

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
аграрный университет имени И. Т. Трубилина»

ИНЖЕНЕРНЫЕ РАСЧЕТЫ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ
СРЕДСТВ АПК

Учебное пособие

Краснодар
КубГАУ
2019

УДК 631.3:338.436.33 (075.8)

ББК 40.72

И62

Р е ц е н з е н т ы :

В. А. Пивень – канд. физ.-мат. наук, доцент
(Краснодарское высшее военное авиационное училище летчиков
имени Героя Советского Союза А. К. Серова);

Е. В. Кузнецов – д-р техн. наук, профессор
(Кубанский государственный аграрный университет)

К о л л е к т и в а в т о р о в :

А. Д. Гумбаров, Ф. В. Кремянский, А. С. Брусенцов, В. В. Ванжа,
В. А. Дробот

И62 **Инженерные расчеты элементов конструкций средств АПК :**
учеб. пособие /А. Д. Гумбаров[и др]. – Краснодар:КубГАУ, 2019. – 90
с.

ISBN 978-5-00097-883-2

В учебном пособии изложены теоретические основы прочностногорасчета элементов конструкций и самих конструкций при различных видах нагружения. Приводятся методика определения внутренних усилий и построения эпюр различных силовых факторов, определения положения опасных сечений, а также подбора сечений из условия прочности.

Издание предназначено для обучающихся по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия».

УДК 631.3:338.436.33 (075.8)

ББК 40.72

©Гумбаров А. Д.,Кремянский Ф. В.,
Брусенцов А. С., Ванжа В. В.,
Дробот В. А., 2019

© ФГБОУ ВО «Кубанский
государственный аграрный
университет имени
И. Т. Трубиллина», 2019

ISBN 978-5-00097-883-2

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит все важные темы курса сопротивления материалов. В пособии рассматриваются основные понятия курса, сжатие и растяжение материалов, работа деформации, критерии прочности и предельных напряженных состояний материалов, касательные напряжения, расчет на прочность, теория напряженного состояния, основные законы упругих свойств материалов, жесткость и прочность при кручении, сдвиге и изгибе, температурные напряжения, расчет конструкций по предельной нагрузке и т.д. Изложены теоретические основы определения внутренних усилий и построения эпюр различных силовых факторов, определения положения опасных сечений, а также подбора сечений из условия прочности.

Издание предназначено для преподавателей и обучающихся по агроинженерным специальностям.

ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ

1.1 Основные принципы и гипотезы науки о сопротивлении материалов

Сопротивление материалов – это наука о принципах и методах расчета элементов конструкций машин и сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Под прочностью элемента конструкции понимают его способность воспринимать внешние нагрузки в процессе эксплуатации не разрушаясь.

Под жёсткостью элемента конструкции понимают его способность сохранять свои размеры и, следовательно, форму в процессе эксплуатации.

Под устойчивостью элемента конструкции понимают его способность сохранять под действием эксплуатационных нагрузок свою первоначальную форму равновесия.

При проведении расчетов необходимо стремиться к сочетанию надежности работы конструкции с ее стоимостью.

Исследование реальных элементов конструкций начинается с расчетной схемы.

В курсе сопротивления материалов принимается четыре основных типа основных элементов:

– стержень (брус) (рисунок 1.1 а) – тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной;

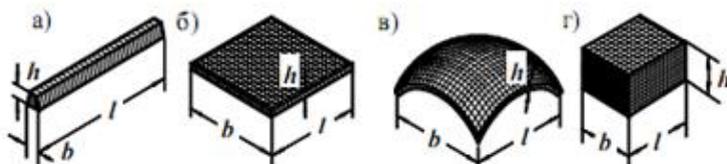


Рисунок 1.1 – Расчетные объекты

– пластина представляет собой тело, один из размеров которого (толщина) значительно меньше двух других (длины и ширины) (рисунок 1.1 б);

– оболочка – тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями с расстоянием между ними, значительно меньшим других размеров (рисунок 1.1 в);

– массив – тела, у которых все три размера одинакового порядка.

Основные принципы сопротивления материалов:

1. Принцип сохранения начальных размеров (принцип отвердевания). Согласно этому принципу форма тела под действием внешних сил меняется несущественно.

2. Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции). Действие некоторой совокупности сил эквивалентно сумме независимых действий этих сил. Этот принцип позволяет рассматривать действие каждой силы независимо.

3. Принцип Сен-Венана. Согласно этому принципу в точках тела, достаточно удаленных от места приложения внешних нагрузок, напряжения мало зависят от способа приложения нагрузок.

Для облегчения решения вопросов инженерной практики в сопротивлении материалов прибегают к схематизации свойств материалов и пользуются рядом допущений:

- материалы предполагаются идеально упругими;
- материалы считаются изотропными;
- материалы являются однородными;
- материал тела предполагается сплошным.

1.2 Внешние и внутренние силы

Внешние силы обусловлены взаимодействием тела с другими телами. К ним относят поверхностные и объемные.

Объемные силы (вес тела, силы инерции) приложены ко всем точкам тела и, следовательно, распределены непрерывно по его объему.

Поверхностные силы (опорные реакции, тросовые подвески, распределённые нагрузки) приложены к поверхности тела.

Распределенными нагрузками являются приложенные непрерывно на протяжении некоторой длины, площади или объема.

Сосредоточенной называется сила, распределённая по весьма малой площади тела и ее принято считать приложенной в точке.

По длительности действия – постоянные и временные.

По характеру воздействия на конструкцию – статические и динамические.

Внутренними силами называют силы упругого взаимодействия одной части тела с другой, обусловленные действием внешних сил и сопротивляющихся стремлению внешних сил отделить одну часть тела от другой или изменить форму тела.

Для определения внутренних сил применяют метод сечений. Суть метода состоит в том, что изучаемый стержень мысленно рассекают плоскостью на две части. Далее рассматривают равновесие одной из частей (любой) под действием внешних сил, приложенных к этой части, и внутренних сил взаимодействия с отброшенной частью (рисунок 1.2).

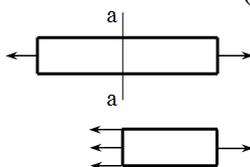


Рисунок 1.2 – Метод сечений

Это позволяет определить равнодействующую внутренних сил и их интенсивность.

Интенсивность внутренних сил, т.е. сил, приходящихся на единицу площади сечения называют напряжением в данной точке сечения.

В зависимости от характера системы внешних сил, приложенных к стержню, возможны следующие случаи деформации стержня:

1. Деформация растяжения (сжатия) – внешние силы приводятся к силе, направленной по оси стержня.

2. Деформация кручения – внешние силы приводятся к паре сил, действующей в плоскости, перпендикулярной оси стержня. Внутренние силы в этом случае приводятся тоже к паре, действующей в плоскости, перпендикулярной оси стержня.

3. Деформация изгиб – внешние силы приводятся к паре сил, действующей в плоскости, в которой лежит ось стержня. Внутренние силы в этом случае приводятся тоже к паре, действующей в той же плоскости.

1.3 Понятие о напряжениях и деформациях

Внутреннюю силу P принято раскладывать на 2 составляющие: нормальную к сечению N , вызывающую деформацию растяжение – сжатие; касательную к сечению T , вызывающую деформацию сдвига или среза.

Выделим в окрестности некоторой точки O сечения стержня элементарную площадку ΔF (рисунок 1.6, а). ΔP – величина внутренней силы, действующей по площадке. Тогда

$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = p$ – полное напряжение в точке O (рисунок 1.6, б).

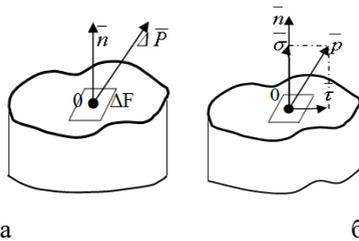


Рисунок 1.6 – Рассматриваемое сечение и проекции полного напряжения

Интенсивность внутренних нормальных сил $\sigma = \frac{\Delta N}{\Delta F}$ называется нормальным напряжением.

Интенсивность внутренних касательных сил $\tau = \frac{\Delta T}{\Delta F}$ называется касательным напряжением.

Между полным напряжением и его компонентами существует очевидная связь:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (1.1)$$

Напряжения τ и σ впредь будем считать скалярными величинами, так как их направления заведомо известны.

Внешние силы, приложенные к телу, вызывают изменения его геометрической формы (деформации).

Перемещения точек тела вдоль прямых линий называются линейными деформациями. Согласно рисунку 1.7, adu представляет собой абсолютную линейную деформацию, а $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ – относительную линейную деформацию.

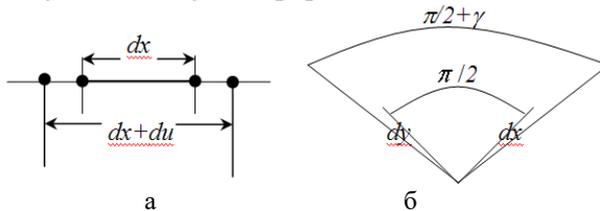


Рисунок 1.7 – Деформации тела

Повороты линий и плоскостей в теле называются угловыми деформациями (величина γ рисунок 1.7,б). При вычислениях полагают $\gamma = tg \gamma$.

Деформации, исчезающие после удаления внешних нагрузок, называются упругими, а деформации, остающиеся в теле – пластическими (остаточными).

Контрольные вопросы

1. Виды деформаций.
2. Упругие деформации. Пластические деформации.
3. Внутренние силы, их определение (метод сечений).
4. Виды напряжений.

ТЕМА 2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1 Усилия в поперечном сечении стержня

Центральным растяжением (или центральным сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только продольная сила N , а все остальные усилия равны нулю.

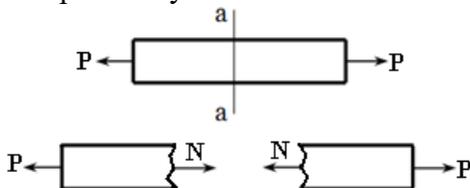


Рисунок 2.1 – Центральное растяжение стержня

Продольная (нормальная) сила представляет собой равнодействующую внутренних сил в поперечном сечении стержня. Она определяется из условий равновесия отсеченной части стержня и численно равна алгебраической сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения.

При растяжении продольная сила направлена от сечения и считается положительной. При сжатии она направлена к сечению и считается отрицательной.

Эпюра продольных сил N представляет собой график величин этих усилий для всех поперечных сечений стержня.

2.2 Напряжения и деформации при растяжении (сжатии)

Нормальные напряжения при растяжении-сжатии стержня с постоянной площадью поперечного сечения по длине:

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (2.1)$$

где N – усилие в опасном сечении стержня, Н;

F – площадь опасного сечения стержня, м^2 .

Относительная продольная деформация определяется:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.2)$$

где l – первоначальная длина стержня, м;
 Δl – абсолютное удлинение (укорочение), м.

Относительная поперечная деформация

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta v}{v}, \quad (2.3)$$

где v – первоначальный поперечный размер, м;
 Δv – абсолютное изменение поперечного размера, м.

Абсолютная величина отношения относительных поперечной деформации к продольной называется коэффициентом поперечной деформации (или коэффициентом Пуассона) и характеризует упругие свойства материалов в поперечном направлении при растяжении или сжатии:

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}. \quad (2.4)$$

Коэффициент Пуассона величина безразмерная, и варьирует в пределах от 0 до 0,5.

Относительное изменение объема:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V}, \quad (2.5)$$

где V – первоначальный объем стержня, м³;
 ΔV – абсолютное изменение объема, м³.

Зависимость между напряжениями и относительными продольными деформациями выражается законом Гука:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad (2.6)$$

где E – коэффициент пропорциональности, называемый

модулем продольной упругости (модуль Юнга, МПа) и характеризующий упругие свойства материалов в продольном направлении при растяжении или сжатии.

Абсолютное удлинение стержня постоянного сечения при постоянном по длине значении продольной силы равно:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}, \quad (2.7)$$

Произведение $E \cdot F$ называется жесткостью сечения при растяжении-сжатии.

2.3 Потенциальная энергия упругой деформации

Потенциальной энергией (U , Н·м) упругой деформации называется энергия, накопленная в теле вследствие его упругой деформации под действием внешних сил и численно равна работе внешних сил, приложенных к телу, и при статическом растяжении или сжатии и постоянных N и F по длине стержня может быть определена по формуле:

$$U = \frac{N^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot F}, \quad (2.8)$$

Удельная потенциальная энергия деформации (u , $\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3}$):

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E}. \quad (2.9)$$

2.4 Механические характеристики материалов

В инженерной практике различают два вида материалов: хрупкие, которые разрушаются при весьма малых остаточных деформациях, и пластичные, которые разрушаются после появления значительных остаточных деформациях.

Основные механические характеристики пластичных материалов определяются при испытаниях на растяжение стандартных образцов.

В процессе испытания мы получаем кривую зависимости между нагрузкой (P) и абсолютным удлинением (Δl), называемую машинной диаграммой растяжения образца. На основе этой диаграммы строится диаграмма напряжений, которая отражает зависимость между напряжением (σ) и относительными удлинениями (ε) и для пластичных материалов имеет такое же очертание, но отличается масштабом (рисунок 2.2).

На диаграмме (рисунок 2.2) показаны характерные ординаты, называемые пределами:

– *предел пропорциональности* (σ_{nc} , точка A) – наибольшее напряжение, при котором еще сохраняется линейный закон Гука:

$$\sigma = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha, \text{ или } \sigma = E \varepsilon, \quad (2.10)$$

где $E = \operatorname{tg} \alpha$ – так называемый модуль продольной упругости.

– *предел текучести* (σ_m , точка B) – напряжение, при котором деформации растут при почти постоянной нагрузке.

– *предел прочности или временное сопротивление* (σ_B , точка D) – напряжение, вызываемое наибольшей нагрузкой на образец.

– *предел упругости* (σ_y) – напряжение, при котором остаточные деформации незначительны (не более 0,001–0,03%). Практически можно считать, что σ_y совпадает с σ_{nc} (точка A).

Кроме того, диаграмму (рисунок 2.2) можно разделить на условные зоны: I – зона пропорциональности, II – зона текучести, III – зона прочности, IV – зона местной текучести.

Диаграмма на рисунке 2.2 даёт условные напряжения, так как они вычислены как отношение нагрузки к первоначальной площади сечения образца. В связи с этим участок DF диаграммы не отражает истинного изменения напряжений. Если построить диаграмму истинных напряжений, относя нагрузку к текущей площади сечения образца, то на участке DF истин-

ные напряжения будут расти, за счет резкого уменьшения площади сечения образца в месте разрыва. В остальном обе диаграммы почти совпадают.

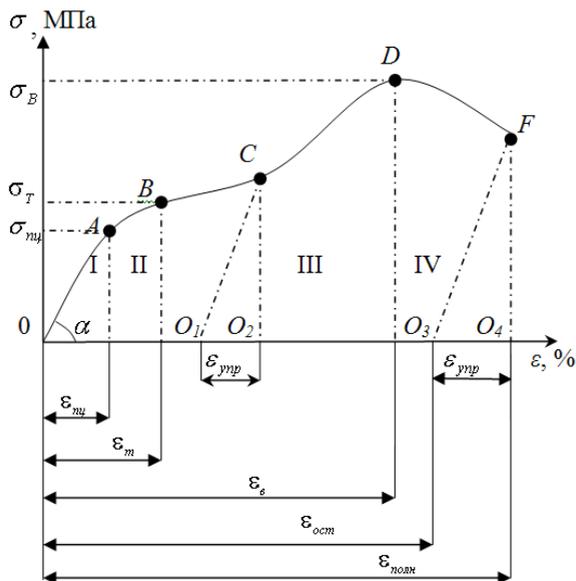


Рисунок 2.2 – Диаграмма напряжений для малоуглеродистой стали

Следует заметить, что высокие $\sigma_{уст}$ в точке F не могут характеризовать прочность материала, так как они развиваются в процессе разрушения образца. Отсюда, логично считать напряжение σ_B (точка D) пределом прочности.

