МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет
имени И. Т. Трубилина»

Пасниченко П.Г., Долобешкин Е.В.

«РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ»

Методические указания

Краснодар 2018

УДК 631.6
ББК 40.6
Г 94

Рецензент
доктор технических наук, профессор Кузнецов Е.В.

Пасниченко П.Г., Долобешкин Е.В.

Предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению «Строительство»

Публикуется в соответствии с решением методической комиссии архитектурно-строительного факультета. Протокол №5 от 21.12.2017г.

Пояснения работы.

1.1 Общее понятия о тонкостенных стержнях.

Тонкостенными стержнями называются стержни, у которых толщина стенок значительно меньше (8-10 раз) размеров поперечного сечения его, а длина значительно больше (тоже в 8-10 раз) размеров сечения.
Если тонкостенный двутавр нагрузить внецентренно приложенной силой Р, то одновременно с растяжением будет происходить кручение его и изгиб. Под действием внутренних силовых факторов происходит разворот сечения – оно поворачивается относительно оси стержня, и сечения плоские до деформации, перестают быть плоскими т.е. происходит депланация сечения.

Депланация возникает также при кручении тонкостенного стержня. Сам профиль сечения не деформируется. Если бы сила Р была приложена в центре изгиба, то поворота сечения не было бы. Прежде чем выполнить расчёт тонкостенного стержня заданного профиля необходимо определить центр тяжести сечения, главные центральные оси и главные моменты.

Эти характеристики определяются по методике второй расчётно –проектировачной работы. Для определения центра изгиба и главного секториального момента инерции сечения необходимо использовать новые геометрические характеристики сечения, свойственные только тонкостенным стержням.

1.2 Секториальная площадь (координата).

Пусть точка А является полюсом, вокруг которого происходит поворот сечения.

M_0 – точка начала отсчёта;

AM_0 – подвижный радиус-вектор.

При вращении радиус-вектора его конец перемещается в точку М. Секториальной площадью называется удвоенная площадь сектора AM^oM, ограниченного участком срединной линии и радиусвекторами, проведёнными из полюса к концам участка. Эта площадь в общем виде выражается интегралом

$$\omega_M = \int_S r dS \left(см^2\right)$$

Здесь ω_M – секториальная площадь, или секториальная координата, имеющая размерность в $см^2$;

r – перпендикуляр, опущенный из полюса A на направление касательной к средней линии на участке dS;

S – длина дуги $M_0 M$.

При заданном полюсе и заданном начале координат в каждом конкретном случае может быть построена эпюра секториальной площади. Секториальную площадь ω считают положительной, если при движении точки по профилю сечения от начала отсчёта M_0 соответствующий радиус-вектор вращается против хода часовой стрелки при взгляде на сечение вдоль положительного направления оси стержня.

Эпюра секториальных площадей (координат) ω для тонкостенного швеллера.

1.3 Секториальный статический момент равен сумме произведений элементарных площадок на соответствующие секториальные координаты.

$$S_w = \int_F \omega dF \left(см^4\right)$$

При постоянной толщине профиля стержня δ на протяжении каждого участка профиля значение S_w можно определять по формуле:

$$S_w = \sum \delta_i \Omega_i$$

Ω_i - площадь эпюры секториальных координат (площадей) участка i.

Эпюра секториальных статических моментов может быть построена при помощи эпюры секториальных площадей точно также, как эпюра изгибающих моментов по эпюре поперечных сил. Эпюра секториальных статических моментов швеллера.

1.4 Секториально-линейными статическими моментами сечения называются суммы произведений элементарных площадок на линейную и секториальную координаты.

$$S_{Wz} = \int_F \omega y dF; \qquad S_{Wy} = \int_F \omega z dF \quad \left(см^5\right)$$

Здесь z и y - координаты точек средней линии сечения в системе центральных осей.
Величину секториально-линейного статического момента целесообразно определять путём перемножения эпюр по правилу Верещагина.
Например для швеллера с полюсом в точке A строится эпюра ω , эпюры y и z, а затем они перемножаются.

$$S_{Wy} = \frac{1}{2}\cdot\frac{h\cdot b}{2}\cdot b\cdot\frac{2}{3}\left(b-\frac{3z_0}{2}\right)\delta-\frac{1}{2}\cdot\frac{h\cdot b}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(b-\frac{3z_0}{2}\right)\delta=0;$$

$$S_{Wz} = -\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{h\cdot b}{2}\cdot b\cdot\frac{h}{2}\right)2\delta = -\frac{h^2\cdot b^2\cdot\delta}{4}.$$

1.5 Центр изгиба.

