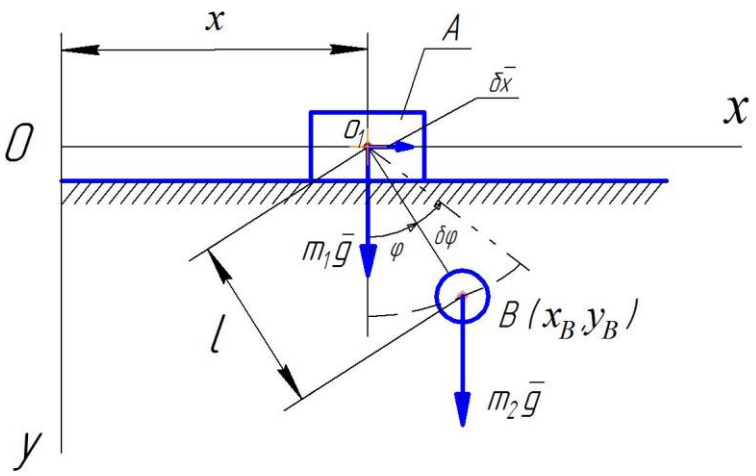


Рисунок 4. Схема эпициклического маятника

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим систему, состоящую из ползуна А и шарика В. Активными силами, действующими на систему, являются вес ползуна и вес шарика (рис.4). Данная система имеет две степени свободы, так как для определения положения всех ее точек достаточно задать два независимых параметра: координату x, определяющую положение ползуна на плоскости и угол φ, фиксирующий положение маятника по отношению к ползуну. Выберем x и φ в качестве обобщенных координат, т.е. $q_1 = x,\quad q_2 = \varphi$. Соответствующие уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \tag{1}$$

Для вычисления обобщенных сил зафиксируем одну координату, сообщив второй координате некоторое приращение. Пусть вначале $\varphi = const,$ а координата x получает приращение δx. Направление активных сил(реакции на схеме не показаны, так как на систему наложены идеальные связи) перпендикулярно возможному перемещению системы, соответствующему приращению δx, поэтому элементарная работа $\delta A_x = 0$, обобщенная сила Q_x, соответствующая обобщенной координате x, равна нулю, т.е.

$$Q_x = 0 \qquad (2)$$

Для определения обобщенной силы Q_φ дадим системе возможное перемещение $d\varphi$, а $x = const$, т.е. δx=0. Вычислим элементарную работу активных сил на этом перемещении

$$\delta A_\varphi = M \cdot \delta\varphi = -m_2 \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi \cdot \delta\varphi,$$

где: $M = -m_2 \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi$ - момент относительно оси O_1 подвеса маятника от силы тяжести $m_2 \cdot g$.

Тогда

$$Q_\varphi = -m_2 \cdot l \cdot g \cdot \sin\varphi \qquad (3)$$

Кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий двух тел – ползуна и шарика

$$T = T_1 + T_2,$$

где: T_1 – кинетическая энергия ползуна;
T_2 – кинетическая энергия шарика.

Ползун движется поступательно, поэтому

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot V_{0_1}{}^2}{2} = \frac{m_1 \cdot \dot{x}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия шарика, движущегося в вертикальной плоскости

$$\ldots. \qquad T_2 = \frac{m_2 \cdot V_B^2}{2} = \frac{m_2 \cdot (\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2)}{2} \qquad (4)$$

где: x_B и y_B – координаты точки B. Из рис.4 $x_B = x + l \cdot \sin\varphi$, $y_B = l \cdot \cos\varphi$.

Дифференцируя по времени, получим $\dot{x}_B = \dot{x} + l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi$, $\dot{y}_B = -l \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin\varphi$.