На диаграмме показан закон разгрузки (линия CO_1). При повторном нагружении диаграмма пойдет по этой же линии и предел пропорциональности повышается (явление наклёпа).

Таким образом, относительная продольная деформация ϵ состоит из упругой деформации $\epsilon_{упр}$, которая исчезает после разгрузки, и пластической $\epsilon_{пл}$, которая сохраняется после разгрузки (остаточная деформация). Остаточная деформация в

момент разрыва $\varepsilon_{ост}$ служит характеристикой пластичности материала.

Допускаемым напряжением $[\sigma]$ для данного элемента конструкции называют наибольшее безопасное для его эксплуатации напряжение.

Для элементов конструкции (сооружения), изготовленных из пластических материалов допускаемое напряжение подчиняют условию:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n}.$$

Для хрупких материалов (чугун, бетон, камни):

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n}.$$

В этих формулах $n > 1$ – коэффициент безопасности (запаса прочности).

Условие прочности элемента конструкции записывают в виде $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$. Сечение элемента, в котором $\sigma = \sigma_{\max}$ называют опасным сечением.

Условие прочности растянутого или сжатого стержня выглядит:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (2.11)$$

Контрольные вопросы

1. Продольная (нормальная) сила и ее эпюра.
2. Определение перемещений при растяжении (сжатии).
3. Модули продольной и поперечной упругости.
4. Закон Гука при растяжении (сжатии).
5. Напряжения в поперечных сечениях бруса при растяжении (сжатии).

ТЕМА 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ

3.1 Напряженное состояние в точке тела

Напряженным состоянием в данной точке называется совокупность напряжений на всех элементарных площадках, которые можно провести через эту точку.

В каждой точке сечения тела полное напряжение p_v можно разложить на две составляющие (компоненты) (рисунок 3.1):

1) составляющую, нормальную к плоскости сечения. Эта составляющая называется нормальным напряжением обозначается σ ;

2) составляющую, лежащую в плоскости сечения. Эта составляющая обозначается τ и называется касательным напряжением.

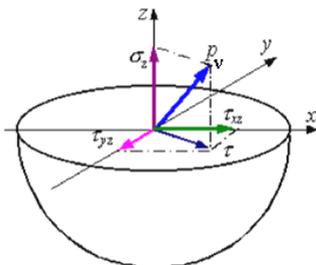


Рисунок 3.1 – Разложение вектора полного напряжения

У нормального напряжения ставится индекс, указывающий какой координатной оси параллельно данное напряжение. Растягивающее нормальное напряжение считается положительным, сжимающее – отрицательным.

Обозначения касательных напряжений имеют два индекса: первый из них указывает, направление действия касательного напряжения (т.е. какой оси параллельно само напряжение), а второй – ориентацию площадки (т.е. какой оси параллельна нормаль к рассматриваемой площадке). Касательные

напряжения на площадках с внешней нормалью, совпадающей с положительным направлением оси координат, считаются положительными, если они направлены тоже по оси координат. На противоположных площадках правило знаков для касательных напряжений противоположно, т. е. касательные напряжения положительны, если они направлены против оси координат.

Если мысленно вырезать вокруг какой-нибудь точки тела элемент в виде бесконечно малого кубика, то по его граням в общем случае будут действовать напряжения, представленные на рисунке 3.2.

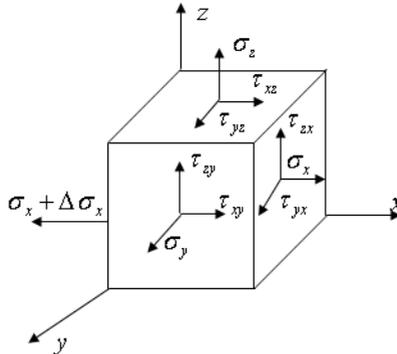


Рисунок 3.2 – Система напряжений в точке

На невидимых гранях куба все компоненты напряжений имеют приращения в виде частных дифференциалов.

Из условий равновесия куба вытекает закон парности касательных напряжений, который формулируется следующим образом: составляющие касательных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные общему ребру, равны по величине и противоположны по знаку, то есть либо обе направлены к ребру либо обе направлены от ребра:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (3.1)$$

С учетом закона парности число независимых компонент напряжений, характеризующих напряженное состояние в точке тела, снижается до шести: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.

Доказано, что через каждую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярных площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки, а также действующие на них нормальные напряжения называются главными.

Главными напряжения являются для данной точки экстремальными. Их принято обозначать $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем они связаны следующим образом – $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

В теории упругости показано также, что по площадкам, делящим пополам углы между главными площадками, действуют максимальные касательные напряжения. Их называют главными касательными напряжениями. Через главные нормальные напряжения они выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\tau_{12} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2); \\ \tau_{23} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3); \\ \tau_{31} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1).\end{aligned}\quad (3.2)$$

Нормальные напряжения на площадках с экстремальными касательными напряжениями имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2); \\ \sigma_{23} &= \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3); \\ \sigma_{31} &= \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1).\end{aligned}\quad (3.3)$$

3.2 Виды напряженного состояния

В зависимости от значений главных напряжений различают три вида напряженного состояния.

1. Линейное напряженное состояние – когда два главных напряжения равны нулю (растяжение или сжатие в одном направлении) (рисунок 3.3). Пусть известно $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \sigma_1 = \frac{N}{F}$.

Полное напряжение по наклонному сечению с площадью F_α равно:

$$p_\alpha = \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N}{F} \cos \alpha = \sigma_1 \cdot \cos \alpha, \quad (3.4)$$

$$F_\alpha = \frac{F}{\cos \alpha}.$$

Нормальная и касательная составляющие полного напряжения:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha, \quad (3.5)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \sin 2\alpha. \quad (3.6)$$

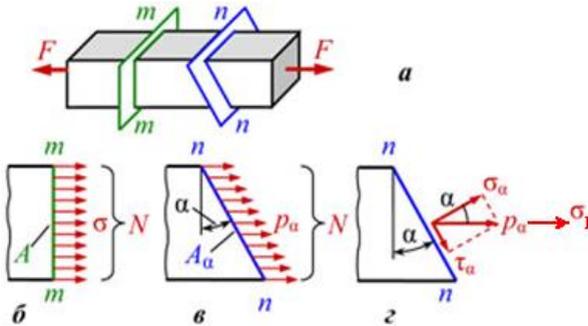


Рисунок 3.3 – Компоненты напряжения при линейном напряженном состоянии

Экстремальные значения нормального напряжения:

- при $\alpha = 0^\circ$ имеем максимальное напряжение ($\sigma_\alpha = \sigma_1$);
- при $\alpha = 90^\circ$ имеем минимальное напряжение ($\sigma_\alpha = 0$).

Экстремальные значения касательного напряжения:

– при $\alpha = 45^\circ$ имеем максимальное касательное напряжение, равное $\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2}$;

– при $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$ имеем минимальное значение касательного напряжения, равное $\tau_\alpha = 0$ (главные площадки).

2. Плоское напряженное состояние

Напряженное состояние называется плоским или двухосным, если одно из трех главных напряжений равно нулю (рисунок 3.4). Пусть $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$.

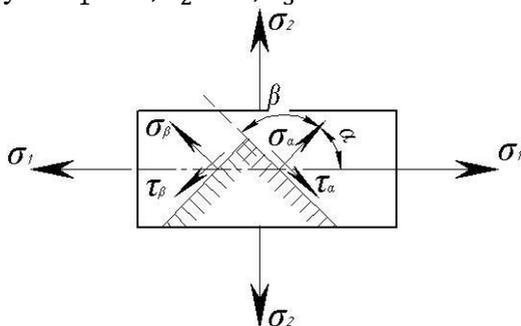


Рисунок 3.4 – Компоненты напряжения при плоском напряженном состоянии

При заданных значениях σ_1 и σ_2 напряжения на площадке с нормалью, составляющей угол α с направлением главного напряжения σ_1 , определяется по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha, \quad (3.7)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha, \quad (3.8)$$

– при $\alpha = 0^\circ$ имеем максимальное напряжение ($\sigma_\alpha = \sigma_1$);

– при $\alpha = 90^\circ$ имеем минимальное напряжение ($\sigma_\alpha = \sigma_2$);

– при $\alpha = 45^\circ$ имеем максимальное касательное напряжение, равное $\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$;

– при $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$ имеем минимальное значение касательного напряжения, равное $\tau_\alpha = 0$.

В случае, когда $\sigma_2 > 0$, наибольшее и наименьшее из всех касательных напряжений будут иметь место на площадках, наклоненных под углом в 45° к плоскости напряжений:

$$\tau_{\begin{matrix} max \\ min \end{matrix}} = \pm \frac{\sigma_1}{2}. \quad (3.9)$$

Напряжения, действующие на взаимно перпендикулярных площадках, связаны между собой следующей зависимостью:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (3.10)$$

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \quad (3.11)$$

При заданных значениях нормальных (σ_x и σ_y) и касательных (τ_{xy} и τ_{yx}) напряжений на взаимно перпендикулярных площадках элемента (рисунок 3.5) напряжения на площадке с нормалью, составляющей угол α с направлением σ_x , определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha, \quad (3.12)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha. \quad (3.13)$$

Главные напряжения в этом случае равны:

$$\sigma_{\begin{matrix} max \\ min \end{matrix}} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right]. \quad (3.14)$$

Угол наклона главной площадки α определяется по формулам:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \text{ или } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_2}. \quad (3.15)$$

Если при этом оказывается, что $\operatorname{tg} 2\alpha$ или $\operatorname{tg} \alpha$ больше нуля (положителен), то угол α отсчитывается от направления σ_x по ходу часовой стрелки, если же $\operatorname{tg} 2\alpha$ или $\operatorname{tg} \alpha$ меньше ну-

ля (отрицателен), то угол отсчитывается против часовой стрелки.

Наибольшее и наименьшее касательное напряжения действуют на площадках, расположенных под углом 45° к главным площадкам:

$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.16)$$

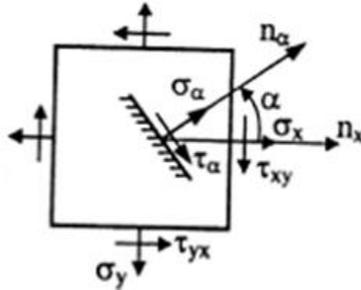


Рисунок 3.5 –Плоское напряженное состояние

3. Объемное напряженное состояние наблюдается, когда все три главных напряжения отличны от нуля (рисунок 3.7). Нормальное и касательное напряжения на площадке с нормалью n , составляющей углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ с направлениями соответствующих главных напряжений, определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3, \quad (3.17)$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cdot \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}. \quad (3.18)$$

На площадках, равнонаклоненных к трем главным напряжениям, нормальное и касательное напряжения называются октаэдрическими и равны:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (3.19)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1}. \quad (3.20)$$

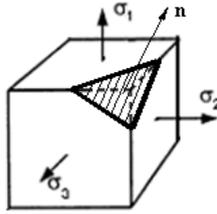


Рисунок 3.6 – Объемное напряженное состояние

3.3 Деформации при сложном напряженном состоянии. Связь между напряжениями и деформациями

Связь между линейными упругими деформациями и нормальными напряжениями в направлении этих деформаций выражается обобщенным законом Гука.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)].\end{aligned}\quad (3.21)$$

Связь между угловыми деформациями и касательными напряжениями:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (3.22)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ – модуль упругости при сдвиге, МПа.

Главные деформации, т.е. относительные линейные деформации по направлению главных напряжений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)];\end{aligned}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)].$$

Угловые деформации по главным направлениям равны нулю.

Объемная деформация θ (относительное изменение объема) может быть выражена так:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.23)$$

Если принять, что среднее напряжение равно:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

В этом случае мы получим:

$$\theta = \frac{3(1-2\mu)}{E} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_{\text{ср}}}{K}, \quad (3.24)$$

где $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ – модуль объемной деформации.

3.4 Теории прочности

Общая запись условия прочности при сложном напряженном состоянии имеет вид:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq [\sigma]$$

где $\sigma_{\text{пр}}$ – расчетное или приведенное напряжение при сложном напряженном состоянии.

Первая теория прочности (теория наибольших нормальных напряжений) основана на гипотезе о том, что опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии.

$$\sigma_{\text{пр}} \leq [\sigma], \sigma_1 \leq [\sigma] \text{ или } |\sigma_3| \leq [\sigma]. \quad (3.25)$$

Вторая теория прочности (теория наибольших относительных удлинений) исходит из гипотезы о том, что разрушение связано с величиной наибольших относительных удлинений. Следовательно, опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшая по модулю относительная линейная деформация достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии.

По этой теории, при $\varepsilon_{max} = \varepsilon_1$, условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{np} \leq [\sigma], \quad \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (3.26)$$

Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений) предполагает, что появление опасного состояния обусловлено наибольшими касательными напряжениями. Условие прочности записывают следующим образом:

$$\tau_{max} \leq [\tau] \text{ или } \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (3.27)$$

где $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{np}$ – приведенное (расчетное) напряжение по третьей теории прочности.

Четвертая теория прочности или энергетическая теория прочности (теория наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения) исходит из предпосылки о том, что количество потенциальной энергии формоизменения, накопленной к моменту наступления опасного состояния (текучести материала), одинаково как при сложном напряженном состоянии, так и при простом растяжении. Условие прочности:

$$\sigma_{np} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 - \sigma_2 \cdot \sigma_3} \leq [\sigma]. \quad (3.28)$$

Теория прочности Мора (теория предельных состояний) исходит из предположения, что прочность материалов в общем случае напряженного состояния зависит от величины и знака наибольшего σ_1 и наименьшего σ_3 главных напряжений. Учитывая это предположение, любое напряженное состояние

можно изобразить кругом Мора (рисунок 3.7), построенным на главных напряжениях σ_1 и σ_3 .

Для получения допустимого напряженного состояния необходимо построить круги Мора по значениям $[\sigma]$, полученным на основании опытов на одноосное растяжение и сжатие.

Для выяснения вопроса о прочности в некоторой точке тела строят круг напряжений по действующим в этой точке σ_1 и σ_3 . Если круг будет расположен между прямыми, то материал имеет избыточную прочность, пересекать эти прямые, то материал имеет недостаточную прочность. Круг, касающийся прямых, характеризует состояние, которое является допустимым. Теория рекомендована для материалов различного сопротивления растяжению и сжатию, хрупких материалов.

Условие прочности:

$$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (3.29)$$

где k – коэффициент неравнопрочности материала. Для равнопрочных материалов $k = 1$.