В любом стержне существует такая ось, параллельная оси стержня что силы, действующие в любой проходящей через неё плоскости, не вызывают кручения. Точку пересечения этой оси с плоскостью сечения называют центром изгиба.
Центр изгиба характерен тем, что при совмещении с ним полюса секториальных площадей секториально-линейные статические моменты сечения обращаются в нуль:

$$S_{Wz} = S_{Wy} = 0.$$

Координаты центра изгиба определяются по формулам:

$$Y_A = \frac{S_{Wy}}{I_y}; \qquad Z_A = \frac{S_{Wz}}{I_z}.$$

Здесь оси z и y - главные центральные оси инерции сечения;
I_z и I_y - моменты инерции относительно этих осей.
Если сечение имеет ось симметрии, то центр изгиба лежит на этой оси. Если сечение имеет две оси симметрии, то центр изгиба лежит на пересечении этих осей, т.е. совпадает с центром тяжести.

1.6 Секториальные моменты инерции – есть сумма произведений элементарных площадок на квадраты их секториальных координат (ω).

$$I_\omega = \int_F \omega^2 dF \quad \left(см^6\right).$$

Главным секториальными моментами инерции называется секториальный момент инерции профиля, взятый относительно его центра изгиба и главной нулевой секториальной точки контура. Главной нулевой секториальной точкой называется точка M_0 находящаяся на кратчайшем расстоянии от центра изгиба, для которой секториальная координата равна нулю.Вычисление секториального момента инерции для сечений, имеющих ломаное очертание, удобнее всего производить по способу Верещагина, построив предварительно эпюру секториальных координат с полюсом в центре изгиба и с начальной точкой в главной нулевой секториальной точке сечения(M_0).

Например для швеллера.

$$I_\omega = \int \omega^2 dF =$$

$$= \int \omega\omega\delta dS = 2\delta\left[\frac{h}{2}\cdot\left(b - Z_A\right)\cdot\frac{b - Z_A}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{h}{2}\left(b - Z_A\right) + Z_A\frac{h}{2}\cdot\frac{Z_A}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot Z_A\frac{h}{2} + Z_A\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot Z_A\cdot\frac{h}{2}\right] =$$

$$= \frac{\delta\cdot h^2}{12}\left[2\left(b - Z_A\right)^3 + 2\cdot Z_A^3 + h\cdot Z_A^2\right]$$

<u>Главная нулевая секториальная точка находится из условия равенства нулю секториального момента сечения</u>, т.е.

$$S_\omega = 0.$$

1.7 Секториальный момент сопротивления сечения

$$W_\omega = \frac{I_\omega}{\omega_{\max}} \quad \left(см^4\right).$$

Здесь $\omega_{\max}$ секториальная координата, соответствующая одной из крайних точек контура сечения.

1.8 Построение эпюр нормальных суммарных напряжений выполняется по изученным ранее правилам, т.е. путём алгебраического сложения на основе принципа независимости действия сил.

Напряжения от осевой продольной силы

$$\varsigma = \frac{P}{F} \quad кг/см^2.$$

Напряжения от момента M_Z

$$\varsigma = \frac{M_Z}{I_Z} y \quad кг/см^2.$$

Напряжения от изгибающего момента M_y

$$\varsigma = \frac{M_y}{I_y} Z \quad кг/см^2.$$

Секториальные нормальные напряжения от действия бимомента B_ω.

$$\varsigma = \frac{B_w}{I_w} \omega \quad кг/см^2.$$

1.9 Бимомент

Величина бимомента в сечениях, где приложена сила P, при внецентренном сжатии и растяжении находится по формуле

$$B_w = \int_F \delta\omega dF \quad \left(кг \cdot см^4\right)$$

В отличии от уже известных внутренних силовых факторов бимомент является самоуравновешенным фактором и из условий равновесия отсечённой части стержня определён быть не может.
В случае , если тонкостенный стержень нагружен в точке A или B силой P, как указано в задании, бимомент в торцевом сечении будет равен

$$B_w = P \cdot \omega_A \quad или \quad B_w = P \cdot \omega_B.$$

Здесь ω_A и ω_B - секториальная площадь(секториальная координата) точек A и B сечения.