Подставляя полученные выражения в (4), получим

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \cdot (\dot{x}^2 + 2 \cdot \dot{x} \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi + l^2 \cdot \dot{\varphi}^2)\,.$$

Тогда кинетическая энергия системы будет равна

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + 2 \cdot \dot{x} \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi + l^2 \cdot \dot{\varphi}^2)\,,$$

или

$$T = (m_1 + m_2) \cdot \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2}{2} \cdot (l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + 2\dot{x} \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi) \tag{5}$$

Вычислим производные от кинетической энергии по обобщенным координатам $x,\ \varphi$ и обобщенным скоростям $\dot{x},\ \dot{\varphi}$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{x} \cdot \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \cdot \dot{x} + m_2 \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi\,, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 \cdot l^2 \cdot \varphi + m_2 \cdot \dot{x} \cdot l \cdot \cos\varphi\,.$$

Подставим эти выражения, а также значения обобщенных сил Q_x и Q_φ из (2) и (3) в уравнения (1) Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2) \cdot \dot{x} + m_2 \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi\right] = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left[(l \cdot \dot{\varphi} + \dot{x} \cdot \cos\varphi) + \dot{x} \cdot \dot{\varphi} \sin\varphi\right] = -g \sin\varphi \end{cases} \tag{6}$$

Система уравнений (6) представляет собой дифференциальные уравнения движения эллиптического маятника.

Анализируя первое уравнение системы (6), видим, что при интегрировании его выражение в квадратных скобках есть величина постоянная, т.е.

$$\ldots\ldots \qquad (m_1 + m_2) \cdot \dot{x} + m_2 \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi = C_1 \tag{7}$$

Интегрируя (7), получим:

$$\ldots \qquad (m_1+m_2)\cdot x+m_2\cdot l\cdot \sin\varphi=C_1\cdot t+C_2 \qquad (8)$$

где: C_1 и C_2 –постоянные интегрирования.

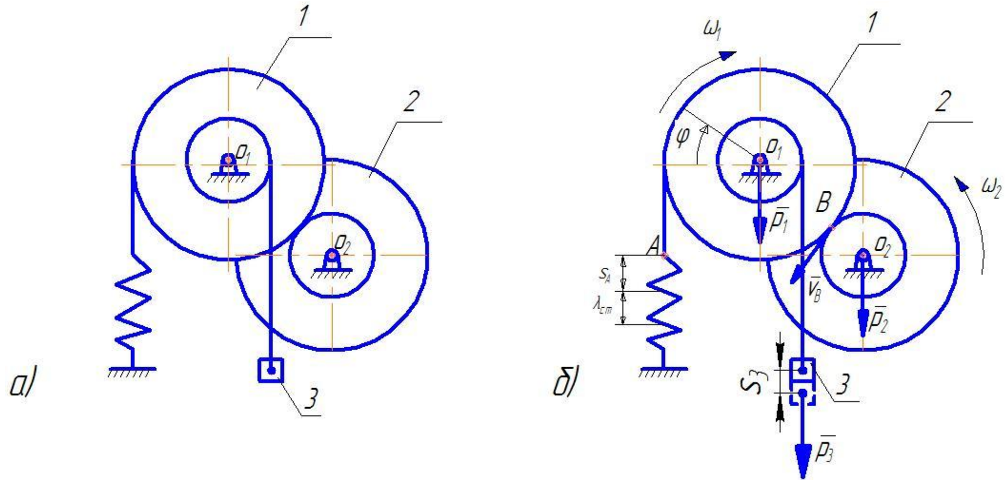
С помощью непосредственных вычислений можно убедиться в том, что левая часть интеграла (8) представляет числитель того выражения, которое определяет координату x_c - центра инерции данной системы. Действительно:

$$x_c=\frac{\sum m_i\cdot x_i}{\sum m_i}=\frac{(m_1+m_2)x+m_2\cdot l\cdot \sin\varphi}{m_1+m_2}$$

Выражение (8) показывает, что при заданной системе сил центр инерции системы перемещается вдоль оси абсцисс равномерно, но характер этого движения зависит от начальных условий, так как ими определяются значения постоянных C_1 и C_2. В частности, возможен случай, когда $x_c = 0$, т.е. центр инерции системы движется по вертикали.

ПРИМЕР 5. Механизм, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из ступенчатых колес 1 и 2 (рис.5,а), имеющих неподвижные оси вращения, с радиусами $r_1=0{,}5R_1$, $r_2=0{,}5R_2$ и массами $m_1 = 16$ кг, $m_2 = 12$ кг; груза 3 массой $m_3 = 4$ кг, подвешенного к нити, намотанной на колесо 1. Колеса находятся в зацеплении и к колесу 1 прикреплена пружина жесткостью С = 1200 н/м.