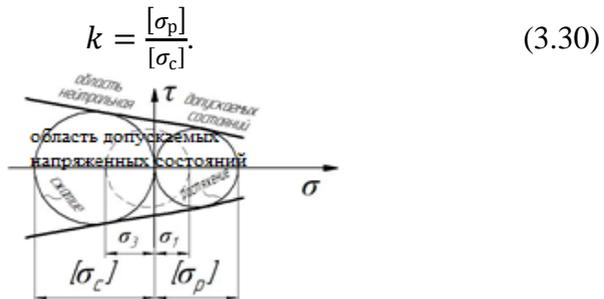


Рисунок 3.7 – Круги напряжений Мора

Контрольные вопросы

1. Полное напряжение и его составляющие.
2. Что такое напряженное состояние в точке?
3. Закон парности касательных напряжений.
4. Виды напряженного состояния
5. Теории прочности.

ТЕМА 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

4.1 Основные понятия и определения

Так как при кручении и изгибе напряжения и деформации зависят не только от площади, но и от формы сечения, то в теории кручения и изгиба используются более сложные геометрические характеристики.

Рассмотрим произвольное сечение (рисунок 4.1), отнесенное к некоторой системе координат (x, y) , где: F – величина площади сечения; dF – элементарная часть этой площади; x, y – координаты элементарной площадки; ρ – радиус-вектор; C – центр тяжести площади сечения.

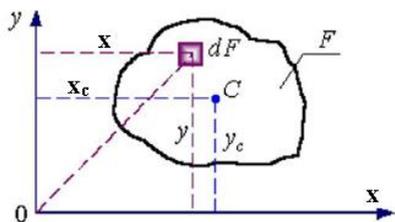


Рисунок 4.1 – К определению геометрических характеристик сечения

Площадь F определяется по формуле:

$$F = \int_f dF. \quad (4.1)$$

Статические моменты площади F относительно осей

$$S_y = \int_F x \cdot dF, \quad S_x = \int_F y \cdot dF. \quad (4.2)$$

Если известна величина площади F и координаты ее центра тяжести, то S_x, S_y определяются по формулам:

$$S_y = F \cdot x_c, \quad S_x = F \cdot y_c. \quad (4.3)$$

Отсюда координаты центра тяжести площади F :

$$x_c = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (4.4)$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными. Относительно любых центральных осей статические моменты сечения равны нулю.

Центр тяжести сечения лежит на оси симметрии сечения. Если сечение имеет хотя бы две оси симметрии, то центр тяжести лежит на пересечении этих осей.

Для сложного сечения, состоящего из n простейших фигур, координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (4.5)$$

где x_i, y_i и F_i — координаты центров тяжести и площади сечений отдельных фигур.

Осевые моменты инерции площади F :

$$I_y = \int_F x^2 \cdot dF, \quad I_x = \int_F y^2 \cdot dF. \quad (4.6)$$

Центробежный момент инерции площади F :

$$I_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF. \quad (4.7)$$

Полярный момент инерции:

$$I_\rho = \int_F \rho^2 \cdot dF. \quad (4.8)$$

Так как $\rho^2 = y^2 + z^2$:

$$I_\rho = I_x + I_y. (4.9)$$

Осевые моменты инерции всегда можно представить, как произведения площади фигуры на квадраты некоторых вспомогательных величин, имеющих размерность длины и называемых радиусами инерции. Следовательно, радиусы инерции сечения относительно осей x и y определяются по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}. (4.10)$$

Осевые и полярный моменты инерции, представляющие собой пределы сумм положительных величин, всегда положительны. Центробежный момент инерции может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю.

4.2 Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей

Пусть известны осевые I_{x_c}, I_{y_c} и центробежный I_{xy} моменты инерции сечения относительно его центральных осей и требуется определить моменты инерции I_x, I_y, I_{xy} того же сечения относительно осей x и y , параллельных данным центральным (рисунок 4.2). Тогда согласно рисунку 4.2 и формулам (4.6) и (4.7) в принятых выше обозначениях имеем:

$$I_x = I_{x_c} + 2 \cdot y_c \cdot S_{x_c} + y_c^2 \cdot F, (4.11)$$

$$I_y = I_{y_c} + 2 \cdot x_c \cdot S_{y_c} + x_c^2 \cdot F, (4.12)$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + y_c \cdot S_{y_c} + x_c \cdot S_{x_c} + x_c \cdot y_c \cdot F. (4.13)$$

Учитывая, что относительно центральных осей статические моменты S_{x_c}, S_{y_c} равны нулю, получаем:

$$I_x = I_{x_c} + y_c^2 \cdot F, \quad (4.14)$$

$$I_y = I_{y_c} + x_c^2 \cdot F, \quad (4.15)$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + x_c \cdot y_c \cdot F. \quad (4.16)$$

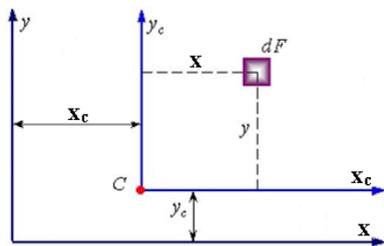


Рисунок 4.2 – Параллельный перенос осей

4.3 Вычисление моментов инерции сложных фигур

Всякую сложную фигуру обычно можно разбить на ряд простейших фигур, моменты инерции которых относительно их центральных осей известны. Применяв формулы переноса осей инерции, можно определить момент инерции сложной фигуры, алгебраически суммируя моменты инерции простых фигур относительно общей оси – центральной оси сложной фигуры.

4.4 Изменение моментов инерции при повороте осей координат

Предположим, что задана система осей координат и известны моменты инерции I_x, I_y и I_{xy} фигуры. Повернем оси координат на некоторый угол α и определим моменты инерции относительно новых осей координат u и v .

Из рисунка 4.3 следует, что координаты любой точки в обеих системах координат связаны соотношениями:

$$u = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha, v = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha.$$

Моменты инерции:

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.17)$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.18)$$

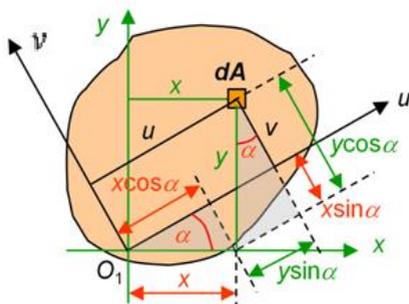


Рисунок 4.3 – Поворот координатных осей

Центробежный момент инерции:

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (4.19)$$

Из полученных уравнений видно, что:

$$I_u + I_v = I_x + I_y,$$

т. е. сумма осевых моментов инерции при повороте осей координат остается величиной постоянной. Поэтому, если относительно какой-либо оси момент инерции достигает максимума, то относительно перпендикулярной ей оси он имеет минимальное значение.

4.5 Главные оси и главные моменты инерции

Из формул (4.17) – (4.19) видно, что при повороте осей координат центробежный момент инерции меняет знак, и,

следовательно, существует такое положение осей, при котором центробежный момент равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции сечения обращается в нуль, называются главными осями, а главные оси, проходящие через центр тяжести сечения – главными центральными осями инерции сечения.

Моменты инерции относительно главных осей инерции сечения называются главными моментами инерции сечения и обозначаются через I_1 и I_2 , причем $I_1 > I_2$.

Предположим, что оси u и v главные. Тогда:

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

Отсюда:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) определяет положение главных осей инерции сечения в данной точке относительно исходных осей координат. При повороте осей координат изменяются также и осевые моменты инерции.

Главные оси инерции являются осями, относительно которых осевые моменты инерции сечения достигают экстремальных значений.

Для упрощения вычисления главных моментов инерции применяют формулу:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (4.21)$$

Знак плюс перед радикалом соответствует большему I_1 , а знак минус – меньшему I_2 из моментов инерции сечения.

Если моменты инерции сечения относительно главных осей одинаковы, то все оси, проходящие через ту же точку сечения, являются главными и осевые моменты инерции относительно всех этих осей одинаковы: $I_u = I_v = I_y = I_x$. Этим свойством обладают, например, квадратные, круглые, кольцевые сечения.

4.6 Моменты сопротивления площади сечения

Осевым моментом сопротивления площади сечения F относительно данной оси называется отношение момента инерции площади относительно этой же оси к расстоянию от оси до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \quad (4.22)$$

Отношение полярного момента инерции площади сечения к наибольшему радиусу-вектору этой площади, называется полярным моментом сопротивления:

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}}. \quad (4.23)$$

Контрольные вопросы

1. Статические моменты сечения.
2. Определение положения центра тяжести сечения сложной формы.
3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей.
4. Вычисление моментов инерции сложных сечений.
5. Главные оси и главные моменты инерции.

ТЕМА 5. КРУЧЕНИЕ

5.1 Общие понятия

Кручением называется деформация стержня, возникающая при действии внешних пар сил, лежащих в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня.

Стержень, работающий на кручение, называют валом.

Моменты внешних пар называют скручивающими моментами и обозначают M .

Внутренние силы в поперечных сечениях при кручении приводятся к одному силовому фактору – крутящему моменту и обозначают M_k .

В соответствии с методом сечений крутящий момент в произвольном сечении стержня равен алгебраической сумме внешних крутящих моментов, приложенных к отсеченной части вала (правой или левой).

5.2 Напряжения при кручении брусьев сплошного и кольцевого сечений

Теория кручения стержней основана на следующих предположениях:

- ось стержня после деформации остается прямой;
- расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными, т.е. удлинения (укорочения) волокон отсутствуют;
- поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к оси бруса после деформации (гипотеза плоских сечений);
- радиусы поперечных сечений, поворачиваясь на некоторый угол φ , остаются прямыми.

Справедливость этих допущений подтверждена экспериментальными и точными решениями, полученными методами теории упругости.

Таким образом, при кручении возникают только касательные напряжения τ , прямо пропорциональные расстоянию от центра до точки сечения и направленные перпендикулярно радиусу – вектору ρ (расстоянию от центра сечения до рассматриваемой точки) данной точки. В центре сечения касательные напряжения равны нулю, а у поверхности имеют максимальное значение.

Величину касательных напряжений можно найти интегрированием моментов по площади сечения стержня (рисунок 5.1).

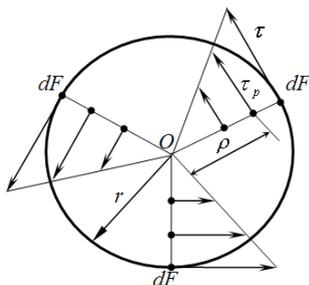


Рисунок 5.1 – Эпюра касательных напряжений при кручении

Усилие, приложенное к элементарной площадке dF , равно $dP = \tau_\rho dF$, а его момент относительно центра сечения равен:

$$dM_k = \tau_\rho \cdot \rho \cdot dF . \quad (5.1)$$

Крутящий момент M_k найдем интегрированием:

$$M_k = \int_F \tau_\rho \rho \cdot dF . \quad (5.2)$$

Рассматривая напряжённое состояние в сечении вала как чистый сдвиг, можно записать

$$\tau = G \cdot \gamma , \quad (5.3)$$

где $\gamma = r \frac{d\varphi}{dx}$ – угол сдвига на поверхности вала ($\rho = r$), а $\frac{d\varphi}{dx}$ – производная от угла закручивания вала по его длине (относительный угол закручивания).

В точке, находящейся на расстоянии ρ от центра, относительный угол закручивания равен:

$$\gamma_{\rho} = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$

Формула (5.3) для напряжений в этой точке получит вид

$$\tau_{\rho} = \rho \cdot G \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.4)$$

Подставляя эту формулу в (5.2), получим:

$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 dF = M_k. \quad (5.5)$$

Обозначим $\int_F \rho^2 dF = J_p$ – полярный момент инерции сечения.

Из (5.5) после подстановки J_p найдем относительный угол закручивания θ :

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{G \cdot J_p}. \quad (5.6)$$

Далее подстановкой (5.6) в (5.4) найдем закон распределения τ по радиусу при кручении круглого стержня:

$$\tau_p = \frac{M_k}{J_p} \cdot \rho. \quad (5.7)$$

Наибольшего значения напряжения достигают у поверхности вала (для вала круглого сплошного сечения):

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{J_p} \cdot r.$$

Эту формулу принято записывать в виде:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (5.8)$$

5.3 Расчет брусев на прочность и жесткость при кручении

Условие прочности вала (или участка вала) при кручении (с $M = \text{const}$ по длине вала) имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau]. \quad (5.9)$$

Допускаемое напряжение при чистом кручении для большинства сталей принимают равными $[\tau] = (0,55 \div 0,60) \cdot [\sigma]$. Здесь $[\sigma]$ – допускаемое напряжение при растяжении.

Как известно, при кручении происходит взаимный поворот соседних сечений и угол этого поворота φ называется углом закручивания. При расстоянии между сечениями, равном l , угол закручивания будет равен:

$$\varphi = \int_0^l \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_0^l \frac{M_k}{G \cdot J_p} dx, \quad (5.10)$$

Если $M_k = \text{const}$ по длине участка, то

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p}. \quad (5.11)$$

Величину GJ_p называют жесткостью при кручении. Она отражает влияние геометрии сечения и упругих свойств материала на деформируемость вала.

Полный угол закручивания вала можно получить алгебраическим суммированием углов закручивания на участках. Величина полного угла закручивания необходима для проверки вала на жесткость. Условие жесткости круглого вала при кручении имеет вид:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p} \leq [\varphi], \quad (5.12)$$

где $[\varphi]$ – допускаемый угол закручивания вала.

Очевидно, что для вала (или участка вала) с постоянным по длине M_k , условию жесткости (5.12) можно придать следующий вид:

$$\theta_{\max} = \frac{M_k}{G \cdot J_p} \leq [\theta]. \quad (5.13)$$

Таким образом, требуемый диаметр вала необходимо определять из условия прочности и условия жесткости вала.

Контрольные вопросы

1. Определение напряжений при кручении.
2. Определение деформаций при кручении.
3. Расчет на прочность по допускаемым напряжениям при кручении.
4. Расчет на жесткость при кручении.

ТЕМА 6. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

6.1 Понятие о деформации изгиба.

Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил

Поперечный изгиб стержня возникает при действии на него сил, перпендикулярных его оси лежащих в плоскости симметрии стержня, или пар сил, плоскости которых проходят через ось. Стержень при таком нагружении принято называть балкой.

Деформация изгиба состоит в том, что ось балки искривляется, поперечные сечения балки наклоняются друг к другу, волокна балки удлиняются с выпуклой стороны и укорачиваются с вогнутой. Слой, в котором волокна не меняют своей длины, называется нейтральным слоем. Прямая, по которой нейтральный слой пересекается с поперечным сечением, называется нейтральной осью.

Воздействия от других тел или элементов конструкции и возникающие при этом реакции опор являются внешними силами балки (нагрузками).

Выделяют три основных вида опор балок:

- шарнирно-неподвижная опора (опора A , рисунок 6.1);
- шарнирно-подвижная опора (опора B , рисунок 6.1);
- защемление (рисунок 6.2).

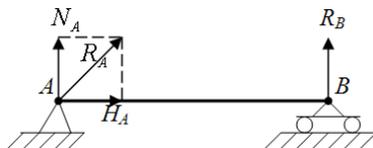


Рисунок 6.1 – Шарнирно-неподвижная и шарнирно-подвижная опоры

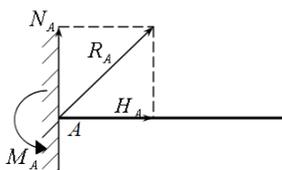


Рисунок 6.2 – Защемление

Для определения напряжений в сечениях балки необходимо выражать внутренние силы в сечении через внешние.

