

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ**  
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет  
имени И. Т. Трубилина»

Пасниченко П.Г., Долобешкин Е.В.

**«Расчет стержня на продольно-поперечный изгиб»**

**Методические указания**

Краснодар 2018

**УДК 631.6**  
**ББК 40.6**  
**Г 94**

Рецензент  
доктор технических наук, профессор Кузнецов Е.В.

Пасниченко П.Г., Долобешкин Е.В.

Предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению  
«Строительство»

Публикуется в соответствии с решением методической  
комиссии архитектурно-строительного факультета. Протокол №5  
от 21.12.2017г.

© Пасниченко П.Г., Долобешкин Е.В. 2018г.  
© ФГБОУ ВПО КубГАУ 2018г.

Стойка испытывает продольно-поперечный изгиб. Максимальные напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M_0}{W_x} + \frac{N y_0}{W_x \left(1 - \frac{N}{N_{\text{Э}}}\right)} \leq R_m$$

$R$  - расчетное сопротивление;

$N$  - расчетная осевая нагрузка;

$F$  - площадь поперечного сечения стойки;

$M_0$  - изгибающий момент от поперечной нагрузки в опасном сечении;

$y_0$  - прогиб стойки в опасном сечении действия поперечных сил;

$W_x$  - осевой момента сопротивления сечения стойки относительно главной центральной от сечения перпендикулярной плоскости действия поперечных сил.

$N_{\text{Э}}$  - Эйлера критическая сила, определяемая независимо от гибкости стойки по формуле:

$$N_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{(\mu \cdot l)^2}$$

$E$  - модуль продольной упругости стойки;

$I_x$  - момент инерции сечения стойки относительно главной центральной оси сечения, перпендикулярной плоскости действия поперечных сил.

$\mu$  - коэффициент, учитывающий способ закрепления концов стойки;

$l$  - длина стойки.

Кроме расчета на прочность следует провести проверку устойчивости стойки в двух направлениях: в плоскости чертежа (плоскость действия поперечных сил – направления оси "y") и из плоскости чертежа (направление оси "x"), т.к. гибкость в этих направлениях у стойки различная. Проверка устойчивости производится по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq Y | R |$$

$\gamma$  - коэффициент снижения расчетного сопротивления (коэффициент продольного изгиба), зависит от гибкости стойки и материала.

### Порядок расчета

Расчета ведем по принципу независимости действия сил методом последовательного приближения.

Подбираем сечение стойки без учета нормальной силы, только по изгибающему моменту от поперечной нагрузки (расчетной), предварительно занижая расчетное сопротивление  $R$  на 40-50 %. Выбранное сечение проверяем на прочность и устойчивость с учетом всех факторов. В случае отклонения максимального напряжения от расчетного сопротивления более, чем на 5%, повторяем расчет, приняв другое сечение. Расчет повторяем до тех пор, пока отклонение максимального напряжения от расчетного сопротивления будет не превышать  $\pm 5\%$ .

### Пример.

Данные для расчета:

$$N = 30 \text{ т}$$

$$g = 0.4 \frac{\text{т}}{\text{м}}$$

$$l = 6 \text{ м}$$

$$l_1 = \frac{l}{3} = 2 \text{ м}$$

$$n_1 = 1.1$$

$$n_2 = 1.4$$

$$m = 1$$

$$R = 2100 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

*Коэффициент учитывающий способ  
закрепления*

$$\mu_y = 0.7$$

$$\mu_{\text{хоз}} = 1.$$

Расчет

## 1) Определение расчетных усилий (осевого и поперечного)

$$N_p = \frac{N}{3} \cdot n_1 + \frac{2}{3} \cdot N \cdot n_2 = \frac{30}{3} \cdot 1.1 + \frac{2}{3} \cdot 30 \cdot 1.4 = 39m$$

$$g_p = g \cdot n_2 = 0.4 \cdot 1.4 = 0.56 m/M.$$

2) Построение эпюры  $M$  и выявление опасных сечений от действия поперечной нагрузки. Стойка представляет собой статически неопределенную систему с одной линией связи. За основную систему принимаем стержень заземленный нижним концом. Отброшенную связь (верхняя шарнирная опора) заменяет неизвестной реакцией  $X$ .

