МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

**Л.Н. Кондратенко**

**И.А Петунина**

# Линейная алгебра

**учебное пособие и индивидуальные задания для студентов очной и заочной форм обучения профилей подготовки «Бухгалтерский учет, анализ и аудит» «Финансы и кредит»**

СОДЕРЖАНИЕ

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Самостоятельная работа над учебным материалом является одной из форм обучения студентов-очников и основной − для студентов-заочников. Она включает освоение материала по учебникам, учебным пособиям и лекциям, решение примеров, а также выполнение индивидуальных заданий и контрольных работ.

Студенты очной формы обучения выполняют **индивидуальные домашние задания**. Выбор варианта осуществляется по порядковому номеру в журнале списка группы. Содержание индивидуальных домашних заданий и распределение их по учебным неделям определяет преподаватель, ведущий дисциплину.

Защита выполненных типовых расчетов выполняется или в течении семестра, по мере выполнения заданий или на зачетной неделе.

Проработав теоретический материал, студент заочной формы обучения приступает к выполнению **контрольной работы:**

**1.** Контрольная работа выполняется в отдельной тетради, оформление которой соответствует методическим требованиям по заочному факультету.

**2.** Контрольные задания располагаются в порядке нумерации их в учебных изданиях. Каждое очередное задание начинают с новой страницы.

**3.** Выполненное задание должно включать полностью переписанное условие и само решение, которое излагается достаточно подробно, с необходимыми промежуточными преобразованиями.

**4.** Для замечаний преподавателя на каждой странице оставляются поля, шириной не менее 4 см.

**Контрольные работы** должны выполняться **самостоятельно**. В случае выявления **невыполнения** этого условия, контрольная работа **не зачитывается**.

Получив проверенную работу, студент должен исправить все ошибки и недочеты и представить ее на повторное рецензирование.

**Зачтенная контрольная работа** (о чем выполняется запись во вкладыше зачетной книжки) является **допуском** студента к экзамену или зачету.

**Выбор варианта контрольной работы** выполняется студентом по следующей схеме (см. таблицу):

1. По предпоследней цифре учебного шифра зачетной книжки выбирается номер строки.
2. По последней цифре учебного шифра зачетной книжки выбирается номер столбца.
3. На пересечении строки и столбца находится номер варианта.

Таблица − Определение номера варианта контрольной работы

| №№ | | Последняя цифра номера зачетной книжки | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| Предпоследняя цифра номера зачетной книжки | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | 2 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| | 5 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 6 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| | 7 | 15 | 6 | 17 | 18 | 19 | 20 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 8 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| | 9 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 0 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |

Например, если две последние цифры в зачетной книжке 69, то у студента 13-й вариант, и он решает каждый тринадцатый пример в соответствующем задании контрольной работы.

**Зачтенная контрольная работа** (о чем выполняется запись во вкладыше зачетной книжки) является **допуском** студента к экзамену или зачету, перечень вопросов к которым должен быть предоставлен лектором, ведущим дисциплину.

# 1. МАТРИЦЫ. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – матричная алгебра – имеют большое значение, так как значительная часть математических моделей экономических, технологических, биологических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное – компактной матричной форме.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, содержащая $m$ строк и $n$ столбцов. Числа, составляющие таблицу, называются элементами матрицы. Элемент, стоящий на пересечении $i-ой$ строки матрицы и её $j-го$ столбца $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$ обозначается $a_{ij}$.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1j}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2j}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{i1}\ a_{i2}\ldots a_{ij}\ldots a_{in} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mj}\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Две матрицы $A$ и $B$ одной размерности $m \times n$ равны, если для любых $i, j\ (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$.

Матрица, состоящая из одной строки $A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\ \cdots a_{ij} \cdots a_{1n} \end{bmatrix}$ называется матрицей-строкой, а матрица $B$, состоящая из одного столбца - матрицей-столбцом: $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \ldots \\ \ldots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$. Если число строк матрицы равно числу её столбцов и равно $n$, то матрица называется квадратной $n-$го порядка.

Элементы матрицы $a_{ij}$, у которых $i = j$, называются диагональными и образуют главную диагональ матрицы. Если все недиагональные элементы матрицы равны нулю, то матрица называется диагональной.

Например:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$ - диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы $n-$го порядка все диагональные элементы равны единице, то такая матрица называется единичной $n-$го порядка и обозначается $E$.

Например: $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка.

Матрица любого порядка называется нулевой или нуль матрицей, если все её элементы равны нулю.
Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций:

1) умножение матрицы на число;
2) сложение матриц;
3) умножение матриц.

Произведением матрицы $A$ размера $m \times n$ на число $\lambda$ называется матрица $B$, у которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $1 \le i \le m;\ 1 \le j \le n. \left(i, j \in N\right)$.

Например:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-7) & 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 9 & -6 & 12 \\ 0 & -21 & 9 \end{bmatrix}.$$

Произведение любой матрицы $A$ размерности $m \times n$ на нуль есть нулевая матрица, т.е. $0 \cdot A = 0$

Общий множитель для всех элементов можно выносить за знак матрицы.
Например:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -6 & 12 & 10 \\ 8 & -2 & -8 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \\ 4 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Суммой матриц $A$ и $B$ одинакового порядка $m \times n$ называется матрица $C$ того же порядка, элементы которой $c_{ij}$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Например: сложить матрицы $A$ и $B$, если:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Разность двух матриц $A$ и $B$ одинакового порядка $m \times n$ определяется через предыдущие операции: $C=A-B=A+(-1)\cdot B$.

Умножение матрицы $A$ на матрицу $B$ возможно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матриц $A_{mxn} \cdot B_{nxk}$ называется такая матрица $C_{mxk}$, каждый элемент $c_{ij}$, которой равен сумме произведений элементов $i-$ой строки матрицы $A$ и $j-$го столбца матрицы $B$.

Например: Вычислить произведение матриц $A \cdot B$, где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица $A$ имеет размер $2 \times 4$, матрица $B - 4 \times 3$.
Найдем размер матрицы произведения: $A_{2x4} \cdot B_{4x3} = C_{2x3}$

$$C=\begin{bmatrix} -1\cdot1+2\cdot0+1\cdot2+0\cdot(-1) & -1\cdot2+2\cdot1+1\cdot3+0\cdot1 & -1\cdot0+2\cdot3+1\cdot1+0\cdot0 \\ -2\cdot1+1\cdot0+2\cdot2+3\cdot(-1) & -2\cdot2+1\cdot1+2\cdot3+3\cdot1 & -2\cdot0+1\cdot3+2\cdot1+3\cdot0 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

## Свойства операций над матрицами

1) $A+B=B+A$
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$
3) $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$
4) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
5) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
6) $\lambda\cdot(A\cdot B)=(\lambda\cdot A)\cdot B$
7) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
8) $A\cdot B\neq B\cdot A$ - в общем случае
9) $A\cdot E=E\cdot A=A$

Транспонированием матрицы $A$ называется переход к матрице $A^{\mathrm{T}}$, у которой столбцами являются строки матрицы $A$ (и наоборот) с сохранением порядка. Матрица $A^{\mathrm{T}}$ называется транспонированной относительно матрицы $A$.

Например, к матрице $A=\begin{bmatrix} 1 & -5 & -6 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, транспонированной является

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^T)^T=A$
2) $(A+B)^T=A^T+B^T$
3) $(\lambda\cdot A)^T=\lambda\cdot A^T$
4) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

## 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ

Рассмотрим квадратную матрицу $A$ второго порядка:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Определителем $\Delta$ второго порядка квадратной матрицы $A$ называется выражение:

$$\Delta=\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} .$$

Пусть дана квадратная матрица $A$ третьего порядка:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Определителем третьего порядка матрицы $A$, называется число,

обозначаемое символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое по формуле **Саррюса:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}$ образуют главную диагональ определителя, элементы $a_{13}, a_{22}, a_{31}$ - побочную диагональ.

Например: вычислить определители второго и третьего порядков:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-3) \cdot 4 = 14 + 12 = 26$

2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) \cdot (-5) + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 5 - 1 \cdot (-3) \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot (-5) - 3 \cdot 0 \cdot 5 =$

$= 45 + 0 - 5 + 6 - 10 - 0 = 36$

## 3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ *N*-ГО ПОРЯДКА

Определителем квадратной матрицы $n-$го порядка, или определителем $n-$го порядка, называется число, равное алгебраической сумме $n$ слагаемых, каждое из которых является произведением $n$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца и имеющих знак ″+″ или ″–″, т.е. это многочлен вида:

$$\sum \pm\ a_{1\alpha}\ a_{2\beta} \ldots a_{n\gamma}. \qquad (3.1)$$

Суммирование в формуле (3.1) производится по всем перестановкам $\alpha, \beta \ldots, \gamma$ чисел $1, 2, \ldots, n$ и знак ″+″ берётся, если перестановка $\alpha, \beta \ldots, \gamma$ чётная, и знак ″-″, если эта перестановка нечётная.

На практике использование формулы (3.1) для вычисления определителя выше третьего порядка весьма трудоёмко, поэтому используют другие способы.

Минором $M_{ij}$ элемента $a_{ij}$ квадратной матрицы $A$ $n-$го порядка называется определитель $(n-1)-$го порядка, полученный из матрицы $A$ вычеркиванием $i-$ой строки и $j-$го столбца.