При изгибе балки в любом её поперечном сечении возникают элементарные касательные и нормальные усилия, которые приводятся к силе Q и паре с моментом M . Для их определения применяют метод сечений.

Сила Q складывается из элементарных касательных усилий и называется поперечной силой – численно равной алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на плоскость самого сечения.

Правило знаков при определении поперечной силы представлено на рисунке 6.3

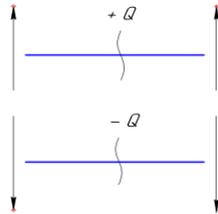


Рисунок 6.3 – Определение знака поперечной силы

Момент внутренних сил M складывается из моментов элементарных нормальных усилий и называется изгибающим моментом – в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно поперечной оси сечения.

Правило знаков при определении изгибающего момента представлено на рисунке 6.4

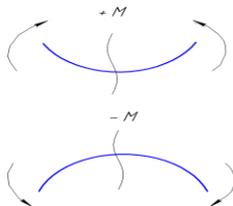


Рисунок 6.4 – Определение знака изгибающего момента

Графики распределения перерезывающих сил и изгибающих моментов по длине балки называют эпюрами. При построении эпюры Q и M балку разбивают на участки. Границами участков являются точки приложения сосредоточенных сил, сосредоточенных моментов, начала и конца распределенной по длине балки нагрузки.

На каждом участке берут произвольное сечение и составляют аналитические выражения для Q и M .

Для построения эпюры на данном участке достаточно получить две точки – в начале и в конце участка. Подставив в найденные выражения Q и M абсциссу начала и конца участка, определяют их величины.

Положительные значения Q и M откладывают вверх от оси эпюры, отрицательные вниз. Эпюра M получается построенной со стороны сжатых волокон.

Между изгибающим моментом M , поперечной силой Q и интенсивностью распределённой нагрузки q установлены (Д. И. Журавским) следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x), \quad \frac{dQ(x)}{dx} = q, \quad \text{или} \quad \frac{dQ(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = q. \quad (6.1)$$

Проверку эпюр Q и M осуществляют на основании правил, вытекающих из дифференциальных зависимостей:

– на участках балки, где нет распределенной нагрузки, эпюра Q ограничена горизонтальной прямой, а эпюра M – наклонной прямой;

– на участках балки с равномерно распределенной нагрузкой эпюра Q ограничена прямой наклоненной линией, а эпюра M – параболой. При этом: а) наклон эпюры Q идет в сторону действия нагрузки; б) выпуклость параболы обращена в сторону, противоположную направлению действия нагрузки;

- на участках балки с положительной Q момент возрастает, а на участках, где Q отрицательна– убывает;
- в сечениях, где Q меняет знак, изгибающий момент имеет экстремальное значение;
- в сечении, где приложена сосредоточенная сила на эпюре Q будет «скачок» на величину и в направлении приложенной силы, а на эпюре M – излом графика;
- в сечении, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре M получается «скачок» на величину момента;
- если на участке поперечная сила равна нулю, то эпюра M ограничена горизонтальной прямой.

6.2 Нормальные напряжения при изгибе

Если система внешних сил, приложенных к балке, приводится к парам сил, то есть поперечные силы в сечениях отсутствуют, то деформация балки называется чистым изгибом (рисунок 6.5). При чистом изгибе в сечениях балки действуют только нормальные напряжения σ .

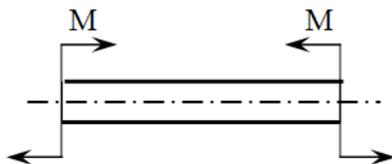


Рисунок 6.5 – Пример чистого изгиба

Практически чистый изгиб осуществим только при условии, что собственный вес балки мал по сравнению с внешними нагрузками.

В основу теории чистого изгиба положены следующие предположения (допущения):

1. При чистом изгибе плоские поперечные сечения остаются плоскими (гипотеза плоских сечений).
2. Продольные волокна друг на друга не давят и испытывают простое линейное растяжение или сжатие.

3. Деформации волокон и, следовательно, нормальные напряжения изменяются только по высоте сечения (по ширине сечения остаются постоянными).

Кроме того, вводят следующие ограничения:

1. Балка имеет плоскость симметрии, и все внешние силы лежат в этой плоскости.

2. Материал балки подчиняется закону Гука, причём модуль упругости при растяжении и сжатии одинаков.

3. Соотношения между размерами балки обеспечивают условия плоского изгиба, при котором ось балки остаётся в плоскости действия внешних сил.

Для отыскания нормальных напряжений при изгибе применяют метод сечений. Балку, подвергающуюся чистому изгибу парами M (рисунок 6.6), разрежем сечением 1-1 и рассмотрим равновесие, например левой части (рисунок 6.7).

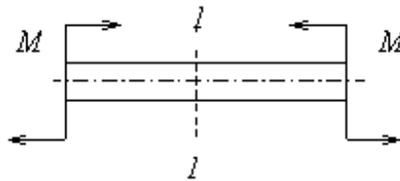


Рисунок 6.6 – Балка, подвергающаяся чистому изгибу парами M

Плоскость координат xoy совместим с нейтральным слоем, положение которого пока неизвестно. Ось z направим вниз по линии пересечения плоскости симметрии с плоскостью 1-1.

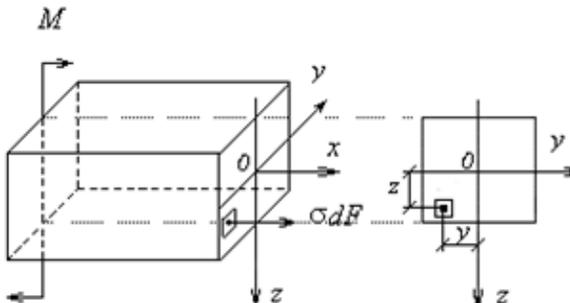


Рисунок 6.7 – Сечение балки при чистом изгибе

Для равновесия пространственной системы сил можно записать шесть известных уравнений статики:

$$\sum Y = 0, \sum Z = 0, \sum M_x = 0. \quad (6.2)$$

$$\sum X = 0, \int_F \sigma dF = 0, \quad (6.3)$$

$$\sum M_y = 0, \int_F \sigma z dF = M, \quad (6.4)$$

$$\sum M_z = 0, \int_F \sigma y dF = 0. \quad (6.5)$$

Для определения закона распределения σ по высоте сечения и положения нейтральной оси рассмотрим деформацию балки. Выделим элемент балки длиной dx и установим его вид после деформации (рисунок 6.8).

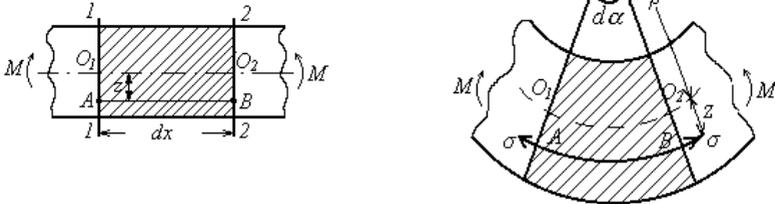


Рисунок 6.8 – Элемент балки, подверженный действию момента M

Найдём удлинение волокна AB лежащего на расстоянии z от нейтрального слоя. Первоначальная длина l волокна AB равна O_1O_2 , или $l = \rho d\alpha$, где ρ – радиус кривизны нейтрального слоя.

После деформации длина волокна измеряется по дуге AB :

$$l + \Delta l = (\rho + z) d\alpha.$$

Отсюда абсолютное и относительное удлинения Δl и ϵ :

$$\Delta l = (\rho + z) d\alpha - \rho d\alpha = z d\alpha;$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon = \frac{z}{\rho}. \quad (6.6)$$

Таким образом, относительные удлинения волокон пропорциональны их расстояниям до нейтрального слоя.

Исходя из гипотезы об отсутствии давления волокон друг на друга и закона Гука, заключаем, что каждое волокно испытывает простое растяжение (сжатие) под действием нормальных напряжений

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{E \cdot z}{\rho}. \quad (6.7)$$

На нейтральной оси (при $z=0$) $\sigma=0$. При переходе в сжатую зону ($z<0$) σ меняют знак вместе с z (становятся сжимающими). Наибольшего значения σ достигают при $z = z_{max}$, то есть в крайних волокнах (рисунок 6.9).

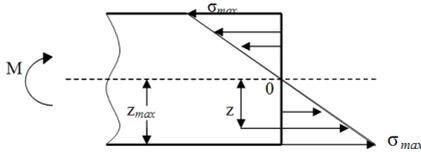


Рисунок 6.9 – Эпюра нормальных напряжений при изгибе

Подставим σ (6.7) в уравнение (6.3) и получим:

$$\int_F \sigma dF = \int_F \frac{E}{\rho} z dF = 0.$$

При $\frac{E}{\rho} = const$ имеет место $\int_F \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_F z dF = 0.$

$$\int_F z \cdot dF = S_y = 0. \quad (6.8)$$

Этот интеграл (S_y) является статическим моментом площади сечения относительно нейтральной оси y . Его равенство нулю означает, что нейтральная ось является центральной (проходит через центр тяжести сечения). Таким образом, положение нейтральной оси и нейтрального слоя определено.

Подставим σ (6.7) в уравнение (6.5) и получим:

$$\int_F \sigma \cdot y \cdot dF = \frac{E}{\rho} \int_F y \cdot z \cdot dF = 0,$$

$$\int_F y \cdot z \cdot dF = J_{yz} = 0. \quad (6.9)$$

Этот интеграл (J_{yz}) называется центробежным моментом инерции относительно осей y и z . Для сечения, симметричного относительно оси z он равен нулю. Этим подтверждается, что соблюдены требования плоского изгиба о наличии плоскости симметрии балки и расположении внешних сил в этой плоскости.

Заметим, что оси, относительно которых центробежные моменты инерции равны нулю, называются главными осями инерции сечения.

Наконец, подставим σ (6.7) в уравнение (6.4) и получим:

$$\int_F \sigma \cdot z \cdot dF = M, \quad \frac{E}{\rho} \int_F z^2 \cdot dF = M,$$

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M}{J_y}, \quad (6.10)$$

Здесь $J_y = \int_F z^2 \cdot dF$ есть осевой момент инерции площади сечения относительно нейтральной оси y .

Подставим (6.10) в (6.7) и получим формулу для вычисления σ при чистом изгибе:

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{J}. \quad (6.11)$$

Индекс y опущен, так как J всегда вычисляется относительно нейтральной оси сечения.

Из (6.10) можно записать $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$. Отсюда следует, что произведение EJ характеризует способность балки сопротивляться искривлению (изгибу) в зависимости от формы и размеров сечения и материала балки. Величину EJ называют жесткостью балки при изгибе.

Формулу максимальных напряжений в сечении балки $\sigma_{max} = \frac{M}{J} z_{max}$ принято записывать в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W}, \quad (6.12)$$

где $W = \frac{J}{z_{max}}$ – осевой момент сопротивления сечения.

Для проверки прочности балки по нормальным напряжениям необходимо найти опасное сечение (т.е. где $M = M_{max}$). Тогда условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (6.13)$$

Из условия прочности следует, что осевой момент сопротивления W характеризует влияние формы и размеров сечения балки на её прочность.

Если материал балки неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то составляют два условия прочности:

$$\sigma_p = \frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma_p] \text{ и } \sigma_{сж} = \frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma_{сж}]. \quad (6.14)$$

6.3 Касательные напряжения при изгибе

Рассмотрим общий случай прямого изгиба, когда в сечениях балки наряду с изгибающими моментами M действуют также перерезывающие силы Q , которые вызывают касательные напряжения τ . Относительно τ сделаем следующие предположения:

1) направления τ параллельны силе Q , которая является их равнодействующей;

2) касательные напряжения на площадках, расположенных на равных расстояниях от нейтральной оси равны между собой.

В теории упругости доказано, что эти предположения (предложенные Д. И. Журавским) вполне приемлемы для балок прямоугольного сечения.

При выводе формулы для касательных напряжений (τ) мы использовали закон для нормальных напряжений (σ), полученный при чистом изгибе. Правомерность такого подхода объясняется весьма слабым влиянием τ на картину чистого изгиба.

Действие касательных напряжений порождает сдвиг, который заставляет сечения балки искривляться. Однако пока поперечная сила остается постоянной по длине, искривление всех сечений получается одинаковым и не влияет на деформации растяжения (или сжатия) продольных волокон.

В случае, когда на балку действует распределённая нагрузка, и величина поперечной силы непрерывно меняется по длине балки, искривление поперечных сечений также не оказывает существенного влияния на деформации продольных волокон от действия изгибающего момента.

Следует иметь в виду, что чаще всего балка прямоугольного сечения, в которой нормальные напряжения ниже допустимых, оказывается недогруженной по касательным напряжениям. Однако в частном случае, когда при большой поперечной силе изгибающий момент невелик, величина касательных напряжений может определять требуемые размеры балки.

Условие прочности балки по касательным напряжениям в общем случае имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}^0}{J \cdot b(z)} \leq [\tau]. \quad (6.20)$$

где Q_{\max} – поперечная сила в опасном сечении;

S_{\max}^0 – максимальное значение статического момента,

определяющее τ_{\max} по высоте сечения;

$b(z)$ – ширина сечения в том слое, для которого вычисляются напряжения.

Выведенная формула впервые была получена Д. И. Журавским и носит его имя. Несмотря на то, что положенные в основу ее вывода гипотезы справедливы только для узких прямоугольных сечений (при $\frac{h}{b} > 2$), на практике ею можно пользоваться для любых сечений, кроме тех мест в сечении, где имеются узкие прямоугольники, расположенные перпендикулярно к Q (полки двутавра, швеллера и т.д.)

Контрольные вопросы

1. Внутренние силовые факторы при изгибе.
2. Дифференциальные зависимости при изгибе.
3. Величина нормальных напряжений при изгибе. Касательные напряжения при изгибе.
4. Расчет на прочность по допускаемым напряжениям при изгибе.

ТЕМА 7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

7.1 Общие положения

Сложным сопротивлением называются виды нагружения, при которых в поперечных сечениях одновременно действуют несколько внутренних силовых факторов.

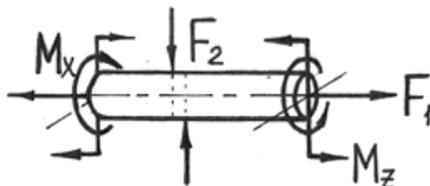


Рисунок 7.1 – Пример нагружения стержня при сложном сопротивлении

Сложный вид деформации можно рассматривать как сумму простых видов (растяжение, изгиб, кручение), при которых в сечениях элементов конструкций возникал только один внутренний силовой фактор: нормальная сила N – при растяжении, крутящий момент M_x – при кручении, изгибающий момент M_z – при чистом изгибе.

При сложном сопротивлении должен быть применен принцип независимости действия сил: напряжение (деформация) от группы сил равно сумме напряжений (деформаций) от каждой силы в отдельности). Он справедлив, если функция и аргументы связаны линейной зависимостью.

Например, дифференциальное уравнение изгиба стержня является нелинейным и вытекающая из него зависимость прогиба f от нагрузки P для консольной балки, изображенной на рисунке 7.2а, также является нелинейной (рисунок 7.2б). Однако, если прогибы балки невелики ($f \ll l$) настолько, что $(dv/dz)^2 \ll 1$ (так как $dv/dz \approx f/l$), то дифференциальное уравнение изгиба становится линейным (как видно из рисунка 7.2б, начальный участок зависимости P от f , описываемый этим уравнением, также является линейным).