Записываем каноническое уравнение:

$$X \cdot \delta_{II} + \Delta_I g = 0$$

$\delta_{II}$  - перемещение свободного конца стойки (B) под действием единичной силы.

$\Delta_I g$  - перемещение свободного конца стойки (B) под действием расчетной нагрузки ( $g$ ).

Определяем  $\delta_{II}$ , перемножая эп.  $M$  на саму себя:

$$\delta_{II} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \omega_1 \cdot h_1,$$

$\omega_1$  - площадь эпюры изгибающих моментов от единичных сил

$$M, \omega_1 = \frac{l^2}{2};$$

$\eta$  - ордината в эпюре единичных сил под центром тяжести ее  $\eta = \frac{2}{3} \cdot l$ .

$$\delta_{II} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \frac{2 \cdot l^3}{3 \cdot 2} = \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I_x}.$$

Определяем  $\Delta_I g$ , перемножая эпюру  $M_g$  на эпюру  $M_I$ :

$$\omega_g - \text{площадь эпюры } M_g, \Delta_I g = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \omega_g \cdot n_1 \cdot g,$$

$$\omega_g = -\frac{1}{3} \cdot \frac{g \cdot l^2}{2} \cdot l = -\frac{g \cdot l^3}{6},$$

$\eta_1 \cdot g$  - ордината, взятая в эпюре  $M_1$ , под центром тяжести эпюры  $M_g$ .

$$\eta_1 \cdot g = \frac{3}{4} \cdot l$$

$$\Delta_1 g = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \frac{g \cdot l^3}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot l = -\frac{g \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x}$$

Подставляем вычисленные значения  $\delta_{11}$ ;  $\Delta_1 g$  в коническое уравнение и определяем реакцию опоры  $X$ . Все величины определяем в общем виде:

$$X \cdot \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I_x} - \frac{g \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x} = 0; \quad X = \frac{3}{8} \cdot g \cdot l.$$

Определяем реакцию в защепленном конце, составляя уравнение статики:

$$\sum X = X + X_A - g \cdot l = 0$$

$$\sum Z = 0$$

$$\sum m_A = -\frac{g \cdot l^2}{2} + \frac{3}{8} \cdot g \cdot l^2 + M_A = 0$$

$$X_A = \frac{5}{8} \cdot g \cdot l^2; \quad R_A = 0; \quad M_A = \frac{g \cdot l^2}{8}.$$

Определяем положение сечения, где  $Q = 0$ .

$$Q_x = X - g_p \cdot Z = 0$$

$$Z = \frac{X}{g_p} = \frac{\frac{3}{8} \cdot g_p \cdot l}{g_p} = \frac{3}{8} \cdot l.$$

Изгибающий момент в этом сечении

$$M_0 = X \cdot \frac{3}{8} \cdot l - \frac{g_p \left( \frac{3}{8} \cdot l \right)^2}{2}.$$

$$M_0 = \frac{9}{128} \cdot g_p \cdot l^2.$$

Находим численное значение изгибающих моментов в опасном сечении  $M_A$  и  $M_0$ :

$$M_A = \frac{g_p \cdot l^2}{8} = \frac{0.56 \cdot 6^2}{8} = 2.54 \text{ м} \cdot \text{м}$$

$$M_0 = \frac{9}{128} \cdot g_p \cdot l^2 = \frac{9}{128} \cdot 0.56 \cdot 6^2 = 1.42 \text{ м} \cdot \text{м}.$$

3) Подбор сечения.