Бимомент учитывает изменения, вносимые в линейные законы распределения напряжений депланацией сечения, т.е. силовой мерой депланации является бимомент.
Формула суммарных нормальных напряжений имеет вид

$$\varsigma = \frac{N}{F} + \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot Z + \frac{B_w}{I_w} \omega.$$

2. Пример расчёта тонкостенного стержня.
2.1 Для тонкостенного стержня с поперечным сечением по схеме №18, с геометрическими размерами по строке №5 таблицы нагрузок и геометрических размеров, загруженного внецентренно приложенной растягивающей силой P требуется:

1.Определить центр тяжести, главные центральные оси сечения и главные моменты инерции.
2. Определить центр изгиба и главный секториальный момент инерции.
3. Построить эпюры нормальных напряжений
а) от осевой продольной силы
б) от изгибающего момента M_Z;
в) от изгибающего момента M_y;
г) от бимомента B_w;
д) суммарную эпюру нормальных напряжений.
4.Построить эпюру изменения бимомента по длине стержня.

2.2 Исходные данные для примера решения

№2	Лист		сила P,m		Длина стержня, м
	а,мм	б,мм	вели-чина	точка	
5	510	12	9	C	10

2.3 Определение центра тяжести и главных моментов инерции.

Сечение симметрично относительно оси Y, следовательно, центр тяжести и центр изгиба будут лежать на этой оси. Расстояние Y_c центра т я жести сечения от средней линии средней полки равен нулю.

$$Y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{2\cdot17\cdot1.2\cdot17 + 2\cdot17\cdot1.2\cdot8.5 - 2\cdot34\cdot17\cdot1.2 - 2\cdot34\cdot17\cdot1.2}{2\cdot1.2\cdot17 + 2\cdot51\cdot1.2 + 2\cdot1.2\cdot17 + 51\cdot1.2} =$$
$$= \frac{693.6 + 346.8 - 1387.8 - 1387.2}{40.8 + 422.4 + 40.8 + 61.2} = -\frac{1734}{265.2} = -6.53\ см$$

Проверка.

$$S_{Zc} = 399.6 + 960 + 664.7 - 1120.6 - 905.6 = -1.9\ см^3 \approx 0.$$

2.4 Вычисляем главные центральные моменты инерции

$$I_{Zc} = \int_A y^2 dF \quad \text{и} \quad I_{Yc} = \int_A z^2 dF$$

с помощью эпюр координат, пользуясь правилом Верещагина Эпюры перемножаем сами на себя.

$$I_{Zc} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot23.53\cdot23.53\cdot\frac{2}{3}\cdot23.53\cdot1.2\right) + 2\cdot17\cdot23.53\cdot23.53\cdot1.2 + 51\cdot6.53\cdot6.53\cdot1.2 +$$
$$+ 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot27.47\cdot27.47\cdot\frac{2}{3}\cdot27.47\cdot1.2\right) + 2\cdot27.47\cdot27.47\cdot17\cdot1.2 = 82900\ см^4$$

$$I_{Yc} = 2\cdot\left(25.5\cdot51\cdot25.5\cdot1.2 + \frac{1}{2}\cdot25.5\cdot25.5\cdot\frac{2}{3}\cdot25.5\cdot1.2 +\right)$$
$$+ 25.5\cdot17\cdot25.5\cdot1.2 + \frac{1}{2}\cdot17\cdot17\cdot\frac{2}{3}\cdot17\cdot1.2 + 8.5\cdot17\cdot8.5\cdot1.2 + \frac{1}{2}\cdot17\cdot17\cdot\frac{2}{3}\cdot17\cdot1.2) =$$
$$= 2\cdot(39792 + 6400 + 13250 + 1960 + 1470 + 1960) = 130000\ см^4$$

2.5 Строим эпюру секториальных площадей (координат)

Для этого принимаем полюс во вспомогательной точке на пересечении горизонтального листа сечения с вертикальной осью, соблюдая описанные выше правила.