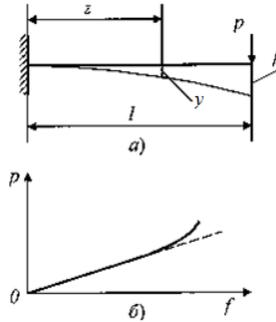


Рисунок 7.2– Модели изгиба балки:
а – расчетная схема; б – линейное и нелинейное сопротивление

Задачи на сложное сопротивление решаются следующим образом: определяются напряжения и деформации при действии простейших видов деформации, составляющих сложное сопротивление, а затем полученные результаты суммируют, используя при необходимости теории прочности.

7.2 Расчет балки, подверженной косому или пространственному изгибу

Косым называют изгиб, при котором плоскость действия изгибающего момента, возникающего в сечении, не совпадает ни с одной из главных плоскостей бруса (при этом плоскость действия изгибающего момента обязательно должна проходить через центр тяжести сечения) (рисунок 7.3).

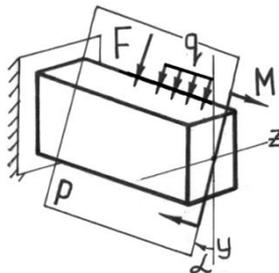


Рисунок 7.3 – Брус, подверженный действию косоуго изгиба

При косом изгибе изогнутая ось представляет собой плоскую кривую, и плоскость, в которой она расположена, не совпадает с плоскостью действия нагрузки.

При пространственном изгибе нагрузка приложена в разных плоскостях, деформированная ось является пространственной кривой.

7.3 Определение внутренних усилий при косом изгибе

При косом изгибе в поперечных сечениях бруса действуют следующие внутренние усилия: M_z , M_y – изгибающие моменты и Q_y , Q_z – поперечные (перерезывающие) силы (рисунок 7.4).

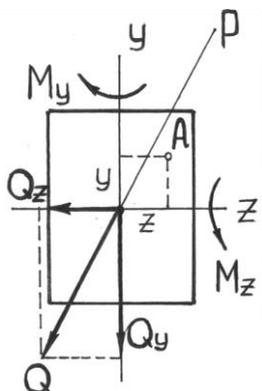


Рисунок 7.4 – Внутренние усилия при косом изгибе стержня

Правило знаков для внутренних усилий: изгибающие моменты – положительны, если вызывают растяжение в положительном квадранте координатной системы zOy ; поперечные силы – положительны, если под их действием отсеченный элемент поворачивается по часовой стрелке.

Таким образом, косой изгиб может быть представлен как совместное действие двух плоских изгибов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях инерции.

Для определения полного изгибающего момента M и полной поперечной силы Q при косом изгибе достаточно опреде-

лить внутренние усилия для каждого из плоских изгибов в отдельности (то есть Q_y, M_z и Q_z, M_y), а затем найти их векторную сумму:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}, \quad Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}$$

7.4 Определение напряжений при косом изгибе

Если разложить внешние силы по главным осям инерции Ox и Oy , то получим две системы сил $P_{1x}, P_{2x}, \dots, P_{nx}$ и $P_{1y}, P_{2y}, \dots, P_{ny}$, каждая из которых вызывает прямой изгиб с изгибающими моментами соответственно M_y и M_x (рисунок 7.5). Применяя принцип независимости действия сил, нормальные напряжения σ (рисунок 7.6) определим как алгебраическую сумму напряжений от M_x и M_y :

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x$$

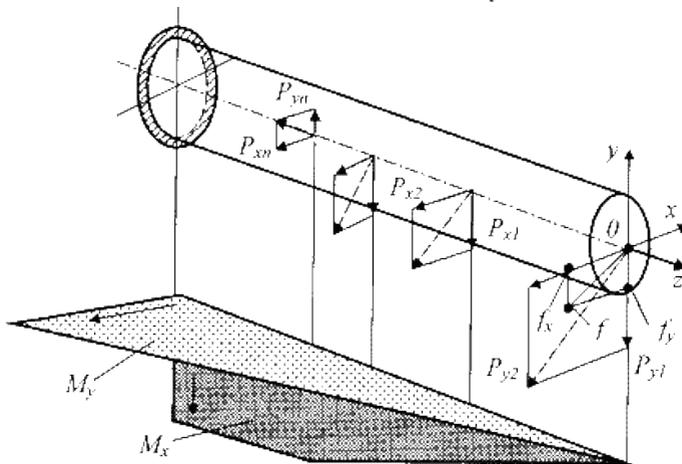


Рисунок 7.5 – Расчетная модель косоуго изгиба бруса

Чтобы не связывать себя формальными правилами знаков, слагаемые будем определять по модулю, а знаки ставить по смыслу.

Таким образом, расчет на кривой изгиб с применением принципа независимости действия сил сводится к расчету на два прямых изгиба с последующим алгебраическим суммированием напряжений.

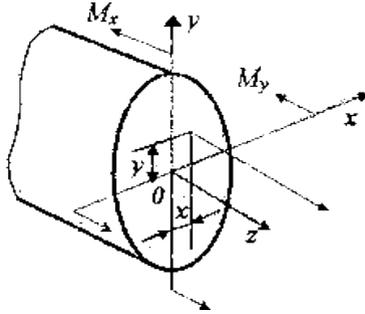


Рисунок 7.6 – Связь нормального напряжения с внутренними изгибающими моментами

В случае поперечных сечений, имеющих две оси симметрии и выступающие угловые точки А, В, С и т.д. (например, прямоугольник, двутавр, полый прямоугольник и др.) с равными по модулю и максимальными одноименными координатами напряжения в этих точках будут равны:

$$\sigma_{A,B,C,\dots n} = \pm \frac{M_x}{I_x} y_{max} \pm \frac{M_y}{I_y} x_{max} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}. \quad (7.1)$$

Слагаемые в этом выражении рекомендуется определять по модулю, а знаки ставить по смыслу.

Условие прочности для балок из пластичного материала с указанным типом сечений запишется в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (7.2)$$

Касательные напряжения от поперечных сил, если нельзя воспользоваться формулой Журавского, допустимо не учитывать.

При проведении расчетов на прочность условие прочности составляется для опасной точки поперечного сечения, т.е.

для точки, в которой нормальные напряжения достигают максимальных значений. Самой нагруженной точкой в сечении произвольной формы является точка, наиболее удаленная от нейтральной линии, разделяющей растянутую и сжатую зоны сечения.

Положения нейтральной линии определим из уравнения 7.1 положив $\sigma = 0$:

$$\pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} = 0 \quad .$$

Так как напряжения в точках поперечного сечения будут пропорциональными расстояниям от нейтральной линии, то σ_{\max} будут возникать в наиболее удаленных от нее точках.

Силовая плоскость – это плоскость действия результирующего момента $M_{рез}$ (рисунок 7.7) (φ – угол наклона силовой плоскости к вертикали, α – угол наклона нейтральной линии к горизонтали):

$$\begin{aligned} M_{рез} &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad , \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{M_y}{M_x} \quad , \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{J_x}{J_y} \quad . (7.3) \end{aligned}$$

Свойства нейтральной линии:

1) если $J_x \neq J_y$, то $\alpha \neq \varphi$, т. е. силовая плоскость и нейтральная линия не являются перпендикулярными;

2) если $J_x = J_y$, то из (7.3) $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi$, то есть нейтральная линия и силовая плоскость перпендикулярны. В этом случае стержень испытывает плоский изгиб (примерами являются стержни с сечением – круг, кольцо, квадрат);

3) знак «минус» в формуле (7.3) указывает, что силовая плоскость и нейтральная линия при косом изгибе проходят через противоположные квадранты.

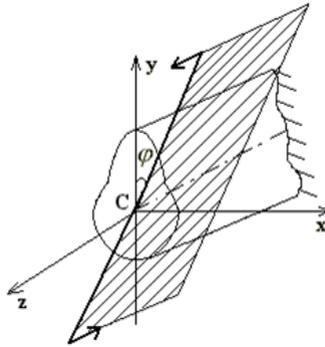


Рисунок 7.7 – Силовая плоскость

Для определения опасных точек сечения следует построить касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной линии. Точки касания и будут являться опасными. Для некоторых сечений (прямоугольник, двутавр, швеллер и т.п.) наиболее напряженные точки расположены в углах этих сечений.

Условия прочности составляют в зависимости от свойств того материала, из которого изготовлен элемент конструкции (брус). Для хрупкого материала используют два условия прочности – для опасной точки, где имеет место растяжение, и для точки, где имеет место сжатие. Для пластичного материала используют одно условие прочности для точки поперечного сечения, где имеют место максимальные по абсолютной величине нормальные напряжения.

Порядок проверки прочности балки, работающей в условиях косоугольного или пространственного изгиба, аналогичен, что и для балки, работающей при плоском поперечном изгибе.

При расчетах на прочность касательными напряжениями от поперечных сил пренебрегают, так как их влияние незначительно.

7.5 Определение перемещений при косом изгибе

Перемещения при косом изгибе определяют по принципу независимости действия сил, т.е. рассчитывают прогибы Δ_z и Δ_y в направлении главных осей, а величину полного прогиба в любом сечении балки получают геометрическим суммированием:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_z^2 + \Delta_y^2}.$$

Направление полного перемещения ($tg \varphi$) определится величиной отношения Δ_z/Δ_y (рисунок 7.8):

$$tg \varphi = \frac{J_z}{J_y} \cdot tg \alpha,$$

где α – угол наклона силы P по отношению к вертикали, град.



Рисунок 7.8 – Перемещение при косом изгибе

7.6 Внецентренное сжатие или растяжение

Внецентренным растяжением-сжатием называется случай, когда равнодействующая сил, приложенных к отброшенной части стержня, направлена параллельно оси стержня, но не совпадает с этой осью, а проходит через точку, называемую полюсом силы. Расстояние от полюса силы до центра тяжести сечения называется эксцентриситетом.

При приведении этой силы в центр тяжести сечения, в поперечном сечении стержня при внецентренном растяжении и сжатии возникают три внутренних силовых фактора: нор-

мальная сила N и два изгибающих момента M_{x_c} и M_{y_c} относительно главных центральных осей поперечного сечения (рисунок 7.10).

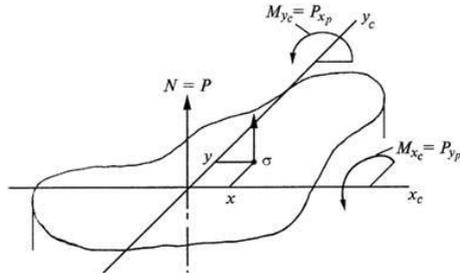


Рисунок 7.10 – Приведение действующей силы к центру тяжести сечения

Для вычисления нормального напряжения в поперечном сечении в окрестности точки с произвольными координатами x, y воспользуемся принципом независимости действия сил. Будем вычислять нормальное напряжение от каждого внутреннего силового фактора в отдельности и результат сложим:

$$\sigma(x, y) = \frac{N}{F} + \frac{M_{x_c}}{J_{x_c}} y + \frac{M_{y_c}}{J_{y_c}} x. \quad (7.4)$$

Если все три внутренних силовых фактора зависят от внецентренно приложенной силы P (рисунок 7.10), то получим:

$$\sigma(x, y) = \frac{P}{F} + \frac{P y_p y}{J_{x_c}} + \frac{P x_p x}{J_{y_c}}. \quad (7.5)$$

Вынесем за скобки величину $\sigma = P / F$:

$$\sigma(x, y) = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p y F}{J_{x_c}} + \frac{x_p x F}{J_{y_c}} \right).$$

Введем понятие о радиусе инерции, тогда:

$$\sigma(x, y) = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p y}{i_{x_c}^2} + \frac{x_p x}{i_{y_c}^2} \right). \quad (7.6)$$

Мы получили формулу нормальных напряжений в поперечном сечении при внецентренном растяжении или сжатии. Если сила растягивающая, то перед скобкой ставится знак плюс, если сила сжимающая, то ставится – минус.

В этой формуле координаты точки, где определяются напряжения, входят в первой степени. Следовательно, если величины напряжений откладывать в масштабе в виде аппликата перпендикулярно плоскости поперечного сечения, то концы этих отрезков будут лежать на плоскости, наклоненной к плоскости поперечного сечения. Будем называть эту плоскость плоскостью напряжений. Известно, что две наклоненные плоскости пересекаются по линии. В нашем случае в точках этой линии $\sigma = 0$ – это нулевая линия, которая описывается уравнением:

$$1 + \frac{y_p y}{i_{x_c}^2} + \frac{x_p x}{i_{y_c}^2} = 0. \quad (7.7)$$

Анализируя (7.7) получаем, что нейтральная линия при внецентренном растяжении и сжатии не проходит через центр тяжести, а отсекает на главных центральных осях отрезки a_{x_c} и a_{y_c} . Полагая последовательно в (7.7) $x=0$ и $y=0$, получим:

$$a_{x_c} = -\frac{i_{y_c}^2}{x_p}, \quad a_{y_c} = -\frac{i_{x_c}^2}{y_p}. \quad (7.8)$$

Из формул (7.8) следуют некоторые закономерности, связывающие положения полюса (т. е. точки приложения силы) и нейтральной линии:

- нейтральная линия всегда расположена в квадранте, противоположном тому, в котором находится полюс;
- если полюс находится на одной из главных осей, то нейтральная линия перпендикулярна этой оси;
- если полюс приближается к центру тяжести сечения, то нейтральная линия удаляется от него;
- если полюс движется по прямой линии, то нейтральная линия поворачивается вокруг неподвижной точки.

При внецентренном растяжении кроме растягивающих нормальных напряжений в поперечном сечении могут возникнуть и сжимающие. При внецентренном сжатии – наоборот.

Наиболее напряженные точки в растянутой и сжатой зонах сечения обозначим как А и В соответственно, тогда напряжения в этих точках и условия прочности имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} = \sigma_A &= \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_P \cdot y_A}{i_{x_C}^2} + \frac{x_P \cdot x_A}{i_{y_C}^2} \right) \leq [\sigma_p], \\ \sigma_{min} = \sigma_B &= \frac{P}{F} \left(1 - \frac{y_P \cdot y_B}{i_{x_C}^2} - \frac{x_P \cdot x_B}{i_{y_C}^2} \right) \leq [\sigma_c],\end{aligned}\tag{7.9}$$

где $y_A, x_A, -y_B, -x_B$ – координаты точек А и В.

7.7 Ядро сечения при внецентренном сжатии

Ядро сечения это некоторая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой можно располагать точку приложения силы P , не вызывая в сечении напряжений разного знака.

При приложении силы P в точке на границе ядра сечения с координатами $(x_p; y_p)$ нулевая линия будет касательной к контуру поперечного сечения в точке В (рисунок 7.11) и отсекает на главных центральных осях отрезки a_{x_C} и a_{y_C} .