Например: найти миноры элементов $a_{11}, a_{22}, a_{33}$ матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \; M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -5, \; M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Алгебраическим дополнением $A_{ij}$ элемента $a_{ij}$ квадратной матрицы $A$ $n-$го порядка называется его минор $M_{ij}$, умноженный на $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \qquad (3.2)$$

Например: найти алгебраические дополнения к элементам матрицы $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

По формуле (3.2) находим:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot a_{22} = a_{22} \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot a_{12} = -a_{12}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot a_{21} = -a_{21} \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot a_{11} = a_{11}$$

**Теорема Лапласа.** Определитель квадратной матрицы А равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{1}^{n} a_{in}A_{in}$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{1}^{n} a_{nj}A_{nj} \qquad (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n)$$

Эти выражения называют разложением определителя по элементам $i-$ой строки и элементам $j-$го столбца соответственно.

Пример. Вычислим определитель матрицы, используя разложение по строке или столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Разумнее разложить определитель по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

полученные определители третьего порядка можно разложить, например, по первой строке:

$$=1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 3\cdot\left[-2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} +\right.$$

$$\left. +1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= 23 - 54 - 3\cdot[-2\cdot 10 - 1\cdot(-19) + (-32)] = -31 - 3\cdot(-20 + 19 - 32) = -31 + 99 = 68$$

При вычислении определителей используются следующие свойства:

1. Если какая-либо строка (столбец) матрицы является нулевой

(состоит из одних нулей), то ее определитель равен нулю.

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то ее определитель умножится на число λ.
3. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется: $\left|A^T\right| = |A|$
4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.
5. Если матрица содержит два одинаковых ряда, то ее определитель равен нулю
6. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.
7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраическое дополнение элементов другой строки

   (столбца) этой матрицы равна нулю, т.е. $\sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0, \quad i = j$.
8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другого столбца, умноженные на одно и то же число.
9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Пример. Используя свойства 1-9 определителя, вычислим определитель 4-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

(Из первой строки вычли третью, а затем в полученном определителе третьего порядка из третьего столбца вычитаем первый, умноженный на два)

## 4. ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ К СТУПЕНЧАТОМУ ВИДУ

Матрица $A$ размера $m\times n$ называется ступенчатой, если она имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}\dots a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\ \dots\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0\ \dots a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Элементарными преобразованиями матрицы являются следующие:

1. отбрасывание нулевой строки (столбца);
2. умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число $\neq 0$;
3. изменение порядка строк (столбцов) матрицы;
4. прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;
5. транспонирование матрицы.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду.

Например: приведем к ступенчатому виду матрицу $A$, используя элементарные преобразования, если

$$A=\begin{bmatrix}3&-2&2&4\\1&-2&-3&2\\6&4&1&-1\\2&1&-1&1\end{bmatrix}.$$

Поменяем местами первую и вторую строки:

$$\begin{bmatrix}1&-2&-3&2\\3&-2&2&4\\6&4&1&-1\\2&1&-1&1\end{bmatrix}$$

Прибавим поэлементно ко 2-ой строке 1-ю строку, умноженную на (-3), к 3-ей прибавим 1-ю, умноженную на (-6), к 4-ой прибавим 1-ю, умноженную на (-2). Получим матрицу

$$\begin{bmatrix}1&-2&-3&2\\0&4&11&-2\\0&16&19&-13\\0&5&5&-3\end{bmatrix}.$$

Теперь прибавим к 3-ей строке 2-ю, умноженную на, $\left[-4\right]$ к 4-ой прибавим 2-ю, умноженную на $\left[-\frac{5}{4}\right]$. В результате получим

$$\begin{bmatrix}1&-2&-3&2\\0&4&11&-2\\0&0&-25&-5\\0&0&-{}^{35}\!/_{4}&-{}^{1}\!/_{2}\end{bmatrix}.$$

Теперь к 4-ой строке прибавим 3-ю строку, умноженную на $\left[-{}^{7}\!/_{20}\right]$, получим ступенчатый искомый вид исходной матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -25 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}.$$

## 5. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Матрица $A^{-1}$ называется обратной по отношению к квадратной матрице $A$, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Если определитель матрицы $A$ отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то такая квадратная матрица называется невырожденной, или неособенной, в противном случае (при $|A|=0$) - вырожденной или особенной.

**Теорема** (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы): Обратная матрица $A^{-1}$ существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

Для вычисления обратной матрицы используется следующий алгоритм:

1. Вычисляем определитель исходной матрицы $A$. Если $|A|=0$, то матрица $A$ – вырожденная и обратной ей матрицы не существует. Если $|A| \neq 0$, то обратная матрица $A^{-1}$ существует.
2. Находим матрицу $A^{T}$, транспонированную к данной.
3. Находим алгебраические дополнения к каждому элементу транспонированной матрицы.
4. Составляем присоединенную матрицу $\tilde{A}$, элементами которой являются найденные алгебраические дополнения.
5.

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

6. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1}$ по формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}$ .

7. Правильность вычисления обратной матрицы проверяем, используя равенства: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Пример.

Определить, имеет ли данная матрица $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ обратную, и если имеет, то вычислить ее. Проверить правильность нахождения обратной матрицы.

Решение:

1) найдем определитель матрицы $A$:

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}=32-8-18-12+12+32=38.$$

$|A|\neq 0$ =>матрица $A^{-1}$ существует.

2) транспонируем матрицу $A$: $A^T=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

3) найдем алгебраические дополнения матрицы $A^T$:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=16 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-4 \qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-10$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=10 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & -2\end{vmatrix}=6$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-10 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-7 \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}4 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=11$$

4) составим присоединенную матрицу: $A=\begin{bmatrix}16 & -2 & -10\\ -4 & 10 & -7\\ -10 & 6 & 11\end{bmatrix}$

5) $$A^{-1}=\frac{1}{38}\begin{bmatrix}16 & -2 & -10\\ -4 & 10 & -7\\ -10 & 6 & 11\end{bmatrix}$$

6) проверим правильность нахождения $A^{-1}$:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 4\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{38}\cdot\begin{bmatrix}16 & -2 & -10\\ -4 & 10 & -7\\ -10 & -6 & 11\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{38}\begin{bmatrix}64+4-30 & -8-10+18 & -40+7+33\\ 48-8-40 & -6+20+24 & -30-14+44\\ 32+8+40 & -4-20+24 & -20+14+44\end{bmatrix}=\frac{1}{38}\begin{bmatrix}38 & 0 & 0\\ 0 & 38 & 0\\ 0 & 0 & 38\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E$$

## 6. РАНГ МАТРИЦЫ

Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг матрицы обозначается: *rang A*, или *r*(*A*).

**Теорема.** Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

Для рангов матриц справедливы следующие соотношения:

1) $r(A+B) \le r(A) + r(B)$,

2) $r(A+B) \ge |r(A) - r(B)|$,

3) $r(AB) \le \min\{r(A); r(B)\}$,

4) $r(A^TA) = r(A)$,

5) $r(AB) = r(A)$, если $A$ и $B$ – квадратные матрицы и $|B| \ne 0$.

С помощью элементарных преобразований любую (кроме нулевой) матрицу можно привести к ступенчатому виду, тогда вычисление ранга матрицы не представляет труда.

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

Преобразуем матрицу $A$ так, чтобы все элементы какого-либо столбца, например третьего, кроме элемента $a_{13}$, обратились в нуль. Для этого ко второй строке прибавим первую, к третьей – первую, умноженную на (-2), и к четвертой – третью.

Получим $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

Преобразуем теперь матрицу так, чтобы в четвертом столбце все элементы, кроме элементов первой и второй строк, обратились в нули. Для этого прибавим к четвертой строке вторую, умноженную на (-1), и будем иметь

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$. Ранг полученной матрицы равен трем,

т.е. минор третьего порядка отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9$$

Рассмотрим другой метод нахождения ранга матрицы – метод окаймляющих миноров.

Например, дана матрица $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 12 + 0 - 0 - 12 - 9 = 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0,$$ таким образом, $r(A)=3$.

# 7. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = bi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где $a_{ij}, b_i \ (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n) -$ произвольные числа, называемые коэффициентами при неизвестных и свободными членами соответственно.

Эту систему уравнений можно записать в виде: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ ,

$(i = 1,\ldots,m;\ \ j = 1,\ldots,n)$

Решением системы $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными называется такая совокупность $n$ чисел $(x_1 = k_1,\ x_2 = k_2,\ldots,x_n = k_n)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Если совместная система уравнений имеет единственное решение, то она называется определенной. Если система уравнений имеет более одного решения, то она называется неопределённой.

Две системы уравнений, имеющие одно и то же множество решений, называются равносильными или эквивалентными.

С помощью элементарных преобразований (умножение обеих частей уравнения на число, отличное от нуля; сложение уравнений системы) произвольной системы уравнений получается система $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными.

Запишем систему уравнений в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \ a_{12} \ \dots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ \dots a_{2n} \\ \dots \ \dots \ \dots \\ a_{m1} \ a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix},$$

где $A$ - матрица коэффициентов при переменных (матрица системы);

$X$ – матрица-столбец переменных; $B$ – матрица-столбец свободных членов. Тогда система $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными может быть записана в виде:

$$AX = B.$$

Если квадратная матрица $A$ невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$, тогда существует обратная матрица $A^{-1}$. Умножая слева обе части последнего равенства на $A^{-1}$, получим: $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B.$ Так как

$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X,$ то

$X = A^{-1}B$

- *решение системы* $m$ *линейных уравнений с* $n$ *неизвестными с помощью обратной матрицы.*

## 8. МЕТОД КРАМЕРА

Рассмотрим систему $n$ линейных уравнений с $n$ переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$A$ - квадратная матрица $n-го$ порядка, составленная из коэффициентов при переменных.