В положении, изображенном на рис.5, а, механизм находится в равновесии. Определить частоту k и период τ малых колебаний системы около положения равновесия. Найти также статическое удлинение $\lambda_{ст}$ (сжатие) пружины в положении равновесия. Колеса 1 и 2 считать сплошными однородными цилиндрами радиусов R_1 и R_2 соответственно.



а) механизм находится в равновесии; б) механизм выведен из состояния равновесия (совершает малые колебания)

Рисунок 5. Схема зацепления ступенчатых колес

РЕШЕНИЕ. Данная система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ поворота колеса 1 от равновесного положения (при равновесии $\varphi = 0$, $S_A = 0$ и $S_3 = 0$). При движении системы рассмотрим малые колебания, считая угол φ малым (рис.5 б).

Так как все действующие на систему активные силы потенциальны (сила тяжести и сила упругости), выразим обобщенную силу Q_φ через потенциальную энергию П системы. Движение данной механической системы запишется одним уравнением Лагранжа второго рода.

$$\ldots\ldots \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \qquad (1)$$

Потенциальную энергию системы определим как сумму потенциальной энергии $П_1$, соответствующей силам упругости, и потенциальной энергии $П_2$, соответствующей силам тяжести.

За нулевое положение примем положение покоя системы. Потенциальную энергию системы найдем как работу, совершаемую силой упругости F пружины и силами тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ при переходе системы из рассматриваемого положения (рис.5,б) в нулевое (рис.5а). Для силы упругости $П_1 = 0,5 \cdot c \cdot \lambda^2$, где λ - удлинение (сжатие) пружины, а для сил тяжести $П_2 = -P_3 \cdot S_3 = -m_3 \cdot g \cdot S_3$, где S_3 - смещение груза 3.

Тогда для всей системы

$$П = П_1 + П_2 = 0,5 \cdot c \cdot \lambda^2 - m_3 \cdot g \cdot S_3 \qquad (2)$$

где величины λ и S_3 должны быть выражены через φ.

Определяя λ, учтем, что в положении статического равновесия пружина может иметь некоторое статическое (начальное) удлинение или сжатие $\lambda_{ст}$, необходимое для сохранения равновесия (в нашем случае для уравновешивания силы тяжести $\vec{P}_3$, действующей на груз 3). При повороте колеса 1 на угол φ пружина получит дополнительное к $\lambda_{ст}$ удлинение $S_A = R_1 \cdot \varphi$. Следовательно, $\lambda = \lambda_{ст} + S_A = \lambda_{ст} + R_1 \cdot \varphi$. Выразим S_3 через φ, $S_3 = r_1 \cdot \varphi = 0,5R_1 \cdot \varphi$.

Подставляя все найденные величины в равенство (2), получим

$$П = 0,5c(\lambda_{ст} + R_1 \cdot \varphi)^2 - 0,5 \cdot m_3 \cdot g \cdot R_1 \cdot \varphi \qquad (3)$$

Определим обобщенную силу Q_φ

$$Q_\varphi = -\frac{\partial П}{\partial \varphi} = -cR_1(\lambda_{ст} + R_1 \cdot \varphi) + 0,5m_3 \cdot g \cdot R_1 \qquad (4)$$

Величину $\lambda_{ст}$ найдем из условия, что при равновесии, т.е. когда φ = 0, должно быть и Q_φ = 0. Полагая в (4) φ = 0 и Q_φ = 0, получим $cR_1\lambda_{ст} = 0,5m_3 \cdot g \cdot R_1$, откуда

$$\lambda_{ст} = \frac{0,5m_3 \cdot g}{c}. \qquad (5)$$

Подставляя в (4) значение $\lambda_{ст}$, получим

$$Q_\varphi = -c \cdot R_1^2 \cdot \varphi \qquad (6)$$

Кинетическая энергия T системы определится как сумма кинетических энергий T_1 колеса 1 и T_2 колеса 2, а также кинетической энергии T_3 груза 3, т.е.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \tag{7}$$