Применяя (7.8), получим:

$$x_p = -\frac{i_{y_C}^2}{a_{x_C}}, y_p = -\frac{i_{x_C}^2}{a_{y_C}}.\tag{7.10}$$

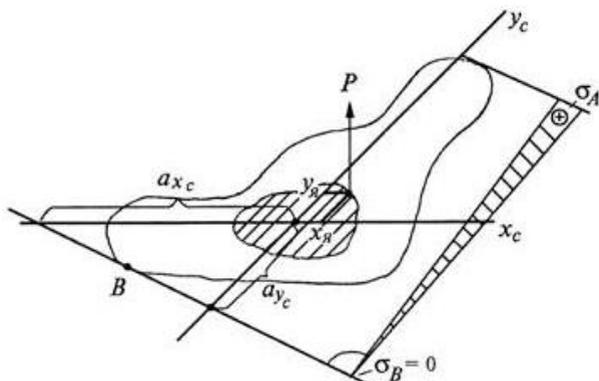


Рисунок 7.11 – Положение нейтральной линии при приложении силы на границе ядра сечения

Алгоритм вычисления координат точек границы ядра:

1) проводится касательная к контуру поперечного сечения и определяются отрезки a_{x_c} и a_{y_c} ;

2) по формуле (7.10) определяются координаты $x_{я}$ и $y_{я}$.

Для сложного криволинейного контура, чем больше будет проведено касательных, тем точнее будет найден контур ядра сечения.

Если контур поперечного сечения представляет собой многоугольник, то контур ядра сечения тоже будет иметь форму многоугольника, но необязательно с тем же количеством углов (их может быть меньше).

Контрольные вопросы

1. Косой изгиб. Внецентренное сжатие.
2. Напряжения при косом изгибе
3. Что такое силовая плоскость?
4. Свойства нейтральной линии.

ТЕМА 8. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

8.1 Общие положения

Под устойчивостью упругого тела понимают его способность сохранять состояние равновесия при внешних относительно малых воздействиях (возмущениях).

Упругое равновесие тела называют устойчивым, если тело, будучи выведенным из него, возвращается в исходное состояние после снятия нагрузки.

Упругое равновесие тела называют неустойчивым, если тело, будучи выведенным из него, в исходное состояние не возвращается.

Безразличная форма равновесия наступает когда тело может сохранять исходное состояние, но может и потерять его при незначительном воздействии.

Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости исходной формы равновесия тела, называется критической ($P_{кр}$).

Следует иметь в виду, что потеря устойчивости (и разрушение) может наступить при напряжениях, существенно меньших тех, которые допускаются по условию прочности.

Задачу об устойчивости сжатого упругого стержня называют задачей Эйлера. На основе исследований было получено выражение, носящее его имя (формула Эйлера (8.1)), которое выражает нагрузку, способную удержать в равновесии слегка искривленный стержень. Теоретически эта нагрузка имеет целый ряд значений ($n=1,2,3$).

$$P_{кр} = n^2 \frac{\pi^2 EJ}{(\mu \cdot l)^2}. \quad (8.1)$$

Однако с практической точки зрения интересно знать наименьшее значение силы P , поэтому следует принять $n=1$. Таким образом в общем случае критическая сила по теории Эйлера определяется из выражения:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}. \quad (8.2)$$

где μ – коэффициент длины, отражающий влияние условий закрепления;

μl – приведенная длина стержня.

Подставим в формулу (8.2) $J = i^2 F$, разделим её на площадь поперечного сечения стержня F и получим формулу критических напряжений:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \quad \text{или} \quad \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i^2}{(\mu l)^2}.$$

Введём величину $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ – гибкость стержня:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (8.3)$$

Значения μ для различных условий опирания стержня приводятся в справочной литературе.

Из формулы (8.3) следует, что критические напряжения для стержня из данного материала с модулем E не зависят от прочности материала. Поэтому, для достаточно гибкого стального стержня ($\lambda > 100$) $\sigma_{кр}$ оказываются ниже предела пропорциональности σ_{nc} и определяют, таким образом, несущую способность стержня при сжатии.

Однако у стальных стержней с гибкостью меньше предельной ($\lambda < 100$) $\sigma_{кр}$ могут превышать σ_{nc} .

Опыты показали, что короткие стержни ($\lambda = 30 \div 40$) теряют несущую способность из-за потери прочности материала при сжатии, а не потери устойчивости формы.

Стержни средней гибкости, наиболее широко применяемые на практике, по данным опытов теряют несущую способ-

ность из-за потери устойчивости формы, но при напряжениях $\sigma_{нц} < \sigma_{кр} < \sigma_0$. Для проверки на устойчивость таких стержней применение формулы (8.3) недопустимо.

Для стержней, теряющих устойчивость за пределом упругости Ф. С. Ясинским предложена следующая эмпирическая формула:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (8.4)$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от материала.

Они подобраны так, чтобы при $\lambda = \lambda_{пред}$ напряжения $\sigma_{кр}$ равнялись $\sigma_{нц}$, а при малых λ напряжения $\sigma_{кр}$ мало отличались от опасных напряжений σ_0 .

8.2 Расчет сжатых стержней на устойчивость

Допускаемое напряжение в расчётах на устойчивость:

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y},$$

где n_y – коэффициент запаса устойчивости.

Условие устойчивости сжатого стержня имеет вид:

$$\sigma \leq [\sigma]_y, \quad (8.5)$$

где σ – действующие в стержне сжимающие напряжения.

Можно связать допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}$$

с допускаемым напряжением на прочность:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n_0}.$$

Из их отношения следует:

$$[\sigma]_y = \varphi \cdot [\sigma], \quad (8.6)$$

где $\varphi = \sigma_{кр} \frac{n_0}{\sigma_0 n_y}$ – коэффициент продольного изгиба,

учитывающий уменьшение допускаемого напряжения на прочность.

Для любого материала можно составить график или таблицу значений φ в функции от гибкости λ . Тогда условие устойчивости (8.5) с учетом (8.6) записывают в виде:

$$\frac{P}{\varphi F} \leq [\sigma]. \quad (8.7)$$

В проектировочном расчёте площадь сечения стержня F подбирают методом последовательных приближений при котором задаются значением φ в первом приближении ($\varphi = \varphi_1$) и по условию (8.7) находят площадь сечения F , а затем гибкость λ . По значению λ из таблицы находят фактическое значение φ'_1 . В качестве второго приближения для φ берут значение $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}$. Расчет ведется до достижения незначительного отличия φ_i от φ'_i . Как правило, для подбора сечения требуется не более трёх приближений.

Контрольные вопросы

1. Критическая сила. Формула Эйлера.
2. Четыре способа закрепления концов сжатого стержня. Пределы применимости формулы Эйлера.
3. Формула Ясинского.
4. Методика расчета сжатого стержня на устойчивость.

ТЕМА 9. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ

9.1 Понятие об усталостной прочности

Циклические нагрузки – это нагрузки, меняющиеся во времени.

Явление потери прочности при циклических нагрузках называется усталостью.

Усталость – процесс постепенного накопления поврежденный материала под действием переменных напряжений, приводящий к образованию трещин и разрушению.

Способность материала элемента конструкции сопротивляться усталостному разрушению, называется выносливостью или усталостной прочностью.

Предел выносливости – наибольшее напряжение цикла, при котором материал не разрушаясь может выдержать заданное число циклов, называемое базой N_6 .

– $N_6 - 10^7$ циклов – черные металлы;

– $N_6 - 10^8$ циклов – цветные металлы, легированные сплавы.

Долговечность – число циклов изменения напряжений до начала разрушения.

9.2 Характеристики циклического изменения напряжений

Переменные во времени напряжения в деталях машин могут быть получены самыми разными способами.

Рассмотрим, как изменяются нормальные напряжения в точке А консольного вращающегося вала (рисунок 9.1), нагруженного силой P неизменной по величине и направлению.

$$\sigma_A = \frac{M_z}{I_z} \cdot y, \quad (9.1)$$

$$y = \frac{d}{2} \cdot \sin \varphi = \frac{d}{2} \cdot \sin \omega t, \quad (9.2)$$

$$\sigma_A = \frac{M_z}{I_z} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin \omega t = \sigma_a \cdot \sin \omega t. \quad (9.3)$$

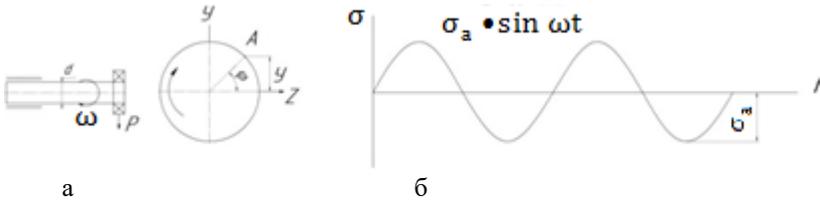


Рисунок 9.1 – Схема вала, нагруженного силой P (а); изменение напряжения по времени(б)

При нагружении вала дополнительной осевой силой P (рисунок 9.2), напряжение в точке A будет равно:

$$\sigma_A = \frac{P_1}{F} + \frac{M_z}{I_z} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin \omega t, \quad (9.4)$$

$$\sigma_A = \sigma_m + \sigma_a \cdot \sin \omega t. \quad (9.5)$$

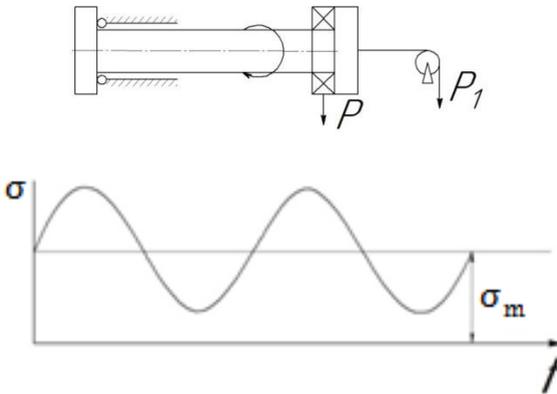


Рисунок 9.2 – Изменение напряжения при нагружении вала осевой силой

Циклическим напряжением называется совокупность всех последовательных значений напряжений за один период их изменения.

Опытами установлено, что усталостная прочность определяется только наибольшим и наименьшим напряжениями

цикла и не зависит от закона изменения внутри цикла (рисунок 9.3).

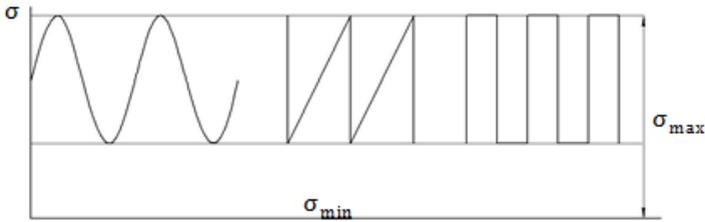


Рисунок 9.3 – Равновесные циклы

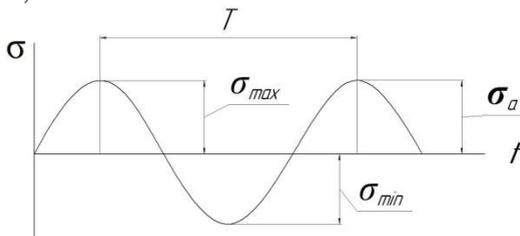
Циклы напряжений характеризуются следующими параметрами:

- амплитуда цикла – $\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$;
- постоянное или среднее напряжение цикла – $\sigma_a = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$;
- размах цикла – удвоенная величина амплитуды цикла;
- коэффициент асимметрии цикла (необходимо учитывать знак напряжений) – $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$;
- характеристика цикла – $\rho = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R}$.

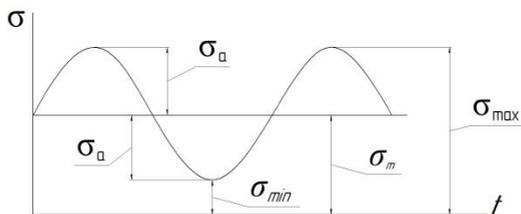
Циклы, имеющие одинаковые R называются подобными.

Различают следующие виды циклов:

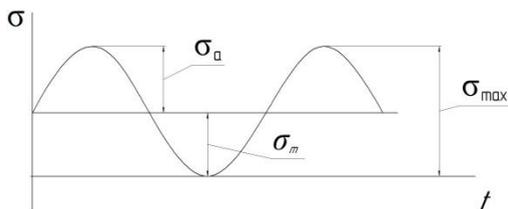
- а) симметричный цикл $\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \sigma_a$, $\sigma_m = 0$, $R = -1$, $\rho = \pm\infty$;



- б) асимметричный цикл $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$, $\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a$, $0 < R < 1$, $0 < \rho < 1$;



в) пульсирующий цикл $\sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_{max}}{2}$, $\sigma_{min} = 0$, $R = 0$, $\rho = +1$.



9.3 Механика усталостного разрушения

Усталостный процесс связан с неравномерной упругопластичной деформацией поликристаллических структур. Поэтому при изучении физической природы процесса усталостного разрушения металлы необходимо рассматривать не как сплошную, однородную среду, а как микро или макроскопически неоднородную. Конструкционные стали и другие сплавы представляют мелкокристаллическую структуру, кристаллы которой имеют произвольную ориентировку и обладают анизотропией. При деформировании напряженные состояния для отдельных кристаллов могут существенно отличаться. Поэтому уже на ранних стадиях деформирования возникают пластические деформации отдельных кристаллов.

Циклическое изменение напряжений приводит к накоплению пластических деформаций, что вызывает упрочнение (наклеп) кристаллов. При определенном уровне напряжения способность кристаллов к дальнейшему упрочнению исчерпывается. Нарушается их прочность, образуется микротрещина по одной из плоскостей скольжения. По достижении

накопления повреждений критического значения возникает макротрещина и процесс дальнейшего циклического разрушения определяется ее развитием. Окончательное хрупкое разрушение произойдет тогда, когда трещина достигнет критической величины:

$$e_k = \frac{K_{IC}^2}{\sigma_a^2 \cdot \pi}. \quad (9.6)$$

Трещина вызывает уже в упругой стадии резкую неравномерность: переход от линейного к плоскому и объемному напряженному состоянию. У дна трещины возникает объемное напряженное состояние (рисунок 9.4).

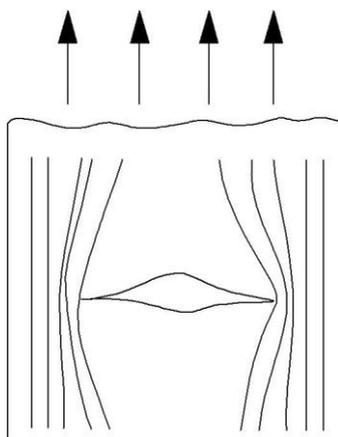


Рисунок 9.4 – Развитие трещины при циклическом изменении напряжений

Силовой поток, перерезанный трещиной как бы обтекает ее и вызывает концентрацию напряжений на концах трещины. Образование трещины связано с касательными (τ), а ее развитие с нормальными (σ) напряжениями.

Трещины усталости располагаются, как правило, по направлениям, перпендикулярным к наибольшим нормальным напряжениям (рисунок 9.5).

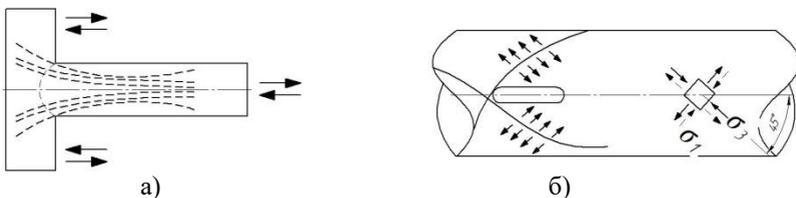


Рисунок 9.5 – Усталостное разрушение:
а – болта; б – шейки коленчатого вала

Прорастание усталостных трещин в поле траекторий нормальных напряжений

Представление о процессе развития трещины в зависимости от числа циклов перемены напряжений (N) дает график (рисунок 9.6).