**Теорема Крамера.** Пусть $\Delta$ - определитель матрицы $A$ системы $n$ линейных уравнений с $n$ переменными, а $\Delta_j$ – определитель матрицы, получаемой из матрицы $A$ заменой $j$–го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формуле: $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $(j = 1, \ldots, n)$

Эти формулы называются формулами Крамера.

Например, решим систему уравнений двумя способами:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + y - 4z = 0 \\ 4x + 5y - 3z = 1 \end{cases}$$

**1 способ. Метод Крамера**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 48 + 5 - 4 + 40 + 9 = -4 \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 12 - 1 + 20 = 4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -16 + 1 + 8 + 3 = -4 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 5 - 4 - 3 = 0$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 0.$$

**2 способ. С помощью обратной матрицы**

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -4\\ 4 & 5 & -3\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}. \qquad |A|=-4\neq 0 \Rightarrow \text{ существует } A^{-1}$$

По алгоритму нахождения обратной матрицы имеем:

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}17 & 14 & -13\\ -13 & -10 & 9\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}17 & 14 & -13\\ -13 & -10 & 9\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}17 & -13\\ -13 & 9\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4\\ -4\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}.$$

## 9. МЕТОД ГАУССА

Метод Гаусса - метод последовательного исключения переменных - заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Возможны два случая:

а) число уравнений равно числу переменных, т.е. $r=n$ (в этом случае система имеет треугольный вид, является определённой и имеет единственное решение);

б) $r<n$ (система имеет ступенчатый вид и множество решений).

Преобразования Гаусса удобно производить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с расширенной матрицей системы, т.е. с матрицей $A$ и присоединённой матрицей $B$.

**Теорема: (Кронекера-Капелли, критерий совместности системы).** Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.

Решим системы уравнений методом Гаусса:

$$a)\ \begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x+y-4z=0 \\ 4x+5y-3z=1 \end{cases}$$

составим расширенную матрицу системы:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right],$$

поменяем местами первую и вторую строки:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right],$$

умножим первую строку на (-2) и сложим со второй, умножим первую строку на (-4) и сложим с третьей:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ & 1 & 9 & 1 \\ & 1 & 13 & 1 \end{array}\right],$$

умножим вторую строку на (-1) и сложим с третьей:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ & 1 & 9 & 1 \\ & & 4 & 0 \end{array}\right].$$

Получим систему уравнений: $\begin{cases} x+y-4z=0 \\ \quad y+9z=1 \\ \qquad 4z=0 \end{cases}$.

Из последнего уравнения найдём $z = 0$, из второго $y = 1$, из первого $x = -1$.

*б*) $\begin{cases} x+3y+4z=8 \\ 2x+5y+2z=9 \\ 3x+8y+6z=17 \end{cases}$,

составим матрицу $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 2 & 9 \\ 3 & 8 & 6 & 17 \end{array}\right]$ ,

умножим первую строку на (-2) и сложим со второй, умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -6 & -7 \\ 0 & -1 & -6 & -7 \end{array}\right]$$

Получим вторую и третью строки одинаковыми $\Rightarrow$ система имеет бесконечное множество решений

$$\begin{cases} x+3y+4z=8 \\ \quad -y-6z=-7 \\ \quad -y-6z=-7 \end{cases}.$$

Пусть $y = C$.($C = const$).
Тогда

$-6z=y-7,$

$$x=8-3C-4\left[-\frac{C-7}{6}\right]=8-3C+2\frac{C-7}{3}=\frac{12-7C}{3},\ \ z=\frac{7-C}{6}.$$

Ответ: $x=\dfrac{12-7C}{3};\ y=C;\ z=\dfrac{7-C}{6}$.

$$в)\quad \begin{cases} x+\ \ y+\ z=3 \\ x+2y+3z=6 \\ 2x+3y+4z=7 \end{cases},$$

выпишем матрицу $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{array}\right]$.

Умножим первую стоку на (-1) и сложим со второй, умножим первую строку на (-2) и сложим с третьей.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

умножим вторую строку на (-1) и сложим с третьей

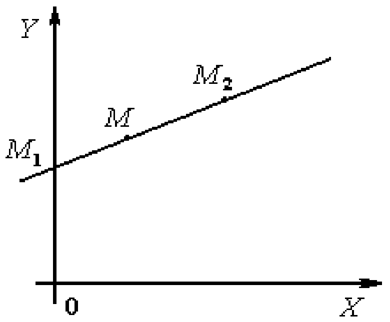
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво, оно приведено к неверному равенству $0=-2$, следовательно, данная система несовместна.

# 10 . НАЧАЛА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

## 10.1. Уравнения прямых на плоскости

1. Прямую линию на плоскости можно задать двумя точками.




Если $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ точки прямой, а $M(x;y)$ ее текущая точка, то уравнение самой прямой можно составить из условия коллинеарности векторов $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M}$.

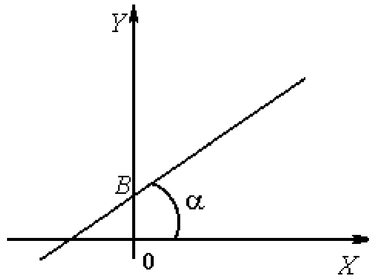
$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1),$$
$$\overline{M_1M} = (x - x_1;\ y - y_1).$$

$\overline{M_1M_2} \parallel \overline{M_1M}$ - значит их координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

2. Прямую линию можно задать однои точкои и направлением.

***а) Уравнение прямой с угловым коэффициентом***

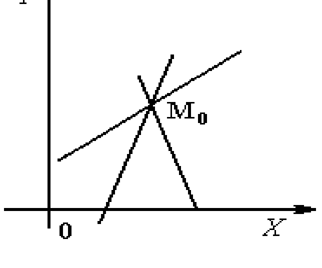



$$\boldsymbol{y = kx + b},$$

где $k = tg\alpha$ - угловой коэффициент прямой,

$b=|OB|$ - отрезок, отсекаемый прямой по

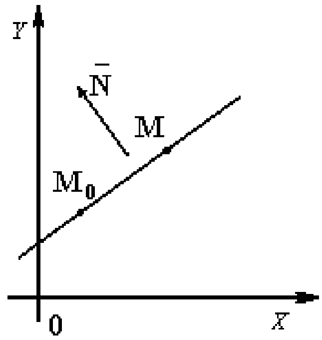
***б) Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ в заданном направлении k***




$$\boldsymbol{y - y_0 = k(x - x_0)}$$

Задавая угловому коэффициенту $k$ определенное значение, выделяем из пучка, одну из прямых.

***в) Общее уравнение прямой***




Если известна одна точка $M_0(x_0;\, y_0)$ прямой и некоторый вектор $\overline{N}(A;B)$, перпендикулярный прямой, то уравнение самой прямой можно получить из условия ортогональности векторов $\overline{N}$ и $\overline{M_0M}$,

где $M(x,y)$– текущая точка прямой.

$\overline{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0)$.

$\overline{M_0M} \perp \overline{N}$, значит скалярное произведение $\overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$.

$A(x - x_0) + B(y -$

Раскрывая скобки, п

член.

Пример.

Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3;-4)$ и $M_2(-1;5)$. Найти направляющий вектор прямой, вектор нормали и угловой коэффициент.

Уравнение прямой, проходящей через две точки: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Подставим координаты точек $M_1$ и $M_2$:

$\dfrac{x-3}{-1-3} = \dfrac{y-(-4)}{5-(-4)};\ \dfrac{y+4}{9} = \dfrac{x-3}{-4};$

направляющий вектор прямой $\overline{S} = (-4;\ 9)$.

Приведем уравнение прямой к общему виду:

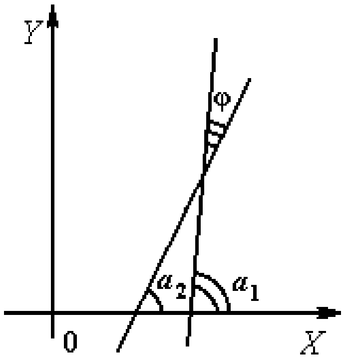
$-4(y+4) = 9(x-3);\ \ 9x + 4y - 11 = 0$.

Нормальный вектор прямой (коэффициенты при $x$ и $y$): $\overline{N} = (9;\ 4)$.

Теперь запишем уравнение прямой с угловым коэффициентом $y{=}kx{+}b$.

$4y = -9x + 11;\ \ y = -\dfrac{9}{4}x + \dfrac{11}{4}$. Угловой коэффициент $k = -\dfrac{9}{4}$.

## Угол между прямыми




Пусть прямые заданы уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, тогда угол между прямыми – $\varphi$ можно определить по формуле $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$

И тогда условие параллельности прямых – $\varphi=0$ , $k_1=k_2$, а условие перпендикулярности

$$\varphi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow 1+k_1k_2=0,\quad k_2=-\frac{1}{k_1}$$

Если прямые заданы

$A_1x+B_1y+C_1=0$, $\quad \overline{N_1}=\left(A_1;\ B_1\right)$,

$A_2x+B_2y+C_2=0$, $\quad \overline{N_2}=\left(A_2;\ B_2\right)$, то условие параллельности прямых $\overline{N_1}\parallel\overline{N_2}$: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$,

а условие ортогональности $\overline{N_1}\perp\overline{N_2}$: $\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}=0$, $A_1A_2+B_1B_2=0$.