В первом приближении подбор сечения производим по заниженному расчетному сопротивлению  $R$  без учета сжимающей силы по максимальному изгибающему моменту:

$$M_A = 2.54 \text{ м} \cdot \text{м}.$$

Заниженное расчетное сопротивление принимаем  $R' = 1200 \text{ кгс/см}^2$ .

$$W_x = \frac{M_A}{R'} = \frac{2.54 \cdot 10^5}{1200} = 212 \text{ см}^3.$$

Сечение стойки состоит из двух швеллеров. На один швеллер приходится:

$$W_x' = \frac{212}{2} = 106 \text{ см}^3.$$

По таблицам сортамента принимаем швеллер №18:

$$F = 20.7 \text{ см}^2$$

$$I_x' = 1090 \text{ см}^4$$

$$W_x' = 121 \text{ см}^3$$

$$i_x = 7.24 \text{ см}$$

$$Z_0 = 1.94 \text{ см}$$

$$I_y' = 86 \text{ см}^4$$

$$i_y = 2.04 \text{ см}$$

Определяем  $\sigma_{\max}^0$  с учетом нормальной силы.

$$\sigma_{\max}^0 = \frac{N_p}{F} + \frac{M_A}{W_x} = \frac{39000}{2 \cdot 20.7} + \frac{2.54 \cdot 10^5}{2 \cdot 121}$$

$$\sigma_{\max}^0 = 1920 \text{ кг/см}^2$$

Отклонение от расчетного сопротивления  $R$

$$\frac{2100 - 1920}{2100} \cdot 100\% = 8.5\%$$

Превышает 5%.

Проверяем прочность ближайшего меньшего швеллера №16а

$$F = 19.5 \text{ см}^2; \quad W_x = 103 \text{ см}^3$$

$$\sigma_{\max}^0 = \frac{39000}{2 \cdot 19.5} + \frac{2.54 \cdot 10^5}{2 \cdot 103} = 1000 + 1230 = 2230 \text{ кг/см}^2,$$

что превышает расчетное сопротивление  $R$  на  $\frac{2230 - 2100}{2100} \cdot 100\% = 6\%$ ,

что недопустимо.

Таким образом дальнейшие расчеты ведем для стойки из двух швеллеров №18.

4) Проверяем прочность стойки с учетом продольного поперечного изгиба.

Рассматриваем второе опасное сечение, где изгибающий момент  $M_0 = 1.42 \text{ т} \cdot \text{м}$ . Максимальное напряжение определяется по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_p}{F} + \frac{M_0}{W_x} + \frac{N_1 \cdot y_0}{W_x \left(1 - \frac{N_p}{N_{\text{Э}}}\right)}$$

Определяем необходимое для расчета величины  $M_0 = 1.42 \text{ т} \cdot \text{м}$ .

Прогиб стойки  $y_0$  в сечении на расстоянии  $Z = \frac{3}{8} \cdot l$  от верхнего конца определяем по методу начальных параметров.

$$E \cdot I_y = E \cdot I_{y0} + E \cdot I \cdot \theta \cdot X + \sum M \cdot \frac{(x - a_m)^2}{2} + \sum P \cdot \frac{(x - a_p)^3}{6} + \sum \frac{g \cdot (x - a_g)^4}{24}$$



Начало координат располагаем в нижнем, защемленном конце стойки. Тогда  $y_0 = 0$ ;  $\theta = 0$ .

И уравнение изогнутой оси примет вид:

$$E \cdot I_x \cdot y = -\frac{M_A \cdot z^2}{2} + R_A \cdot \frac{z^3}{6} - g_p \cdot \frac{z^4}{24},$$

при  $z = \frac{5}{8} \cdot l$  ( $\frac{3}{8} \cdot l$  от верхнего конца).

$$E \cdot I_x \cdot y_0 = -\frac{M_A \left(\frac{5}{8} \cdot l\right)^2}{2} + R_A \cdot \frac{\left(\frac{5}{8} \cdot l\right)^3}{6} - g_p \cdot \frac{\left(\frac{5}{8} \cdot l\right)^4}{24}$$