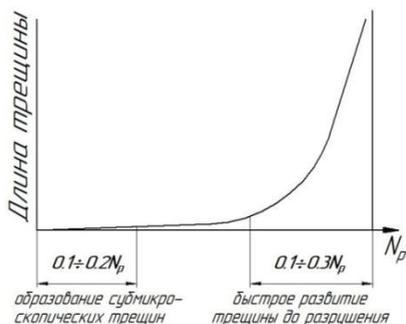


Рисунок 9.6 – График зависимости длины трещины от числа циклов перемены напряжений

Макроскопическая поверхность усталостного излома имеет две основные зоны: I – зона, образовавшаяся от циклического распространения трещины и имеющая мелкозернистый сглаженный характер; II – зона, возникшая при быстро протекающем окончательном разрушении – «долоте», имеющая крупнозернистый характер хрупкого излома.

Форма и соотношение площадей, занятых усталостной трещиной и окончательным изломом, зависит от формы сечения элемента, способа его циклического нагружения, наличия концентрации напряжений, а также от влияния среды.

Обнаружение трещин в производственных условиях

Деталь погружают на некоторое время в горячее масло, затем промывается ацетоном и покрывается слоем сухого мела или талька. Масло, проникшее в трещину, обнаруживает ее в виде темной полосы на белой поверхности.

Известен магнитный контроль. Деталь покрывается тонким слоем масла со взвешенными в нем железными опилками и помещается в магнитное поле. Опилки концентрируются в зоне трещины. Кроме того, известны акустический и ультразвуковой способы.

На практике так же применяют следующие методы:

- магнитный;
- флуоресцентный;
- травления детали кислотой;
- смачивания поверхности детали керосином с последующей меловой обмазкой;
- гидравлический;
- пневматический;
- нагрева детали;
- проверки электрической прочности детали.

Выбор того или иного метода дефектов обуславливается конфигурацией и материалом детали, а также вероятным расположением дефекта.

9.4 Кривая усталости. Предел выносливости

Опыты показывают, что усталостная трещина возникает только в том случае, если циклические напряжения превышают определенную границу – предел выносливости.

Пределом выносливости называется наибольшее напряжение цикла, при котором материал не разрушается выдержав заданное число циклов напряжения (N_0), называемое базой. Обозначается σ_R , τ_R . Это основная механическая характеристика выносливости материала. Определяется только экспериментально при симметричном цикле, как наиболее опасном

для материала (имеет самое низкое значение). Для испытаний используют машины в которых образец круглого сечения нагружается или как консоль – силой на конце или как шарнирно опертая балка – симметрично расположенными равными силами. При каждом обороте образца будут возникать напряжения растяжения и сжатия.

Испытания ведут в такой последовательности. Берут 8–10 образцов диаметром 7–10 мм с полированной поверхностью. Первый образец нагружают до значений σ_1 . Выдержав N_1 циклов он разрушается. По координатам σ_1 и N_1 на диаграмме зависимости « $\sigma-N$ » (рисунок 9.8) наносится точка 1. Затем испытывают второй образец при меньшем напряжении σ_2 . Естественно, что он разрушается после большего числа циклов N_2 . Получают точку 2 на диаграмме. Наконец, для какого то из образцов мы не получим излома даже при очень большом числе циклов. Это напряжение будет близким к σ_R . Кривая характерна тем, что начиная с некоторого напряжения идет практически горизонтально.

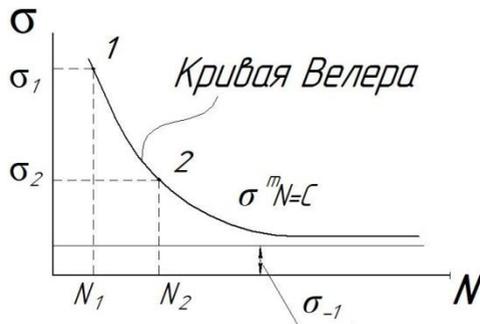


Рисунок 9.8 – Диаграмма зависимости « $\sigma-N$ »

Как показывает опыт, образец из углеродистой стали, выдержав 10^7 циклов, может выдержать их неограниченное число. Поэтому $N_{равное} 10^7$ ($N = 10^7$) есть база испытаний. Для аналитического описания зависимости σ от N чаще всего применяют выражение степенного типа:

$$\sigma^m \cdot N = C, \quad (9.7)$$

где m – число измерений;
 C – постоянная величина.

Параметры m и C различны для левой и правой части. Часто кривую строят в логарифмических координатах (рисунок 9.9). В итоге получаем уравнение ниспадающей ветви:

$$m \cdot \log \sigma + \log N = C. \quad (9.8)$$

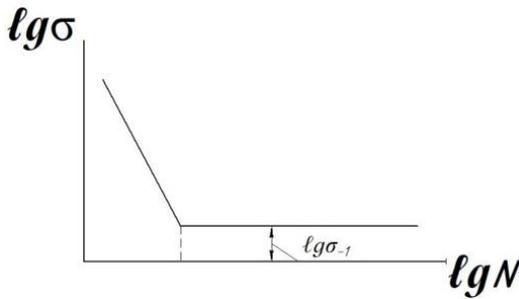


Рисунок 9.9 – Диаграмма зависимости « σ – N » в логарифмических координатах

9.5 Практические меры борьбы с усталостью металла

1. Применение более однородных металлов с мелкозернистой структурой.

2. Придание детали таких очертаний, при которых была бы исключена концентрация напряжений (рисунок 9.10).

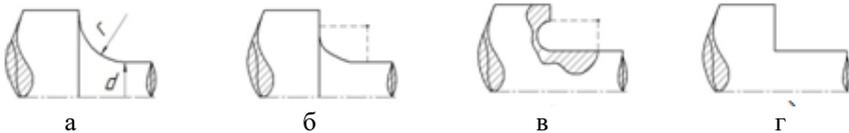


Рисунок 9.10 – Варианты очертаний деталей:

- а – галтель кругового профиля;
- б – галтель эллиптического профиля;
- в – галтель эллиптического профиля с поднутрением;
- г – переход под прямым углом

При отношении радиуса кривизны галтели к диаметру вала $\left(\frac{r}{d}\right)$, равном 0,5, коэффициент концентрации напряжений (α) равен 1,1. При переходе под прямым углом (рисунок 9.10 г) α равен двум.

Изменение кривизны галтели приводит к уменьшению K_σ (K_τ) на 15–20 %.

При наличии деталей установленных напрессовкой, концентрация напряжений зависит от жесткости около мест сопряжения и величины натяга.

Например, при выполнении кольцевой канавки (рисунок 9.11) вокруг места посадки детали с натягом, K_σ снижается в 1,5 раза.

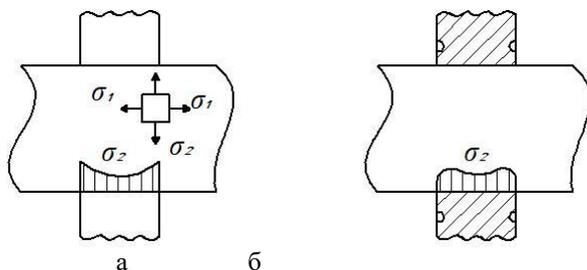


Рисунок 9.11 – Пример изменения концентрации напряжений в напрессованных деталях:

а – без дополнительных элементов; б – разгрузка зоны концентрации напряжений с помощью выполнения кольцевой канавки

Ослабление концентрации напряжений около поперечных круговых отверстий при растяжении происходит при удалении материала и понижении жесткости зон около них (рисунок 9.12 а).

Аналогичный эффект достигается введением в зоны концентрации напряжений материала с более низким модулем упругости. Запрессовка медного кольца в стальную пластину приводит к уменьшению касательных напряжений в 1,5 раза, $\alpha_\sigma = 3$ (рисунок 9.12 б).

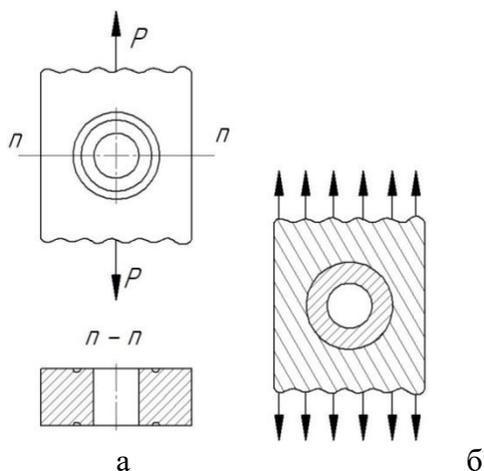


Рисунок 9.12 – Пример сечений круговых отверстий, в которых выполнено ослабление концентраций напряжений:

- а – ослабление концентрации напряжений удалением материала;
- б – ослабление концентрации напряжений введением в зоны концентрации напряжений материала с более низким модулем упругости

3. Тщательная обработка поверхности детали, вплоть до полировки.

4. Применение специальных технологических методов повышающих предел выносливости – цементирование, азотирование, наклепка роликами, обдувка дробью и т.д.

Чем лучше металл, чем выше его предел прочности (σ_B), тем более тщательной обработки он требует.

Контрольные вопросы

1. Дать понятие: циклические нагрузки, усталости, предел выносливости.
2. Циклические напряжения.
3. Параметры, характеризующие циклы напряжений.
4. Определение критической величины трещины.
5. Практические меры борьбы с усталостью металла.

ТЕМА 10. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

В технике широко применяются элементы конструкции, которые с точки зрения их расчета на прочность могут быть отнесены к оболочкам (цистерны, цилиндры и гильзы двигателей, воздушные и газовые баллоны, купола в зданиях).

Оболочкой называется тело, одно из измерений которого (толщина) значительно меньше двух других.

К тонкостенным относят оболочки, у которых толщина стенок меньше одной двадцатой наименьшего радиуса.

Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной.

В сопротивлении материалов рассматривают расчет оболочек, срединная поверхность которых является поверхностью вращения, а нагрузка симметрична относительно оси оболочки. Для упрощения расчетов тонкостенных симметричных сосудов полагают, что нормальные напряжения по толщине оболочки распределены равномерно и, следовательно, изгиб оболочки отсутствует. Элемент, выделенный из оболочки, находится в условиях двухосного напряженного состояния.

10.1 Напряжения в симметричных оболочках по безмоментной теории

Двумя парами меридиальных и нормальных конических сечений выделим из оболочки (рисунок 10.1) элемент ($dS_1 \times dS_2$) (рисунок 10.2).

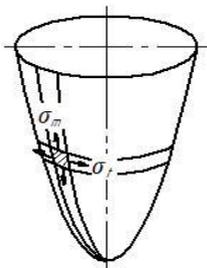


Рисунок 10.1 – Рассматриваемая оболочка

По граням элемента действуют напряжения: σ_m – продольное (меридиональное) и σ_t – поперечное (широтное, окружное). Касательные напряжения на этих гранях отсутствуют в силу симметрии оболочки и нагрузки. В сечениях выделенного элемента действуют погонные усилия:

$$\sigma_m \cdot \delta \cdot dS_2 \text{ и } \sigma_t \cdot \delta \cdot dS_1$$

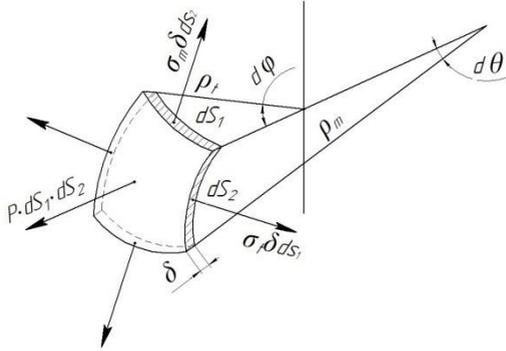


Рисунок 10.2 – Вырезанный элемент

К внутренней стенке элемента приложена нагрузка в виде давления, перпендикулярного к поверхности элемента (рисунок 3). Проектируя все силы, на нормаль к поверхности элемента, получим:

$$p \cdot dS_1 \cdot dS_2 - 2 \cdot \sigma_t \cdot \delta \cdot dS_1 \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - 2 \cdot \sigma_m \cdot \delta \cdot dS_2 \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0, (10.1)$$

В следствии малости углов $d\varphi$ и $d\theta$ имеем:

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2} = \frac{dS_2}{2 \cdot \rho_t} \text{ и } \sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2} = \frac{dS_1}{2 \cdot \rho_m}.$$

Подставляем полученные выражения в уравнение (10.1):

$$p \cdot dS_1 \cdot dS_2 - \sigma_t \cdot \delta \cdot dS_1 \cdot \frac{dS_2}{\rho_t} - \sigma_m \cdot \delta \cdot dS_2 \cdot \frac{dS_1}{\rho_m} = 0, \text{ или} \\ \frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}. (10.2)$$

Уравнение (10.2) носит название уравнение Лапласа.

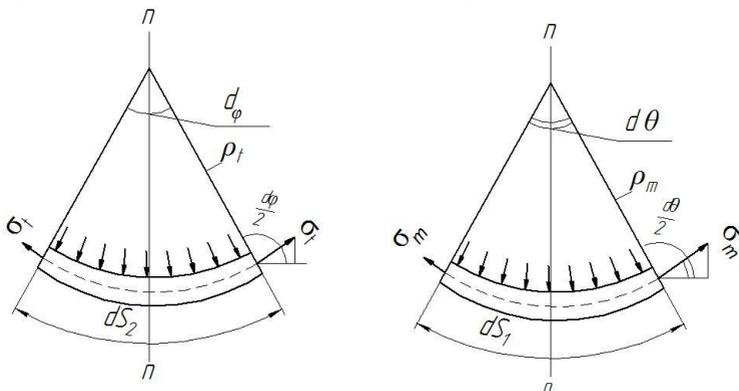


Рисунок 10.3 – Распределение нагрузки по стенкам элемента

Для определения двух неизвестных необходимо еще одно уравнение – уравнение равновесия зоны (уравнение зоны).

Для оболочки можно составить еще одно уравнение равновесия, для определения σ_m (в тех случаях, когда $\rho_t \neq \infty$). Напишем уравнение равновесия всех сил, действующих на часть оболочки, отсеченной коническим нормальным сечением (рисунок 10.4).

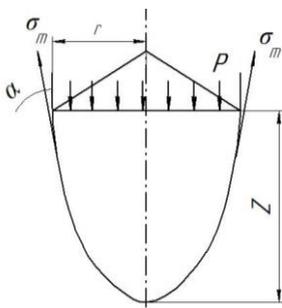


Рисунок 10.4 – Оболочка, отсеченная коническим нормальным сечением

Вертикально вниз действует сила давления (равная $p \cdot \pi \cdot r^2$), вес жидкости ($Q_{ж}$), вес части резервуара (Q_p). Тогда условие равновесия имеет вид:

$$\sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \delta \cdot \cos \alpha - p \cdot \pi \cdot r^2 - Q_{ж} - Q_p = 0.$$

Откуда получаем уравнение равновесия зоны (или уравнение зоны):

$$\sigma_m = \frac{p \cdot r}{2 \cdot \delta \cdot \cos \alpha} + \frac{Q_{ж} + Q_p}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \delta \cdot \cos \alpha}. \quad (10.3)$$

Так как напряженное состояние является двухосным, для расчета на прочность необходимо использовать одну из теорий прочности.