Пример.

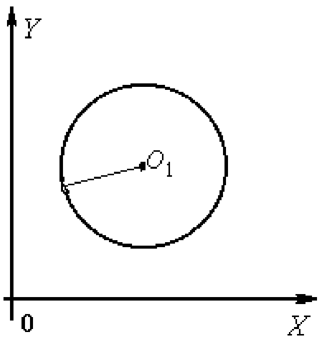
Написать уравнение прямых, проходящих через точку $M_0(2;\ -1)$ параллельно и перпендикулярно прямой $x+2y-3=0$. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M_0(2;\ -1)$: $y+1=k\left(x-2\right)$. Найдем угловой коэффициент заданной прямой.

$$x+2y-3\ =0,\quad 2y=-x+3,\quad y=-\frac{1}{2x}+\frac{3}{2},\quad k=-\frac{1}{2}.$$

Из уравнения пучка прямых выделим прямую параллельную данной, используя условия параллельности прямых $k_1=k_2$, имеем $y+1=-\dfrac{1}{2}(x-2)$ или $y=-\dfrac{1}{2}x$. Теперь выделяем прямую, перпендикулярную данной, используя условие перпендикулярности прямых $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, значит $k_2 = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$ и, тогда $y+1 = 2(x-2)$ или $y = 2x-5$.

## 10.2. Кривые второго порядка

**1.** ***Окружность***




Каноническое уравнение окружности с центром в точке $O_1\,(a;b)$ и радиусом $r$

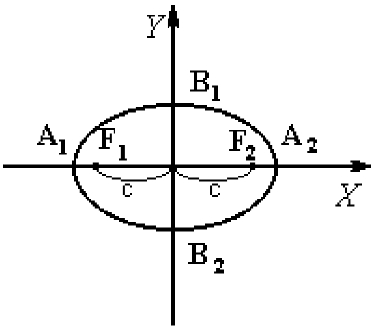
$$\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\right)^2 + \left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}\right)^2 = \boldsymbol{r}^2 .$$

Если центр окружности в начале координат, то уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$

**2.** ***Эллипс***

Каноническое уравнение эллипса




$$\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2} + \frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2} = 1,$$

где $a$ и $b$ - полуоси эллипса.

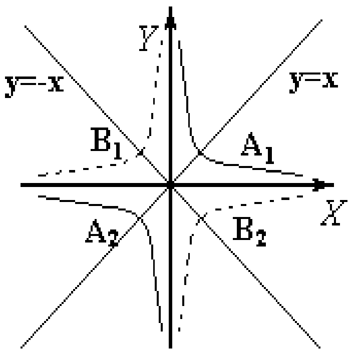
Вершины эллипса-
$A_1(-a;0), A_2(a;0)$, $B_1(0;b), B_2(0;-b)$.

Фокусы эллипса - $F_1(-c;0)$, $F_2(\tilde{n};0)$,

фокусное расстояние -$\sqrt{a^2-b^2}$.

Форма эллипса определяется его эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{c}{a}$, характеристическое свойство точек эллипса: сумма расстояний каждой точки эллипса до его фокусов – величина постоянная, равная $2a$.

**3.** ***Гипербола***




Уравнение гиперболы $y=\dfrac{m}{x}$ определяет обратно пропорциональную зависимость. Если $m>0$, то ветви гиперболы расположены в I и III квадрантах,
если $m<0$, то во II и IV.
Оси координат – асимптоты гиперболы, а прямые $y=x,\quad y=-x$ – оси симметрии.

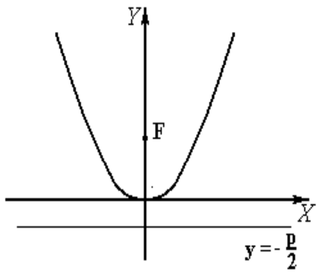
Вершины гиперболы:

$$B_1\left(-\sqrt{|\mathrm{m}|};\ \sqrt{|\mathrm{m}|}\right),\ B_2\left(\sqrt{|\mathrm{m}|};\ -\sqrt{|\mathrm{m}|}\right), A_1\left(\sqrt{|\mathrm{m}|};\ \sqrt{|\mathrm{m}|}\right),\ A_2\left(-\sqrt{|\mathrm{m}|};\ -\sqrt{|\mathrm{m}|}\right).$$

Центр гиперболы – O(0,0) пересечение осей симметрии.

Графиком дробно-линейной функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ является гипербола, асимптоты которой параллельны осям координат.

**4.** ***Парабола***




Характеристическое свойство точек параболы: множество точек равноудаленных от точки–фокуса параболы $F\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$ и от прямой–директрисы $y=-\dfrac{p}{2}$.

Тогда уравнение параболы $2py = x^2$. Вершины параболы в начале координат $O(0;\,0)$. Ось $OY$ – ось симметрии.

Если парабола симметрична относительно $OX$, а вершина в начале координат. То ее уравнение $2px = y^2$.

Уравнение квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ определяет параболу со смещенной вершиной и осью симметрии, параллельной оси $OУ$.

## Пример решения задачи

Даны координаты вершин треугольника $ABC$:
$A(-1;2), B(5;\ -1), C(-4;\ -5)$.
Найти:
1) длину стороны $AB$;
2) уравнения сторон $AB$ и $BC$ и их угловые коэффициенты;
3) внутренний угол $B$ в радианах с точностью до 0,01;
4) уравнение медианы $AE$;
5) уравнение и длину высоты $CD$;
6) уравнение прямой, проходящей через точку $E$ параллельно стороне $AB$ и точку $M$ ее пересечения с высотой $CD$;
7) уравнение окружности, диаметром которой является высота $CD$.

Решение.

**1.** Расстояние $d$ между точками $A(x_1;\,y_1)$ и $B(x_2;\,y_2)$ определяется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ , \qquad (1)$$

воспользовавшись которой находим длину стороны $AB$:

$$AB = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

**2.** Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки плоскости $A(x_1;\,y_1)$ и $B(x_2;\,y_2)$ имеет вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{2}$$

Подставляя в (2) координаты точек $A$ и $B$, получаем уравнение стороны $AB$:

$$\frac{y-2}{-1-2}=\frac{x+1}{5+1}; \quad \frac{y-2}{-3}=\frac{x+1}{6}; \quad \frac{y-2}{-1}=\frac{x+1}{2};$$

$$2y-4=-x-1;$$

$$x+2y-3=0 \ \ (AB)$$

Угловой коэффициент $k_{AB}$ прямой $AB$ найдем, преобразовав полученное уравнение к виду уравнения прямой с угловым коэффициентом $y=kx+b$.

У нас $2y=-x+3$, то есть $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ откуда $k_{AB}=-\frac{1}{2}$

Аналогично получим уравнение прямой $BC$ и найдем ее угловой коэффициент:

$$\frac{y+1}{-5+1}=\frac{x-5}{-4-5}; \ \frac{y+1}{-4}=\frac{x-5}{-9}; \ -9y-9=-4x+20; \ 4x-9y-29=0 \ \ (BC).$$

$$-9y=-4x+29; \quad y=\frac{4}{9}x-\frac{29}{9}, \ \text{ т.е. } k_{BC}=\frac{4}{9}$$

**3.** Для нахождения внутреннего угла нашего треугольника воспользуемся формулой

$$tgB=\frac{k_{BC}-k_{AB}}{1+k_{AB}k_{BC}} \tag{3}$$

Отметим, что порядок вычисления разности угловых коэффициентов, стоящих в числителе этой дроби, зависят от взаимного расположения прямых $AB$ и $BC$. Подумайте, как бы Вы стали искать внутренние углы $A$ и $C$ треугольника $ABC$?

Подставив ранее вычисленные значения $k_{AB}$ и $k_{BC}$ в (3), находим:

$$tgB = \frac{\frac{4}{9}+\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{4}{9}} = \frac{17}{14} \approx 1{,}2143 .$$

**4.** Для составления уравнения медианы *AE* найдем сначала координаты точки *E*, которая лежит на середине отрезка *BC*:

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5+(-4)}{2} = \frac{1}{2}; \quad y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{(-1)+(-5)}{2} = -3$$

Далее, подставив в (2) координаты *A* и *E*, получаем уравнение медианы:

$$\frac{y-2}{-3-2} = \frac{x+1}{\frac{1}{2}+1}; \quad \frac{y-2}{-5} = \frac{x+1}{3}; \quad \frac{3}{2}(y-2) = -5(x+1);$$

$$3(y-2) = -10(x+1); \quad 10x+3y+4=0 \quad (AE).$$

**5.** Для составления уравнения высоты *CD* воспользуемся уравнением прямой, проходящей через заданную точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$ с заданным угловым коэффициентом $k$ которое имеет вид

$$y - y_0 = R(x - x_0), \qquad (4)$$

и условием перпендикулярности прямых *AB* и *CD*: $k_{AB}k_{CD} = -1$,

откуда $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = 2$.