Так как колеса 1 и 2 вращаются вокруг неподвижных осей O_1 и O_2, а груз 3 движется поступательно, то

$$T_1 = \frac{I_{0_1} \cdot \omega_1^2}{2}, \qquad T_2 = \frac{I_{0_2} \cdot \omega_2^2}{2}, \qquad T_3 = \frac{m_3 \cdot V_3^2}{2}, \tag{8}$$

где моменты инерции I_{0_1} и I_{0_2} колес определяются

$$I_{0_1} = \frac{m_1 \cdot R_1^2}{2}, \qquad I_{0_2} = \frac{m_2 \cdot R_2^2}{2}.$$

Все скорости, входящие в равенства (8) выразим через обобщенную скорость $\dot{\varphi}$. Тогда $\omega_1 = \dot{\varphi}$ и $V_3 = \omega_1 \cdot r_1 = 0{,}5 \cdot \dot{\varphi} \cdot R_1$. Скорость $V_в$ точки B контакта колес $V_B = \omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot r_2$, откуда $\omega_2 = \dfrac{\dot{\varphi} \cdot R_1}{r_2}$.

Подставим значения I_{0_1}, I_{o_2}, ω_1, ω_2, V_3 в равенства (8), и затем из (7), учитывая, что $r_2 = 0{,}5R_2$, получим

$$T = \frac{m_1 \cdot R_1^{\,2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2 \cdot R_2^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2 \cdot R_1^2}{r_2^2} + \frac{m_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot R_1^2}{2 \cdot 4} = 0{,}5 a_0 \cdot \dot{\varphi}^2,$$

где $$a_0 = (0{,}5 \cdot m_1 + 2m_2 + 0{,}25 m_3) \cdot R_1^2 \tag{9}$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a_0 \cdot \dot{\varphi}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = a_0 \cdot \ddot{\varphi}, \qquad \frac{dT}{d\varphi} = 0 \tag{10}$$

Подставим полученные выражения производных из равенства (10) и значение Q_φ из (6) в уравнение (1) Лагранжа:

$$\ddot{\varphi} \cdot a_0 = -c \cdot R_1^2 \cdot \varphi ,$$

или

$$\ldots \qquad \ddot{\varphi} + k^2 \cdot \varphi = 0 \qquad \ldots\ldots.. \quad (11)$$

где с учетом обозначения (9)

$$k^2 = \frac{c \cdot R_1^2}{a_0} = \frac{2c}{m_1 + 4m_2 + 0{,}5m_3} .$$

Из теории колебаний известно, что когда уравнение приведено к виду (11), то в нем k является искомой круговой частотой колебания, а период колебаний $\tau = \frac{2\pi}{k}$. При заданных числовых значений m_1, m_2, m_3 и c, произведя соответствующие подсчеты, получим из (11) и (5) результаты

$$k = 6{,}03 c^{-1} \quad , \ \tau = 1{,}04 c , \ \lambda_{cm} = 1{,}63 cм .$$

ПРИМЕР 6. Составить дифференциальное уравнение плоского движения маятника массы m на невесомой пружине жесткостью C, длина которой в ненагруженном состоянии l (рис.6).

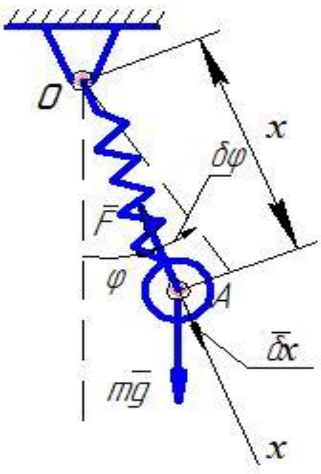


Рисунок 6. Схема маятника, подвешенного на пружине.

РЕШЕНИЕ. Движение маятника происходит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира О. Масса m как точка А, движущаяся в плоскости, обладает двумя степенями свободы. За независимые параметры точки А примем координату x, определяющую положение ее на оси Ox маятника, проведенной из шарнира О вдоль пружины, и угол поворота φ, фиксирующий поворот этой оси вокруг шарнира О. Выберем x и φ в качестве обобщенных координат, т.е. $q_1 = x,\ q_2 = \varphi$.