Подставляем значение

$M_A = 2.54 \text{ т} \cdot \text{м}$ ;  $R_A = \frac{5}{8} \cdot g_p \cdot l$ ;  $g_p = 0.54 \text{ м/м}$ ;  $l = 6 \text{ м}$  и определяем прогиб  $y_0$ .

$$y_0 = 0.88 \text{ см}.$$

Определяем Эйлерову силу  $P_9$  по формуле:

$$P_9 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 1090}{(0.7 \cdot 600)^2} = 25000 \text{ кГ}.$$

Подставляем все полученные выражения в расчетную формулу и определяем максимальное напряжение в сечении "O".

$$\sigma_{\max}^0 = \frac{N_p}{F} + \frac{M_0}{W_x} + \frac{N_p \cdot y_0}{W_x \cdot \left(1 - \frac{N^0}{N^9}\right)} = \frac{39000}{2 \cdot 20.7} + \frac{1.42 \cdot 10^5}{2 \cdot 121} + \frac{39000 \cdot 0.88}{2 \cdot 121 \cdot \left(1 - \frac{39000}{250000}\right)} = 1692 \text{ кГ/см}^2$$

$$\zeta_{\max}^0 = 1692 \text{ кГ/см}^2 \cdot \pi R$$

Прочность стойки обеспечена.

5) Проверка устойчивости стойки.

а) Определяем устойчивость стойки в плоскости  $Y0Z$  (плоскость чертежа). Определяем гибкость стойки в направлении оси  $Y$ .

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_x}; \quad \mu = 0.7; \quad l = 6 \text{ м}; \quad i_x = 7.24 \text{ см} \quad (\text{из таблицы сортамента}).$$

$$\lambda_x = \frac{0.7 \cdot 600}{7.24} = 58.$$

Коэффициент снижения расчетного сопротивления (из таблицы)

$$Y_{58} = 0.866.$$

Проверяем устойчивость стойки в плоскости  $Y0Z$ .

$$\sigma_p = \frac{N_p}{Y \cdot F} = \frac{39000}{2 \cdot 20.7 \cdot 0.866} = 1080 \text{ кг/см}^2 \text{ п. Р.}$$
$$F = 2 \cdot F_1 = 2 \cdot 20.7 \text{ см}^2.$$

Устойчивость стойки в плоскости  $Y0Z$  обеспечена.

б) Проверяем устойчивость стойки в плоскости  $X0Z$  (из плоскости чертежа).

$$\lambda_y = \frac{\mu_1 \cdot l_1}{i \cdot y}; \quad \mu_1 = 1; \quad l_1 = 2 \text{ м.}$$

$i_y$  - радиус инерции сечения стойки относительно оси "y"

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}.$$

Определяем момент инерции составного сечения относительно оси "y":

$$I_y = (I_{y1} + F_1 \cdot X_c^2) \cdot 2,$$

$I_y$  - главный центральный момент инерции одного швеллера из таблицы

$$I_{y1} = 86 \text{ см}^4,$$

$X_c$  - расстояние от центра тяжести швеллера до главной центральной оси всего сечения.

Швеллеры поставлены рядом и скреплены, следовательно:

$$X_c = 1.94 \text{ см (из таблицы).}$$

$$I_y = 2 \cdot (86 + 20.7 \cdot 1.94^2) = 324 \text{ см}^4$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{324}{2 \cdot 20.7}} = 2.8 \text{ см}$$

$$\lambda_y = \frac{\mu_1 l_1}{i_y} = \frac{1 \cdot 200}{2.8} = 72$$

$$Y_{72} = 0.798$$

Проверяем устойчивость стойки в плоскости  $XOZ$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{Y \cdot F} = \frac{39000}{0.798 \cdot 2 \cdot 20.7} 1200 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \pi R.$$

Устойчивость стойки в плоскости  $XOZ$  обеспечена. Таким образом прочность и устойчивость выбранного сечения из 2-х швеллеров №18 обеспечена.