Подставив в (4) вместо $k$ значение $k_{CD}$=2, а вместо $x_0$, $y_0$ координаты точки *C*, получим уравнение высоты *CD*:

$$y+5 = 2\left(x+4\right); \quad y+5 = 2x+8; \quad 2x - y + 3 = 0 \quad (CD).$$

Для вычисления длины высоты *CD* воспользуемся формулой отыскания расстояния $d$ от заданной точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$ до прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$,

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (5)$$

Подставив в (5) вместо $x_0$, $y_0$ координаты точки $C$, а вместо $A$, $B$ и $C$ коэффициенты уравнения прямой $AB$, получаем

$$d = CD = \frac{|-4+2(-5)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{17}{\sqrt{5}}$$

**6.** Так как искомая прямая $EF \parallel AB$, то $k_{EF} = k_{AB} = -\frac{1}{2}$

Подставив в уравнение (4) вместо $x_0$, $y_0$ координаты точки $E$, а вместо $k$ значение $k_{EF}$, получаем уравнение прямой $EF$:

$$y+3=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right);\quad 2y+6=-x+\frac{1}{2};\quad 4y+12=-2x+1;$$

$$2x+4y+11=0 \qquad (EF)$$

Найдем координаты точки $M$: решим совместно уравнения $EF$ и $CD$:

**7.** $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ – уравнение окружности, т.к. $C$ – диаметр окружности, то центр окружности $O^{'}$. Найдем из соотношений

$$\begin{cases} 2x+4y+11=0; \\ 2x-y+3=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{23}{10}; \\ y=-\dfrac{8}{5}; \end{cases} \Rightarrow M=\left(-\frac{23}{10};\ -\frac{8}{5}\right)$$

$$x_{O^I}=\frac{x_C+x_D}{2};\ y_{O^I}=\frac{y_C+y_D}{2};\ x_{O^I}=\frac{-4+x_D}{2};\ y_{O^I}=\frac{-5+y_D}{2}.$$

Для нахождения координат точки $D$ решим совместно систему уравнений:

$$\begin{matrix} CD: \\ AB: \end{matrix} \begin{cases} 2x-y+3=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow D\ \left(-\frac{3}{5};\ \frac{9}{5}\right)$$

$$x_{O^I}=\frac{-4-\frac{3}{5}}{2}=-\frac{23}{10}=-2{,}3\quad y_{O^I}=\frac{-5+\frac{9}{5}}{2}=-\frac{16}{10}=-1{,}6$$

$0'(-2,3;-1,6)$ – центр окружности, т.к. диаметр равен $\frac{17}{\sqrt{5}}$, то

$R=\frac{17}{2\sqrt{5}} \Rightarrow$

искомое уравнение, имеет вид:

$$(x+2,3)^2+(y+1,6)^2=\left(\frac{17}{2\sqrt{5}}\right)^2 \quad \text{или} \quad (x+2,3)^2+(y+1,6)^2=14,45$$

## 11. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

**Задание 1.** Найти произведение $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

**1.1** $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-4 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$ **1.2** $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 2 & -2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 0 & -3\end{bmatrix}$

**1. 3** $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & 5\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$ .**1.4** $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & 5\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$

**1.5** $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -6\end{bmatrix}$ **1.6** $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 5\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$

**1.7** $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$ **1.8** $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 4 & 1 & -3\end{bmatrix}$

**1.9** $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$ **1.10** $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$

**1.11** $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -3 & 5\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-4 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$ **1.12** $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\\ 0 & 15\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 6\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$

**1.13** $A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 5 & 0\\ 8 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 8 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$ **1.14** $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\\ 0 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$

**1.15** A $=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**1.16** A$=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -8 \end{bmatrix}$

**1.17** A $=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

**1.18** A $=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**1.19** A $=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, B$=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

**1.20** A$=\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 7 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -8 & -5 & -4 \end{bmatrix}$

**1.21** A $=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & -10 \end{bmatrix}$

**1.22** A$=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, B$=\begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

**1.23** A $=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 8 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

**1.24** A$=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

**1.25** A $=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

**1.26** A$=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**1.27** A $=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

**1.28** A$=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

**1.29** A $=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

**1.30** A$=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, B $=\begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

**Задание 2.** Данные о производстве сельскохозяйственных продуктов трех видов (молоко, мясо, зерно) в двух фермерских хозяйствах за последние два года приведены в виде матриц $A_1$ и $A_2$.

Найти: 1) Матрицу прироста продуктов $C = A_1 + A_2$

2) Матрицу среднегодового производства продуктов

$B = \frac{1}{2}\left(A_1 + A_2\right)$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 200 + a_1 & 190 + a_1 & 1100 + a_1 \\ 230 + a_1 & 170 + a_1 & 1000 + a_1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 220 + a_2 & 180 + a_2 & 1500 + a_2 \\ 220 + a_2 & 190 + a_2 & 1300 + a_2 \end{bmatrix}$$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2.1** | $\alpha_1 = 10$ | $\alpha_2 = -10$ | **2.11** | $\alpha_1 = 20$ | $\alpha_2 = -20$ | **2.21** | $\alpha_1 = 20$ | $\alpha_2 = 30$ |
| **2.2** | $\alpha_1 = -20$ | $\alpha_2 = 10$ | **2.12** | $\alpha_1 = -10$ | $\alpha_2 = 20$ | **2.22** | $\alpha_1 = -20$ | $\alpha_2 = 30$ |
| **2.3** | $\alpha_1 = 0$ | $\alpha_2 = 10$ | **2.13** | $\alpha_1 = 10$ | $\alpha_2 = 0$ | **2.23** | $\alpha_1 = -10$ | $\alpha_2 = -10$ |
| **2.4** | $\alpha_1 = 0$ | $\alpha_2 = 20$ | **2.14** | $\alpha_1 = 20$ | $\alpha_2 = 0$ | **2.24** | $\alpha_1 = -10$ | $\alpha_2 = -20$ |
| **2.5** | $\alpha_1 = 0$ | $\alpha_2 = -10$ | **2.15** | $\alpha_1 = -10$ | $\alpha_2 = 0$ | **2.25** | $\alpha_1 = 40$ | $\alpha_2 = -10$ |
| **2.6** | $\alpha_1 = 0$ | $\alpha_2 = -20$ | **2.16** | $\alpha_1 = -20$ | $\alpha_2 = 0$ | **2.26** | $\alpha_1 = -20$ | $\alpha_2 = -30$ |
| **2.7** | $\alpha_1 = 0$ | $\alpha_2 = 30$ | **2.17** | $\alpha_1 = 30$ | $\alpha_2 = 0$ | **2.27** | $\alpha_1 = -30$ | $\alpha_2 = -30$ |
| **2.8** | $\alpha_1 = 0$ | $\alpha_2 = -30$ | **2.18** | $\alpha_1 = -30$ | $\alpha_2 = 0$ | **2.28** | $\alpha_1 = -20$ | $\alpha_2 = -20$ |
| **2.9** | $\alpha_1 = 30$ | $\alpha_2 = 10$ | **2.19** | $\alpha_1 = -10$ | $\alpha_2 = 30$ | **2.29** | $\alpha_1 = -20$ | $\alpha_2 = -10$ |
| **2.10** | $\alpha_1 = 30$ | $\alpha_2 = -10$ | **2.20** | $\alpha_1 = 30$ | $\alpha_2 = 20$ | **2.30** | $\alpha_1 = 0$ | $\alpha_2 = 40$ |

**Задание 3.** Вычислить определители второго и третьего порядков.

**3.1 а)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} -10 & 0 & 13 \\ 4 & 9 & -11 \\ 40 & 15 & 9 \end{vmatrix}$

**3.2 а)** $\begin{vmatrix} 2 & -11 \\ 11 & -8 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 3 \\ -11 & 2 & 0 \\ 15 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

**3.3 а)** $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -11 & 4 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 4 & 5\sqrt{2} & 1 \\ 10 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

**3.4 а)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 26 & -1 & 11 \\ 7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

**3.5 а)** $\begin{vmatrix} 2 & -47 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} -8 & 0 & 13 \\ 0 & -9 & 11 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

**3.6 а)** $\begin{vmatrix} 2 & 45 \\ 7 & -23 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 12 & 8 \\ -8 & -5 & 9 \end{vmatrix}$

**3.7 а)** $\begin{vmatrix} 2 & 42 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 11 & 5 & 6 \\ 13 & 1 & -7 \end{vmatrix}$

**3.8 а)** $\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 13 & 9 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 9 & -4 & 12 \\ 8 & 2 & -7 \\ 1 & 13 & 0 \end{vmatrix}$

**3.9 а)** $\begin{vmatrix} 2 & -12 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & 9 & -5 \\ 7 & 11 & 9 \end{vmatrix}$

**3.10 а)** $\begin{vmatrix} 2 & -17 \\ 8 & -6 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 0 & 7 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -2 \\ 5 & 8 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$

**3.11 а)** $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -11 & 4 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

**3.12 а)** $\begin{vmatrix} 41 & 0 \\ 17 & 9 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 0 & -8 & 2 \\ 7 & 11 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

**3.13 а)** $\begin{vmatrix} -8 & 13 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} -8 & 0 & 2 \\ -11 & 13 & 3 \\ 1 & 19 & 1 \end{vmatrix}$

**3.14 а)** $\begin{vmatrix} 37 & 5 \\ 4 & -12 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 15 \\ 5 & 10 & 8 \\ -9 & 16 & 1 \end{vmatrix}$

**3.15 а)** $\begin{vmatrix} 18 & 8 \\ -7 & 9 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} -11 & 35 & 2 \\ 1 & 29 & 15 \\ 9 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