2.6 Определяем значения секториально-линейных статических моментов путём перемножения эпюр секториальных площадей (ω_0) с эпюрами z и y.

Относительно оси z

$$S_{Wz} = \int_F \omega_0 y dF = 0,$$

т.е. секториально-линейный статический момент сечения относительно оси z равен нулю для нашего сечения, так как для левой и правой частей сечения эпюра ω_0 одинакова по величине, но противоположна по знаку, а эпюра y одинакова и по величине и по знаку.

Секториально-линейный статический момент относительно оси y:

$$S_{wy} = \int_F \omega_0 z dF = 2 \cdot \Big(-\frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 25.5 \cdot 17 \cdot 25.5 - 17 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 34 - \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 36.9 + \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 25.5 \cdot 34 \cdot 25.5 +$$

$$+ 34 \cdot 25.5 \cdot 17 \cdot 17 + \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 19.9 \Big)$$

$$S_{wy} = 2 \cdot (-93960 - 83521 - 90645 + 375845 + 250563 + 97769) = 912102 \quad см^5.$$

2.7 Вычисляем координату центра изгиба.

$$Y_A = \frac{S_{wy}}{I_{yc}} = \frac{912102}{130000} = 7 \quad см$$

Положительную координату Y_A откладываем в направлении главной оси от полюса A_0, получаем точку A центр изгиба.

2.8 Определяем положение главной нулевой точки. Для этого строим вспомогательную эпюру секториальных площадей ω', располагая полюс в центре изгиба и берём за начало отсчёта произвольную точку O.

Находим постоянную величину D.

$$D = \frac{\int_F \omega' dF}{F} = \frac{0}{265.2} = 0$$

$$F = (4 \cdot 17 + 3 \cdot 51) \cdot 1.2 = 265.2 \quad см^2.$$

$\int_F \omega' dF = 0$, так как эпюра ω' имеет F равные по величине, но противоположные по знаку две симметричные части.

Так как $D = 0$, то эпюра ω' будет являться эпюрой ω, а главной нулевой точкой будет точка O, т.е. ближайшая к центру изгиба.

2.9 Определяем секториальный момент инерции нашего сечения. Для этого умножаем эпюру ω саму на себя. В результате будем иметь:

$$I_w = \delta \int_F \omega^2 dS = 2 \cdot 1.2 \cdot \left[25.5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 15.5 + \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 25.5 \cdot 17 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 17 \cdot 25.5 + 7 \cdot 25.5 \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 25.5 \cdot 24 \cdot 23.9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25.5 \cdot 24 + \frac{1}{2} \cdot 25.5 \cdot 27 \cdot 27.1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25.5 \cdot 27 + 25.5 \cdot 27 \cdot 17 \cdot 30.5 \cdot 25.5 +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 25.5 \cdot 17 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 17 \cdot 25.5 + 27 \cdot 25.5 \right) \right] = 2 \cdot 1.2 \cdot 22.885 \cdot 10^6 = 54.924 \cdot 10^6 \quad см^6.$$

2.10 Находим величину бимомента B_w в сечении, где приложена сила P.

$$B_w = P \cdot \omega_c = 9 \cdot 10^3 \cdot 25.5 \cdot 7 = 1.606 \cdot 10^6 \quad кг \cdot см^2$$

$$P = 9 \; т$$

$$\omega_c = 25.5 \cdot 7 \quad см^2.$$

2.11 Определяем нормальные напряжения от изгибающих моментов M_Z и M_Y.