Запишем соответствующие уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \tag{1}$$

Для вычисления обобщенной силы Q_x зафиксируем вначале координату φ, т.е. φ = const, а координате x дадим приращение δx. Активными силами, действующими на точку А являются сила тяжести mg маятника и восстанавливаюшая сила пружины F = c (x-l), направленная вдоль оси пружины. Поэтому элементарная работа этих сил на возможном перемещении δx определяется

$$\delta A_x = -c(x-l)\delta x + mg\cos\varphi \cdot \delta x.$$

Отсюда найдем

$$\dots \qquad Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = -c(x-l) + mg\cos\varphi. \qquad (2)$$

Для определения обобщенной силы Q_φ сообщим маятнику возможное перемещение $\delta\varphi$, полагая при этом x = const, т.е. δx = 0. Вычислим элементарную работу активных сил на этом перемещении

$$\delta A_\varphi = -m \cdot g \cdot x \cdot \sin\varphi \cdot \delta\varphi\ ,$$

откуда

$$\dots\dots \qquad Q_\varphi = -m \cdot g \cdot x \cdot \sin\varphi\ . \qquad (3)$$

Кинетическая энергия маятника равна $T = \frac{m \cdot V_A^2}{2}$, где V_A абсолютная скорость точки А маятника.

Точка А участвует в сложном движении, состоящем из относительного-поступательного вдоль оси Ox пружины с относительной скоростью $V_r = \dot{x}$ и переносного-вращательного со скоростью $V_e = x \cdot \dot{\varphi}$. Тогда учитывая, что $\vec{V}_r \perp \vec{V}_e$, абсолютная скорость V_A точки А будет равна ${V_A}^2 = V_r^2 + V_e^2 = \dot{x}^2 + x^2 \cdot \dot{\varphi}^2$, и кинетическая энергия Т маятника определяется

$$\dots.. \qquad T = \frac{mV_A^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{x}^2 + x^2 \cdot \dot{\varphi}^2) \qquad (4)$$

Вычислим производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \cdot \dot{x}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m \cdot x^2 \cdot \dot{\varphi}\ ,$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m \cdot \ddot{x}, \qquad \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m(2 \cdot x \cdot \dot{x} \cdot \dot{\varphi} + x^2 \cdot \ddot{\varphi})\ ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m \cdot x \cdot \dot{\varphi}^2, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0\ .$$

Подставим полученные выражения в уравнение (1) Лагранжа, заменив обобщенные силы Q_x и Q_φ их значениями из (2) и (3)

$$\ddot{x} - x \cdot \dot{\varphi}^2 = -\frac{c}{m}(x-l) + g \cdot \cos\varphi; \qquad x \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{x} \cdot \dot{\varphi} = -g \cdot \sin\varphi \tag{5}$$

Получили систему двух нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Общее решение системы уравнений (5) не может быть выражено через элементарные функции и квадратуры от них. Однако система допускает частное решение- вертикальные колебания точки А массы m на пружине при $\varphi = 0$.

Заметим, что если пружину заменить абсолютным невесомым стержнем $(x = l = const)$, то получим математический маятник с одной степенью свободы. Для математического маятника остается одно последнее уравнение системы (5)

$$l \cdot \ddot{\varphi} = -g \cdot \sin\varphi,$$

которое при малых колебаниях (полагая $\sin\varphi \approx \varphi$) принимает вид дифференциального уравнения гармонического колебательного движения:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \cdot \varphi = 0,$$

где $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ - частота колебаний маятника.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лачуга Ю.Ф., Ксендзоров В.А. Теоретическая механика. М.: КолосС, 2010.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 2006.

3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. М., «Интеграл-Пресс», 2007, 536-551с.

Учебное издание

Артемов Игорь Иванович,
Плешаков Вадим Николаевич,
Елисеева Анна Андреевна

Применение уравнений Лагранжа второго рода для решения задач динамики (методические указания)

Кубанский государственный аграрный университет.
350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13