**3.16 а)** $\begin{vmatrix} 31 & -15 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 7 & -4 & -12 \\ 8 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 0 \end{vmatrix}$

**3.17 а)** $\begin{vmatrix} -14 & 3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} -27 & 3 & -6 \\ 4 & 9 & 19 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

**3.18 а)** $\begin{vmatrix} 29 & 18 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 5 & -21 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & -9 \end{vmatrix}$

**3.19 а)** $\begin{vmatrix} 19 & 7 \\ 11 & 4 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 3 & -14 & 12 \\ 7 & 18 & 8 \\ 15 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

**3.20 а)** $\begin{vmatrix} 20 & -11 \\ 6 & 13 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 24 & -1 & 2 \\ 7 & -23 & 0 \\ 1 & -44 & 0 \end{vmatrix}$

**3.21 а)** $\begin{vmatrix} 13 & -20 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

**3.22 а)** $\begin{vmatrix} 17 & 27 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 9 & -11 & 1 \\ 7 & 40 & 1 \end{vmatrix}$

**3.23 а)** $\begin{vmatrix} 8 & 36 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} -13 & 0 & 9 \\ -17 & 8 & 9 \\ -15 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

**3.24 а)** $\begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 15 & 9 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 13 & -4 & 15 \\ 11 & 2 & -8 \\ 7 & 10 & 4 \end{vmatrix}$

**3.25 а)** $\begin{vmatrix} 11 & 33 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 11 & 2 & 6 \\ 36 & 3 & 33 \end{vmatrix}$

**3.26 а)** $\begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} -12 & 5 & 1 \\ -4 & -5 & 6 \\ 3 & 11 & 10 \end{vmatrix}$

**3.27 а)** $\begin{vmatrix} 5 & -39 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 10 & -6 & 1 \\ 5 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

**3.28 а)** $\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 10 & -12 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 7 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

**3.29 а)** $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -11 & 40 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 0 & 7 & 17 \\ 1 & 43 & -8 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$

**3.30 а)** $\begin{vmatrix} 23 & 21 \\ 21 & 4 \end{vmatrix}$, **б)** $\begin{vmatrix} 8 & -8 & 4 \\ 0 & -9 & 3 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

**Задание 4.** Вычислить определитель четвёртого порядка:
1) используя разложение по строке или столбцу,
2) сведя к ступенчатому виду.

**4.1**

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

**4.2**

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

**4.3**

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

**4.4**

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**4.5**

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

**4.6**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

**4.7**

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

**4.8**

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

**4.9**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 9 & 0 & 9 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**4.10**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

**4.11**

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

**4.12**

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 & 3 \\ 9 & 0 & 9 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

**4.13**

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**4.14**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

**4.15**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 5 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

**4.16**

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

**4.17**

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 9 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

**4.18**

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

**4.19**

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

**4.20**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

**4.21**

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**4.22**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

**4.23**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & 5 \\ -3 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

**4.24**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 9 & 0 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

**4.25**

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

**4.26**

$$\begin{vmatrix} 2 & 13 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & -10 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**4.27**

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

**4.28**

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 8 \\ -5 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**4.29**

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \\ 5 & 8 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

**4.30**

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 9 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

**Задание 5.** Определить, имеет ли данная матрица обратную, и если имеет, то вычислить её. Проверить правильность нахождения обратной матрицы по формулам: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

**5.1** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **5.2** $\begin{pmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 10 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **5.3** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -17 & 5 & 0 \\ 5 & -17 & 1 \end{pmatrix}$ **5.4** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**5.5** $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 13 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **5.6** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \\ 7 & 17 & 0 \end{pmatrix}$ **5.7** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **5.8** $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 4 \\ -17 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**5.9** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **5.10** $\begin{pmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -6 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ **5.11** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ **5.12** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

**5.13** $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & -6 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **5.14** $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 8 & 7 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ **5.15** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ **5.16** $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**5.17** $\begin{pmatrix} 8 & -3 & 5 \\ 5 & -6 & 8 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ **5.18** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ **5.19** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **5.20** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

**5.21** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **5.22** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 10 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **5.23** $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **5.24** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 10 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**5.25** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ **5.26** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **5.27** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ **5.28** $\begin{pmatrix} -2 & 10 & 2 \\ 5 & 11 & -4 \\ -1 & -13 & 1 \end{pmatrix}$

**5.29** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **5.30** $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 13 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

**Задание 6.** Решить систему уравнений тремя способами.
а) методом Крамера; б) методом Гаусса; в) матричным способом.

**6.1**
$$\begin{cases} 3x+y+8z=12 \\ x+3y-7z=-3 \\ 5x+2y+z=8 \end{cases}$$

**6.2**
$$\begin{cases} 5x+6y-7z=-31 \\ -x+8y-z=1 \\ 2x+4y-3z=-12 \end{cases}$$

**6.3**
$$\begin{cases} 3x-y-z=-3 \\ x+z=5 \\ y-z=-2 \end{cases}$$

**6.4**
$$\begin{cases} x+z=4 \\ 2x-y+4z=13 \\ 2x+3y-5z=-10 \end{cases}$$

**6.5**
$$\begin{cases} 5x+8y+3z=5 \\ -x+2y-z=-1 \\ x-y-5z=1 \end{cases}$$

**6.6** $\begin{cases} x+3y+z=3 \\ -x-2y+4z=-2 \\ x-8y-z=-8 \end{cases}$

**6.7**
$$\begin{cases} -x+2y-3z=-2 \\ x+y-2z=0 \\ -x-3y+3z=1 \end{cases}$$

**6.8**
$$\begin{cases} -2x+3y+z=8 \\ 7x-8y+2z=13 \\ x-y+3z=21 \end{cases}$$

**6.9**
$$\begin{cases} 8x-15y+z=2 \\ 3x+2y+2z=13 \\ 4x-y+3z=10 \end{cases}$$

**6.10**
$$\begin{cases} 10x-2y+3z=8 \\ 2x+y+4z=14 \\ 3x+y-z=5 \end{cases}$$

**6.11**
$$\begin{cases} x-8y+3z=2 \\ 5x-3y+2z=8 \\ 3x+7y+z=13 \end{cases}$$

**6.12**
$$\begin{cases} 4x-y=7 \\ 5x+y+z=0 \\ x+y+2z=-6 \end{cases}$$

**6.13**
$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+2y-z=12 \\ 2x-y+2z=8 \end{cases}$$

**6.14**
$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+2y+3z=6 \\ 2x+3y+4z=9 \end{cases}$$

**6.15** $\begin{cases} -x+2y-3z=-2 \\ x+y-2z=0 \\ -x-3y+3z=1 \end{cases}$

**6.16**
$$\begin{cases} 3x-y=81 \\ 3x-y+z=82 \\ x+z=10 \end{cases}$$

**6.17**
$$\begin{cases} -7x+y+8z=1 \\ x-y-z=0 \\ 2x+4y-5z=-3 \end{cases}$$

**6.18**
$$\begin{cases} x+2y-4z=-5 \\ -x-2y+z=5 \\ x+y+8z=-2 \end{cases}$$

**6.19**
$$\begin{cases} 5x-2y+z=7 \\ x-y=0 \\ x+y-4z=0 \end{cases}$$

**6.20.**
$$\begin{cases} -x-y+z=4 \\ -x+2y-2z=17 \\ 3x+4y+z=4 \end{cases}$$

**6.21.**
$$\begin{cases} 5x-4y+8z=9 \\ x+10y+3z=14 \\ -2x+8y-7z=-1 \end{cases}$$

**6.22**
$$\begin{cases} 5x-8y+11z=13 \\ x+3y+7z=12 \\ -x-4y-3z=-1 \end{cases}$$

**6.23**
$$\begin{cases} x+10y-2z=1 \\ 2x+y+7z=-4 \\ 5x-3y-z=12 \end{cases}$$

**6.24**
$$\begin{cases} 3x+2y+11z=16 \\ -x+5y-7z=6 \\ 2x+7y+z=10 \end{cases}$$

**6.25**
$$\begin{cases} 3x+6y+2z=11 \\ 5x+y-3z=3 \\ x-y+3z=21 \end{cases}$$

**6.26**
$$\begin{cases} 3x+3y+2z=-4 \\ 5x+y-2z=10 \\ -2x+y+z=-5 \end{cases}$$

**6.27**
$$\begin{cases} 2x-3y+z=9 \\ x+y+5z=4 \\ -x+2y+5z=0 \end{cases}$$

**6.28**
$$\begin{cases} x+y+13z=15 \\ 2x+3y+2z=7 \\ 3x+4y-5z=2 \end{cases}$$

**6.29**
$$\begin{cases} 3x-5y+z=14 \\ -x+2y+2z=3 \\ 2x-2y+5z=11 \end{cases}$$

**6.30**
$$\begin{cases} 5x-2y+13z=39 \\ x+y+z=10 \\ -x+2y+z=9 \end{cases}$$

## Задание №7

На базе находится товар трех видов ($a$, $b$, $c$), которым она снабжает ларьки, магазины и универмаги. За определенный период торговые организации могут реализовать товар в количестве, указанном в таблице. Сколько ларьков, магазинов и универмагов может обеспечить база, чтобы полностью продать весь товар, если имеет его: *a* - (*n*-*2*) единиц; *b* - (*n*+*9*)ед.; *c* - (*n*+*5*)ед.