$$M_Z = P \cdot Y_c = 9 \cdot 10^3 \cdot 23.53 = 2.118 \cdot 10^5 \ кг \cdot см$$
$$Y_c = 23.53 \ см$$
$$\sigma_Z = \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y = \frac{2.118 \cdot 10^5}{8.299 \cdot 10^4} \cdot y = 2.552 \cdot y \quad {}^{кг}\!/_{см^2}$$
$$\sigma_Z \min = 2.552 \cdot (-27.47) = -70 \ {}^{кг}\!/_{см^2}$$
$$\sigma_Z \max = 2.552 \cdot (+23.53) = 60 \ {}^{кг}\!/_{см^2}$$

т.е. напряжение σ_Z изменяются по линейному закону.

$$M_Y = P \cdot Z_c = 9 \cdot 10^3 \cdot 425 = 3.825 \cdot 10^5 \quad кг \cdot см$$
$$Z_c = 42.5 \ см$$
$$\sigma_Y = \frac{M_Y}{I_Y} \cdot z = \frac{3.825 \cdot 10^5}{1.3 \cdot 10^5} \cdot z = 2.942 \cdot z$$
$$\sigma_Y \max = 2.942 \cdot 42.5 = 125 \ {}^{кг}\!/_{см^2}$$
$$\sigma_Y \min = 2.942 \cdot (-42.5) = -125 \ {}^{кг}\!/_{см^2}$$
$$I_Y = 130000 \ см^4$$

2.12 нормальные напряжения от действия бимомента

$$\sigma_w = \frac{B_w}{I_w} \cdot \omega = \frac{1.606 \cdot 10^6}{54.924 \cdot 10^6} = 0.029 \cdot \omega$$

точка $C - \omega_c = 25.5 \cdot 7 \ см$

$$\sigma_{Wc} = 0.029 \cdot 25.5 \cdot 7 = 5.2 \ {}^{кг}\!/_{см^2}$$

точка $D - \omega_D = 25.5 \cdot 24 \ см^2$

$$\sigma_{Wd} = 0.029 \cdot 25.5 \cdot 24 = 17.7 \ {}^{кг}\!/_{см^2}$$

точка $E - \omega_E = 25.5 \cdot 7 \ см^2$

$$\sigma_{We} = 0.029 \cdot 25.5 \cdot 7 = 5.2 \ {}^{кг}\!/_{см^2}$$

точка $O - \omega_o = 0$

$$\sigma \cdot \omega_o = 0$$

точка $G - \sigma_{Wg} = 0$

точка $\alpha - \omega_\alpha = 9.41 \ см^2$

$$\omega_\alpha = 0.27 \ {}^{кг}\!/_{см^2}$$

точка $F - \omega_F = -25.5 \cdot 27 \ см^2$

$$\sigma_{\omega f} = -0.029 \cdot 25.5 \cdot 27 = -20 \ {}^{кг}\!/_{см^2}$$

точка $K - \omega_K = -25.5 \cdot 44\ см^2$

$$\sigma_{\omega к} = -0.029 \cdot 25.5 \cdot 44 = -32.5\ ^{кг}\!/_{см^2}.$$

На второй симметричной половине сечения величины напряжений σ_ω будут иметь такое же значение, но обратный знак. Напряжение от продольной силы:

$$\sigma_N = \frac{P}{F} = \frac{9000}{265.2} = 33.9\ ^{кг}\!/_{см^2}$$

3.13 Построение эпюр напряжений.
По полученным значениям напряжений строим эпюры их. Суммарную эпюру нормальных напряжений можно построить, используя выражение:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y + \frac{M_Y}{I_Y} \cdot z + \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \omega = P\left(\frac{1}{F} + \frac{Y_c}{I_Z} \cdot y + \frac{Z_c}{I_y} \cdot z\right) + \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \omega$$

Результаты вычислений удобно представить таблицей.

Значения σ для правой части сечения.

точки / величина	C	D	E	O	α	G	F	K
Y, см	23.53	23.53	6.53	6.53	0	-0.37	-27.47	-27.47
Z, см	42.5	25.5	25.5	0	25.5	25.5	25.5	8.5
ω, $см^2$	178.5	612	178.5	0	9.4	0	-688.5	-11.22
σ, $кг/см^2$	223.1	186.6	130.8	50.6	109.2	108	13.9	-43.6

Для левой части необходимо учесть знаки напряжений.