Примеры определения напряжений в тонкостенных сосудах

1. Сферический сосуд под действием внутреннего давления p (рисунок 10.5).

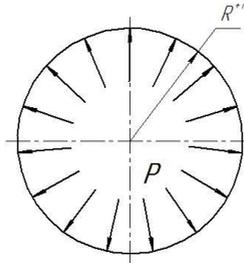


Рисунок 10.5 – Сферический сосуд под действием внутреннего давления p

По условию полной симметрии: $\sigma_t = \sigma_m = \sigma$, $\rho_t = \rho_m = R$. Подставляем данные условия в выражение (10.2) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} &= \frac{p}{\delta}, \\ \frac{2 \cdot \sigma}{R} &= \frac{p}{\delta}, \\ \sigma &= \frac{p \cdot R}{2 \cdot \delta}, \text{ или } \sigma = \frac{p \cdot D}{4 \cdot \delta} \end{aligned}$$

Условие прочности по III и IV теориям прочности приводятся к виду:

$$\sigma = \sigma_r = \sigma_m = \sigma_t = \sigma_{\text{Э III}} = \sigma_{\text{Э IV}} = \frac{p \cdot D}{4 \cdot \delta} \leq [\sigma]. \quad (10.4)$$

2. Цилиндрический сосуд, находящийся под действием внутреннего давления (рисунок 10.6).

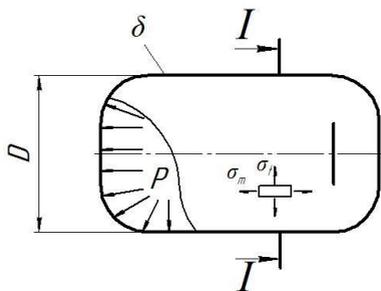


Рисунок 10.6 – Цилиндрический сосуд, находящийся под действием внутреннего давления

Согласно условиям $\rho_t = R$, $\rho_m = \infty$. После подстановки в выражение (10.2) получим уравнения для напряжения в продольном направлении:

$$\frac{\sigma_t}{R} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{\delta} \text{ или } \sigma_t = \frac{p \cdot R}{\delta} \text{ или } \sigma_t = \frac{p \cdot D}{2 \cdot \delta}.$$

Для определения σ_m (рисунок 10.7) составим условие равновесия части сосуда в виде суммы проекций сил на ось сосуда.

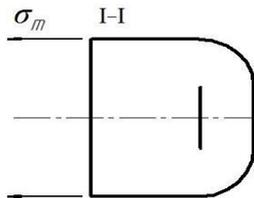


Рисунок 10.7 – Сечение цилиндрического сосуда плоскостью I-I

Получим уравнения для определения напряжений в поперечном направлении:

$$p \cdot \pi \cdot R^2 = \sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \delta, \text{ или } \sigma_m = \frac{p \cdot R}{2 \cdot \delta}, \text{ или } \sigma_m = \frac{p \cdot D}{4 \cdot \delta}.$$

Напряжения в продольных сечениях цилиндрического сосуда вдвое больше, чем напряжение в поперечных сечениях. При одинаковых диаметрах и давлении напряжения в цилиндрическом сосуде вдвое больше, чем в сферическом.

В рассмотренных примерах имеем двухосном напряженном состоянии ($\sigma_1 = \sigma_t$, $\sigma_2 = \sigma_m$, $\sigma_3 = 0$).

Условие прочности имеет вид:

$$- \text{ по III теории прочности } \sigma_{\text{Э III}} = \frac{p \cdot D}{2 \cdot \delta} \leq [\sigma_p],$$

$$- \text{ по IV теории прочности } \sigma_{\text{Э IV}} = \frac{\sqrt{3} \cdot p \cdot D}{4 \cdot \delta} \leq [\sigma_p].$$

10.2 Распорные кольца в оболочках

Если сопряжение отдельных частей резервуара осуществляется плавно, то меридиональные напряжения σ_m будут одинаковыми для обеих частей. Если же в месте перехода от одной формы оболочки к другой имеется перелом, то меридиональные напряжения в этом месте для обеих частей оболочки различны (рисунок 10.8).

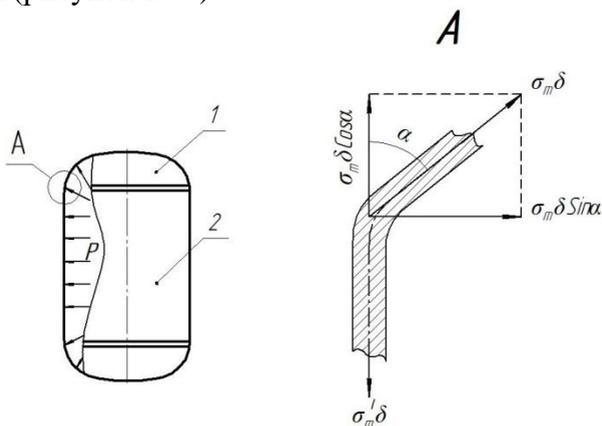


Рисунок 10.8 – Резервуар с указанием усилий в месте сопряжения отдельных частей:

1 – крышка; 2 – цилиндрическая часть

Вертикальная составляющая усилия в крышке – $\sigma_m \cdot \delta \cdot \cos \alpha$ уравнивается усилием в цилиндрической части сосуда – $\sigma'_m \cdot \delta$. Горизонтальная составляющая усилия остается не уравновешенной и вызывает изгиб оболочки. Для предотвращения изгиба оболочки ставятся кольца жесткости.

Кольцо жесткости оказывается загруженным равномерно распределенной радиальной нагрузкой (рисунок 10.9):

$$q = \sigma_m \cdot \delta \cdot \sin \alpha, \quad (10.5)$$

где q – равномерно распределенная радиальная нагрузка, кг/см.

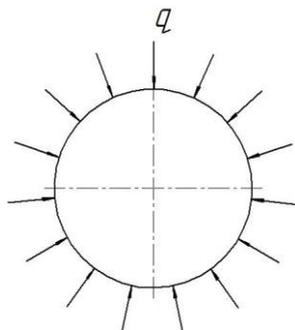


Рисунок 10.9 – Распределение нагрузки по кольцу жесткости

В поперечных сечениях кольца возникает продольная сила N (рисунок 10.10).

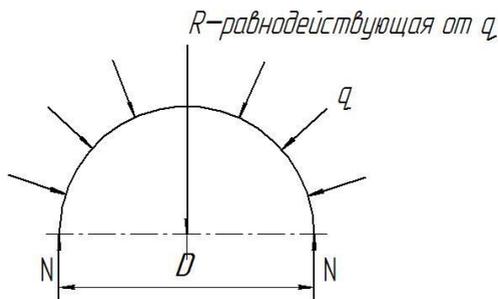


Рисунок 10.10 – Продольная сила, возникающая в поперечном сечении кольца

Если равнодействующая распределенной радиальной нагрузки равна:

$$R = q \cdot D, \quad (10.6)$$

то продольная сила равна:

$$N = \frac{R}{2} = \frac{q \cdot D}{2}. \quad (10.7)$$

или

$$N = \frac{D}{2} \cdot \sigma_m \cdot \delta \cdot \sin \alpha. \quad (10.8)$$

Условие прочности в данном случае имеет вид:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{D}{2F} \cdot \sigma_m \cdot \delta \cdot \sin \alpha \leq [\sigma], \quad (10.9)$$

где F – площадь поперечного сечения кольца, м^2 .

Выражение (10.9) представляет собой поверочный расчет.

При проектировочном расчете может быть найдена площадь поперечного сечения кольца:

$$F \geq \frac{D \cdot \sigma_m \cdot \delta \cdot \sin \alpha}{2 \cdot [\sigma]}, \quad (10.10)$$

но согласно выражению (10.4)

$$\sigma_m = \frac{p \cdot D}{4 \cdot \delta},$$

тогда

$$F \geq \frac{p \cdot D^2 \cdot \sin \alpha}{8 \cdot [\sigma]}.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется оболочкой?
2. Уравнение равновесия зоны.
3. Определение напряжений в тонкостенных сосудах.
4. Для чего необходимы кольца жесткости?
5. Условие прочности при рассмотрении колец жесткости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебном пособии изложены теоретические основы расчета внутренних силовых факторов при различных видах нагружения стержня.

Рассмотрены основы расчета по определению продольной силы в поперечных сечениях стержня при центральном растяжении-сжатии, крутящего момента при кручении, поперечной силы и изгибающего момента при поперечном изгибе, расчет сжатых стержней на устойчивости, выносливость, расчеты на прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени, что может быть использовано при курсовом проектировании и написании выпускных квалификационных работах.

Каждый раздел содержит контрольные вопросы, которые помогут читателю понять степень усвоения изучаемого материала. Данные вопросы могут быть использованы для контроля знаний при аттестации обучающихся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абгарян, К. А. Динамика ракет [Текст] / К. А. Абгарян, И. М. Рапопорт. – М.:Машиностроение, 1969. – 378 с.
2. Абрамович, С. Ф. Динамическая прочность судового оборудования[Текст] / С. Ф. Абрамович, Ю. С. Крючков. – Л. : Судостроение, 1967. – 512 с.
3. Авдонин, А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций[Текст] / А. С. Авдонин. – М. : Машиностроение, 1969. – 402 с.
4. Алабужев, П. М. Теории подобия и размерностей. Моделирование [Текст] / П. М. Алабужев, В. Б. Геронимус, Л. М. Минкевич, Б. А. Шеховцов. – М.:Высшая школа, 1968. – 208 с.
5. Александров, А. В.Соппротивление материалов[Текст] / А. В. Александров, В. Д. Потапов,Б. П. Державин. – М. : Высшая школа, 1995. – 560 с.
6. Ананьев, И. В.Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем[Текст] / И. В. Ананьев. – Гостехиздат, 1946. – 223с.
7. Арсенин, В. Я.Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции [Текст] / В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1966. – 368 с.
8. Беляев, Н. М.Соппротивление материалов[Текст] / Н. М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 608 с.
9. Биргер, И. А.Прочность. Устойчивость. Колебания. В 3 т. Т. 3 [Текст] / И. А. Биргер,Я. Г. Пановко. – М. :Машиностроение, 1968. – 567 с.
10. Бредихин, Б. А.Соппротивление материалов[Текст] / Б. А. Бредихин. –2-е изд., испр. и доп. – Краснодар :КубГАУ, 2006. – 206 с.
11. Булгаков, Б. В. Колебания [Текст] / Б. В. Булгаков. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. – 890 с.

12. Бычков, Д. В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций[Текст] / Д. В. Бычков. – М.:Госстройиздат, 1962. – 475 с.

13. Власов, В. З.Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В. З. Власов, П. Н. Леонтьев. – М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. – 490 с.

14. Дарков, А. В. Сопротивление материалов[Текст] / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 4-е изд., перераб. – М.:Высш.шк., 1975. – 654 с.

15. Кочетов, В. Т. Сопротивление материалов[Текст] : учеб. пособие / В. Т. Кочетов, А. Д. Павленко, М. В. Кочетов. – 3-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 544 с.

22. Пановко, Я. Г. Внутренние трение при колебаниях упругих систем[Текст] / Я. Г. Пановко. – М.:Физматгиз, 1960. – 193 с.

16. Серенсен, С. В. Динамика машин для испытаний на усталость[Текст] / С. В. Серенсен. – М.:Машиностроение,1967. –460 с.

17. Снитко, Н. К. Строительная механика[Текст] / Н. К. Снитко. – 3-е изд., перераб. – М.:Высш.шк., 1980. – 431 с.

18. Сопротивление материалов[Текст] / Г. С. Писаренко,В. А. Агаев, А. Л. Квитка[и др.]. – 5-е изд, перераб. и доп. – Киев : Вища школа, 1986. – 775 с.

19. Сорокин, Е. С. К вопросу неупругого сопротивления строительных материалов при колебаниях[Текст] / Е. С. Сорокин // Научное сообщениеЦНИПС.– М.:Госстройиздат,1954. – Вып. 15. – С. 76.

20. Феодосьев, В. И.Сопротивление материалов[Текст] / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 514 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ.....	4
1.1 Основные принципы и гипотезы науки о сопротивлении материалов.....	4
1.2 Внешние и внутренние силы.....	5
1.3 Понятие о напряжениях и деформациях.....	7
ТЕМА 2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ.	9
2.1 Усилия в поперечном сечении стержня.....	9
2.2 Напряжения и деформации при растяжении (сжатии).....	9
2.3 Потенциальная энергия упругой деформации.....	11
2.4 Механические характеристики материалов.....	11
ТЕМА 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ...	15
3.1 Напряженное состояние в точке тела.....	15
3.2 Виды напряженного состояния.....	18
3.3 Деформации при сложном напряженном состоянии.Связь между напряжениями и деформациями.....	22
3.4 Теории прочности.....	23
ТЕМА 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ.....	26
4.1 Основные понятия и определения.....	26
4.2 Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей.....	28
4.3 Вычисление моментов инерции сложных фигур..	29
4.4 Изменение моментов инерции при повороте осей координат.....	29
4.5 Главные оси и главные моменты инерции.....	30

4.6 Моменты сопротивления площади сечения.....	32
ТЕМА 5. КРУЧЕНИЕ.....	33
5.1 Общие понятия.....	33
5.2 Напряжения при кручении брусьев сплошного и кольцевого сечений.....	33
5.3 Расчет брусьев на прочность и жесткость при кручении.....	36
ТЕМА 6. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ.....	38
6.1 Понятие о деформации изгиба.Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.....	38
6.2 Нормальные напряжения при изгибе.....	41
6.3 Касательные напряжения при изгибе.....	47
ТЕМА 7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.....	49
7.1 Общие положения.....	49
7.2 Расчет балки, подверженной косому или пространственному изгибу.....	50
7.3 Определение внутренних усилий при косом изгибе.....	51
7.4 Определение напряжений при косом изгибе.....	52
7.5 Определение перемещений при косом изгибе.....	56
7.6 Внецентренное сжатие или растяжение.....	56
7.7 Ядро сечения при внецентренном сжатии.....	59
ТЕМА 8. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.....	61
8.1 Общие положения.....	61
8.2 Расчёт сжатых стержней на устойчивость.....	63
ТЕМА 9. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ.....	65
9.1 Понятие об усталостной прочности.....	65
9.2 Характеристики циклического изменения напряжений.....	65

9.3 Механика усталостного разрушения.....	68
9.4 Кривая усталости. Предел выносливости.....	71
9.5 Практические меры борьбы с усталостью металла.....	73
ТЕМА 10. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК.....	76
10.1 Напряжения в симметричных оболочках по безмоментной теории.....	76
10.2 Распорные кольца в оболочках.....	81
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	84
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	85

Учебное издание

Гумбаров Анатолий Дмитриевич,
Кремянский Франтишек Владиславович,
Брусенцов Анатолий Сергеевич и др.

**ИНЖЕНЕРНЫЕ РАСЧЕТЫ ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ СРЕДСТВ АПК**

Учебное пособие

В авторской редакции
Макет обложки – Н. П. Лиханская

Подписано в печать 00.00.2019. Формат 60×84¹/₁₆.

Усл. печ. л. – 5,2. Уч.-изд. л. – 4,1.

Тираж 100 экз. Заказ № .

Типография Кубанского государственного
аграрного университета.
350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13