| товар | ларек | магазин | универмаг | Кол-во товара на базе |
|---|---|---|---|---|
| *a* | *m-2* | *m-1* | *m+ 4* | *n-2* |
| *b* | *m+ 1* | *m* | *m+7* | *n+9* |
| *c* | *m* | *m+ 2* | *m+1* | *n+5* |

**7.1.** $m$ =3,6 , $n$ =18; **7.11.** $m$ = 4,4 , $n$ = 22; **7.21.** $m$ =6, $n$ =30;

**7.2.** $m$ =7, $n$ =35; **7.12.** $m$ = 3, $n$=15; **7.22.** $m$ =9, $n$ =45;

**7.3.** $m$ =11, $n$ =55; **7.13.** $m$ =10, $n$ = 50; **7.23.** $m$ =17, $n$ =85;

**7.4.** $m$ =3,2, $n$ =16; **7.14.** $m$ = 3,4 , $n$=17; **7.24.** $m$ =20, $n$ =100;

**7.5.** $m$ =12, $n$ =60; **7.15.** $m$ =16, $n$ =80; **7.25.** $m$ =2,6 , $n$ =13;

**7.6.** $m$ =19, $n$ =95; **7.16.** $m$ =5, $n$ =25; **7.26.** $m$ =2,4 , $n$ =12;

**7.7.** $m$ =4,2 , $n$ =21; **7.17.** $m$ =2,8 , $n$ =14; **7.27.** $m$ =14, $n$ =70;

**7.8**. $m$ =4, $n$ =20; **7.18.** $m$ =13, $n$ =65; **7.28.** $m$ =15, $n$ =75;

**7.9.** $m$ =21, $n$ =105 **7.19.** $m$ =18, $n$ =90; **7.29.** $m$ =22, $n$ =110;

**7.10.** $m$ =4,6 , $n$ =23 **7.20.** $m$ =3,6 , $n$ =18; **7.30.** $m$ =8, $n$ =40.

**Задание 8.** Даны координаты вершин треугольника *ABC*.
Найти: 1) длину стороны *AB*; 2) уравнения сторон *AB* и *BC* и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол *B*; 4) уравнение медианы *AE*; 5) уравнение и длину высоты *CD*; 6) уравнение пря-

мой, проходящей через точку *E* параллельно стороне *AB* и точку *M* ее пересечения с высотой *CD*; 7) уравнение окружности, диаметром которой является высота *CD*. 8) сделать чертеж.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **8.1** | *A* (1;-1), | B (4; 3), | C (5; 1) | **8.16** | A (-2; 1), | B (1; 5), | C (2; 3) |
| **8.2** | *A* (0;-1), | B (3; 3), | C (4; 1) | **8.17** | A (4; -3), | B (7; 1), | C (8; -1) |
| **8.3** | *A* (1;-2), | B (4; 2), | C (5; 0) | **8.18** | A (-2; 2)), | B (1; 6), | C (2; 4) |
| **8.4** | *A* (2;-2), | B (5; 2), | C (6; 0) | **8.19** | A (5; 0), | B (8; 4), | C (9; 2) |
| **8.5** | *A* (0; 0), | B (3; 4), | C (4; 2) | **8.20** | A (2; 3), | B (5; 7), | C (6; 5) |
| **8.6** | *A* (0; 1), | B (3; 5), | C (4; 3) | **8.21** | A (-9; 6), | B(3; -3), | C (7; 19) |
| **8.7** | *A* (3;-2), | B (6; 2), | C (7; 0) | **8.22** | A (1; 0), | B(13;9), | C (17; 13) |
| **8.8** | *A* (3;-3), | B (6; 1), | C (7; -1) | **8.23** | A (-4; 10), | B (8; 1), | C (12; 23) |
| **8.9** | *A*(-1; 1), | B (2; 5), | C (3; 3) | **8.24** | A (2; 5), | B(14;4), | C (18; 18) |
| **8.10** | *A* (4; 0), | B (7; 4), | C (8; 2) | **8.25** | A (-1; 4), | B(11;5), | C (15; 17) |
| **8.11** | *A* (2; 2), | B (5; 6), | C (6; 4) | **8.26** | A (-2; 7), | B(10;2), | C (8; 12) |
| **8.12** | *A* (4;-2), | B (7; 2), | C (8; 0) | **8.27** | A (-6; 8), | B(6; -1), | C (4; 13) |
| **8.13** | *A* (0; 2), | B (3; 6), | C (4; 4) | **8.28** | A (3; 6), | B(15;3), | C (13; 11) |
| **8.14** | *A* (4; 1), | B (7; 5), | C (8; 3) | **8.29** | A (-10; 5), | B(2; -4), | C (0; 10) |
| **8.15** | *A* (3; 2), | B (6; 6), | C (7; 4) | **8.30** | A (-4; 12), | B (8; 3), | C (6; 17) |

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арапова М. М. Элементы линейной алгебры / М. М. Арапова. – М.: МСХА, 1993. − 52 с.
2. Бугров Я. С. Высшая математика / Я. С. Бугров, С. М. Никольский, под ред. В. А. Садовничева. − 10-е изд., стер. − М.: Дрофа, 2009. В 3-х тт.
3. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: АСТ: Астрель, 2009. − 1055 с.
4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1986. − 320 с.
5. Колесников А. Н. Краткий курс математики для экономистов: Учебное пособие / А. Н. Колесников. – М.: ИНФРА-М, 2000. − 207 с.
6. Кондратенко Л. Н. Задачник-практикум по математике / Л. Н. Кондратенко. – Краснодар: ООО «ПринтТерра», 2010. − 201 с.
7. Красс М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании / М. С. Красс, Б. П. Чупрунов. – М: Дело, 2000. − 450с.
8. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономических специальностей: Учебник и Практикум (части I и II) / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб и доп. – М.: Высшее образование, 2007. – 893 с.
9. Малыхин В. И. Математическое моделирование экономики / В. И. Малыхин. – М.: УРАО, 1998. − 123 с.

10. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник/ Под. ред. В. И. Ермакова.− М.: ИНФРА-М, 2001. − 656 с.
11. Петунина И. А. Математика. Курс лекций и задания к самостоятельной работе для студентов экономических специальностей: Учеб. пособие для вузов в 3-х ч., ч. 1, 2-е изд., перераб. и доп. – Краснодар: ООО «ПринтТерра», 2009. − 326 с.
12. Солодовников А. С. Математика в экономике / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. Ч. 1. – М: Финансы и статистика, 1998. − 224 с.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Алгебраические выражения

**1.** $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$

**2.** $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$

**3.** $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$

**4.** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$

**5.** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$

**6.** $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4,$

**7.** $1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}),$

## Выделение полного квадрата

**1.** $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right),$

**2.** $x^2 + px + q = \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 - \dfrac{p^2}{4} + q.$

## Тригонометрические функции

**1.** $sin^2 x + cos^2 x = 1.$

**2.** $tgx = \frac{sin\, x}{cos\, x}.$

**3.** $sin(\alpha \pm \beta) = sin\,\alpha\, cos\,\beta \pm cos\,\alpha\, sin\,\beta.$

**4.** $cos(\alpha \pm \beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta \mp sin\,\alpha\, sin\,\beta.$

**5.** $sin\, 2\alpha = 2\, sin\,\alpha\, cos\,\alpha.$

**6.** $cos\, 2\alpha = cos^2 \alpha - sin^2 \alpha = 2 cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 sin^2 \alpha.$

**7.** $1 + cos\,\alpha = 2 cos^2 \frac{\alpha}{2}.$

**8.** $1 - cos\,\alpha = 2 sin^2 \frac{\alpha}{2}.$

Таблица П.1 − Значения тригонометрических функций

| | $0^o$ | $30^o$ | $45^o$ | $60^o$ | $90^o$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $sin\,\alpha$ | 0 | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| $cos\,\alpha$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1/2 | 0 |
| $tg\alpha$ | 0 | $1/\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\infty$ |
| $ctg\alpha$ | $\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $1/\sqrt{3}$ | 0 |

## Решение уравнений

**1.** $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

**2.** $x^2 + px + q = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$

$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$

**3.** $a^x = b, \quad x = log_a b.$

**4.** $log_a x = b, \quad x = a^b$.

## Обучающие тесты по линейной и векторной алгебре с элементами аналитической геометрии

| | Условия | Предлагаемые варианты ответов | Правильный вариант ответа |
|---|---|---|---|
| 1. | Матрицу А можно умножить на матрицу В, если | 1) число строк матрицы А равно числу строк матрицы В<br>2) число строк матрицы А равно числу столбцов матрицы В<br>3) число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В<br>4) число столбцов матрицы А и В равно<br>5) матрицы А и В любые | 3 |
| 2. | Матрица А имеет обратную, если | 1) матрица А любая<br>2) А-нулевая матрица<br>3) матрица А невырожденная<br>4) матрица А прямоугольная<br>5) матрица А симметрическая | 3 |
| 3 | Какое действие можно выполнить над матрицами $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и | 1) Сложение<br>2) Вычитание<br>3) Деление<br>4) Умножение | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 4 & 6 & 8\end{pmatrix}$ | 5) Дифференцирование | |
| 4 | Матрица , это... | 1) Число<br>2)Переменная величина<br>3) Прямоугольная таблица<br>4) Функция<br>5) Предел | 3 |
| 5 | Для матриц<br>$A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ и<br>$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 6\end{pmatrix}$<br>сумма A + B равна: | 1) $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 6\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 10\end{pmatrix}$<br>3) $\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -20 & 10\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ | 2 |
| 6 | Произведение матриц<br>A = (1 0 -5) и<br>$B=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 8\end{pmatrix}$<br>равно матрице: | 1) [2 0 -15]<br>2) ( 10 )<br>3) (-13 )<br>4) (-5 )<br>5) ( 7 ) | 3 |
| 7 | Размер матрицы<br>$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 6\\ -2 & 7 & -4\end{pmatrix}$<br>равен: | 1) 3х2 2) 6 3) 2х3<br>4) 5 5) 3 | 3 |
| 8 | Над матрицами нельзя выполнить действие: | 1)Умножение на число | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 2)Сложение (вычитание)<br>3)Деление<br>4)Умножение<br>5)Возведение в степень | |
| 9 | Разность В – А матриц<br>$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$<br>равна: | 1) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$<br>3) $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$<br>5) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ | 2 |
| 10 | В виде матрицы можно представить: | 1)Производную функции<br>2)Дифференциал<br>3)Систему уравнений<br>4)Неопределенный интеграл<br>5)Предел | 3 |
| 11 | Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 39 & 78 \\ 0 & 1 & -43 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ | 1) -243 2) 2<br>3) 0<br>4) 119 5) 1 | 2 |
| 12 | Расстояние между двумя точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ определяется по формуле: | 1) d=$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)}$<br>2) d=$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$<br>3) d=$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$<br>4) d=$\sqrt{x^2 + y^2}$ | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 5) $d^2=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2$ | |
| 13 | Даны матрицы: $A_{2x4}$, $B_{5x2}$, $C_{4x1}$. Существуют ли произведения: | 1) AxB 2) BxA<br>3) BxC 4) CxB<br>5) CxA | 2 |
| 14 | Дано произведение матриц<br>$A_{4x3}B_{mxn}=C_{4x2}$. Найти значения m и n | 1) m=3, n=2<br>2) m=2, n=3<br>3) m=3, n=3<br>4) m=2, n=4<br>5) m=4, n=3 | 1 |
| 15 | Ранг матрицы равен | 1) Числу ее строк<br>2) Числу ее столбцов<br>3) Сумме чисел строк и столбцов<br>4) Произведению чисел строк и столбцов<br>5) Наивысшему порядку отличного от нуля минора | 5 |
| 16 | При каком значении α определитель<br>$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$ ? | 1) $\alpha=0$<br>2) $\alpha\in R$<br>3) $\varnothing$<br>4) $\alpha=3$<br>5) $\alpha=1$ | 4 |
| 17 | Каково решение системы уравнений<br>$\begin{cases} 7x_1-2x_2-3x_3=-3 \\ x_1+5x_2+x_3=14 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=10 \end{cases}$ ? | 1) {-1; -2; 0}<br>2) {2; 2; 2}<br>3) {-2; 1; 6}<br>4) $\varnothing$<br>5) {0; 3; -1} | 5 |
| 18 | Что не может быть решени- | 1) {-1; 10; -7} | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ем однородной системы уравнений?<br>$\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3=0 \\ x_1-2x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$<br>$5x_1+4x_2-5x_3=0$ ? | 2) {0; 0; 0}<br>3) ∅<br>4) $\{\frac{1}{2}; -5; -\frac{7}{2}\}$<br>5) {2; -20; -14} | |
| 19 | Векторы ā=(-1; 2) $\bar{b}$=(4; -3) образуют базис, в котором вектор $\bar{c}$=2ā+3$\bar{b}$. Найти координаты вектора $\bar{c}$. | 1) $\bar{c}$=(10; -5) 2) $\bar{c}$=(-10; 5)<br>3) $\bar{c}$=(10; 5) 4) $\bar{c}$=(-10; -5)<br>5) $\bar{c}$=(-5; 10) | 1 |
| 20 | Найти координаты вектора ā, параллельного вектору<br>=(1; -1; 3), если их скалярное произведение ā$\bar{b}$=33 | 1) ā=(3; 3; -9) 2) ā=(3; -3; 9)<br>3) ā=(-3; 3; 9) 4) ā=(3; 3; 9)<br>5) ā=(-3; -3; -9) | 2 |
| 21 | Найти угловой коэффициент прямой 3x-5y+6=0. | 1) $k=-\frac{3}{5}$ 2) $k=\frac{3}{5}$<br>3) $k=\frac{5}{3}$ 4) k=2<br>5) k=-2 | 2 |
| 22 | Прямая, заданная уравнением y=x+3 | 1) биссектриса I, III координатных углов<br>2) проходит через начало координат<br>3) пересекает ось OX в точке (3; 0)<br>4) пересекает ось OY в точке (0; 3)<br>5) параллельна оси OX | 4 |
| 23 | Угловой коэффициент прямой 2x – 3y + 5 = 0 равен: | 1) 2/3<br>2) 3/2 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 3) 2<br>4) -3<br>5) -5 | 1 |
| 24 | Прямая, уравнение которой<br>2x – y + 3 = 0, проходит через точку: | 1) A (-1, 3)<br>2) B (0, 3)<br>3)C (4, 5)<br>4) D (1. 1)<br>5) E (2, 0) | 2 |
| 25 | Уравнению 3x + y – 5 = 0 соответствует: | 1) Окружность<br>2) Эллипс<br>3) Прямая<br>4) Гипербола<br>5) Кубическая парабола | 3 |
| 26 | Уравнение $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ - это: | 1) Окружность<br>2) Эллипс<br>3) Прямая<br>4) Гипербола<br>5) Кубическая парабола | 2 |
| 27 | Прямые 2x + y -1 = 0 и<br>x – y + 7 =0 пересекаются в точке: | 1)A(0,-2) 2) B(1,5) 3)C(-2,5) 4) D(2.5) 5) E (3, 1) | 3 |
| 28 | Прямые 5x – y + 6 = 0 и<br>5x – y – 2 = 0: | 1) Параллельны<br>2)Взаимно перпендику-лярны<br>3) Совпадают<br>4) Пересекаются под не-прямым углом | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 5) Скрещиваются | |
| 29 | Окружность<br>$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$ проходит через точку с координатами: | 1) A (2, 3)<br>2) B (-1, 0)<br>3) C (1, 2)<br>4) D (1. 1) 5) E (3, 1) | 4 |
| 30 | Расстояние между точками<br>A (1, 0) и B (5, 3) равно: | 1) 5<br>2) 3<br>3) $\sqrt{7}$<br>4) 1<br>5) 8 | 1 |
| 31 | Какие два уравнения определяют один тип кривой второго порядка<br>$x^2 + y^2 = 5$ (1), $x^2 - y^2/2 = 1$ (2), $x^2 = -3y$ (3), $y = 6/x$ (4). | 1) (1) и (2)<br>2) (2) и (4)<br>3) (1) и (3)<br>4) (3) и (4)<br>5) (1) и (4) | 2 |
| 32 | Если угловые коэффициенты двух прямых $k_1 = 3$ и<br>$k_2 = -1/3$, то эти прямые: | 1) Взаимно перпендикулярны<br>2) Параллельны<br>3) Совпадают<br>4) Не пересекаются<br>5) Скрещиваются | 1 |
| 33 | Уравнение окружности с центром в точке (0; 2) имеет вид: | 1) $x^2+(y-2)^2=R$<br>2) $x^2+y^2=R^2$<br>3) $\sqrt{x^2+(y-2)^2} = R$<br>4) $(x+2)^2+y^2=R^2$ | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 5) $\sqrt{(x-2)^2-y^2}=R$ | |
| 34 | Уравнение эллипса имеет вид: | 1) $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$<br>2) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 3) $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$<br>4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=R^2$ 5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ | 5 |
| 35 | Какие из перечисленных прямых параллельны<br>$l_1$ 2x-3y+1=0<br>$l_2$ y= $-\frac{2}{3}$x+4<br>$l_3$ $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}$=-1<br>$l_4$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}$ | 1) $l_1//l_2$<br>2) $l_2//l_4$<br>3) $l_1//l_4$<br>4) $l_2//l_3$<br>5) $l_1//l_3$ | 5 |
| 36 | Какая из прямых проходит через точку пересечения прямых 3x+2y-5=0 и x-4y+3=0 ? | 1) x+y-2=0<br>2) x-y-2=0<br>3) x-y+2=0<br>4) x+y+2=0<br>5) x+y-1=0 | 1 |
| 37 | Решением какой системы неравенств является выпуклый треугольник с вершинами A(1;1), B(1;4), C(2;2) ? | 1) $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\le x \\ 2x+y-6\ge 0 \end{cases}$<br>2) $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\le x \\ 2x+y-6\le 0 \end{cases}$ | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 3) $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq x \\ 2x + y - 6 \leq 0 \end{cases}$<br><br>4) $\begin{cases} x \leq 1 \\ y \geq x \\ 2x + y - 6 \geq 0 \end{cases}$ 5)<br>$\begin{cases} x \leq 1 \\ y \geq x \\ 2x + y - 6 \leq 0 \end{cases}$ | |
| 38 | Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+2y^2+3z^2=6$ в точке $M_0(1; -1; 1)$. | 1) x-2y+3z-6=0<br>2) 2x-2y+3z-7=0<br>3) x+y+3z-3=0<br>4) 3x-2y+3z-10=0<br>5) x+y-z=1 | 1 |