МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет прикладной информатики

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по НИР

_____________ А.Г. Кощаев

«___»______________2015 г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
КУРС ЛЕКЦИЙ

Учебно-методическое пособие для аспирантов
по направлению **38.06.01 Экономика**

по профилю **Математические и инструментальные методы экономики**

Краснодар 2015

Лекция 1.

Понятие Марковского случайного процесса. Потоки событий.

Учебные вопросы.

1. Марковские процессы.
2. Потоки событий.

1. Марковские процессы.

Определение. Случайный процесс, протекающий в системе, называется марковским, если для любого момента времени to вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент to и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Пусть в настоящий момент to система находится в определенном состоянии So (рис.1)

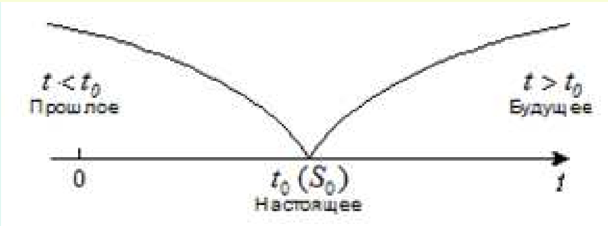

Рис.1 К понятию Марковского случайного процесса

В момент to известно состояние системы So и вся предыстория процесса, т.е. все, что было при t<to. Нас интересует будущее(t>to).

Если процесс марковский, то предсказывать его развитие можно, только учитывая настоящее состояние системы So, не учитывая его предысторию. Иначе формулируя, в марковском процессе «будущее зависит от прошлого только через настоящее».

На практике марковские процессы в чистом виде обычно не встречаются, но нередко приходится иметь дело с процессами, для которых влиянием предыстории можно пренебречь. При их изучении можно с успехом применять марковские модели.

В исследовании операций большое значение имеют так называемые *марковские процессы с дискретным состоянием и непрерывным временем.*

Определение. Процесс называется процессом с непрерывным временем, если моменты возможных переходов из состояния в состояние не фиксированы заранее, а неопределены, случайны, если переход может осуществиться, в принципе, в любой момент.

2.Потоки событий.

Определение. Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Например, поток вызовов на телефонной станции; поток сбоев ЭВМ.

Поток событий можно наглядно изобразить рядом точек на оси времени 0t, причем положение их случайно (рис.2).

Рис.2 Поток событий

Важной характеристикой потока событий является его интенсивность – среднее число событий, приходящееся на единицу времени. Интенсивность может быть как постоянной, так и переменной, зависящей от времени t.

Определение. Поток событий называется <u>простейшим</u> (или стационарным пуассоновским), если он обладает сразу тремя свойствами:

- стационарен,
- ординарен,
- последействия.

Для простейшего потока с интенсивностью λ интервал T между событиями имеет так называемое показательное распределение:

$$P(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

с плотностью вероятности

$f(t)= *e^{-t}$ $(t>0)$ (1)

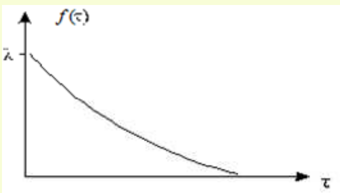

Рис.3 - Показательное распределение

Величина λ в формуле (1) называется параметром показательного закона. Если интервал T между событиями

$$T \le 1/\lambda, \qquad (2)$$

то такой интервал называют коротким.

Для простейшего потока характерно, что короткие интервалы между событиями более вероятны, чем длинные; ≈ 63 % промежутков времени между событиями имеют длину меньше средней, равной $1/\lambda$.

Таким образом, предположение о действии на вычислительную систему простейшего потока заявок создает более тяжелые условия для ее работы, чем при других потоках, что позволяет считать результаты анализа ВС для простейших потоков заявок более надежными.

В расчетах, связанных с потоками событий, очень удобно пользоваться понятием «элемента вероятности». Рассмотрим на оси Ot простейший поток с интенсивностью и произвольно расположенный элементарный участок времени dt.

Определение. Элементом вероятности называется вероятность попадания на этот участок хотя бы одного события потока.

$$P_{\Delta t} = \Delta t \qquad (3)$$

то есть для простейшего потока элемент вероятности равен интенсивности потока, умноженной на длину элементарного участка.

Элемент вероятности из-за отсутствия последействия, совершенно не зависит от того, сколько событий и когда появлялись ранее.

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 P_i$$

Лекция 2.
Уравнения Колмогорова.

Учебные вопросы.

1. Уравнения Колмогорова для заданной системы.

Пусть техническое устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, тоже продолжающийся заранее неизвестное, случайное время.

Возможные состояния системы можно перечислить:

S_0 – оба узла исправны;

S_1 - первый узел ремонтируется, второй исправен;

S_2 - второй узел ремонтируется, первый исправен;

S_3 – оба узла ремонтируются.

Переходы системы из состояния в состояние происходят практически мгновенно, в случайные моменты выхода из строя того или другого узла или окончания ремонта.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться графом состояний, в котором состояния системы изображаются окружностями, а возможные переходы из состояние в состояние – стрелками, соединяющими состояния.

В момент to известно состояние системы So и вся предыстория процесса, т.е. все, что было при t<to. Нас интересует будущее(t>to).

Граф состояний для рассмотренного выше примера изображен на рис.4.

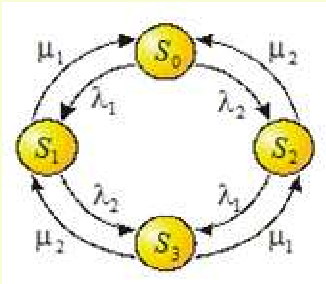

Рис.4 Граф состояний

Стрелка, направленная из S_0 в S_1, означает переход в момент отказа первого узла; стрелка, направленная обратно, из S_1 в S_0 - переход в момент окончания ремонта этого узла. Остальные стрелки объясняются аналогично.

Буквой μ_i обозначена интенсивность ремонта i-го узла.

Вероятностью i-го состояния называется вероятность Pi(t) того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i . Очевидно, что для любого момента сумма всех вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(t) = 1 \qquad (4)$$

Составим уравнения Колмогорова для заданной системы.

Рассмотрим одну из вероятностей состояний, например $P_0(t)$. Это вероятность того, что в момент t система будет в состоянии S_0.

Придадим t малое приращение Δt и найдем $P_0(t+\Delta t)$ – вероятность того, что в момент $(t+\Delta t)$ система будет в состоянии S_0.

Произойти это может тремя способами: либо в момент t система уже была в состоянии S_0, а за время Δt не вышла из него;

либо в момент t система была в состоянии S_1, а за время Δt перешла из него в S_0;

либо в момент t система была в состоянии S_2, а за время Δt перешла из него в S_0.

Найдем вероятность первого варианта. Вероятность того, что в момент t система была в состоянии S_0 , равна $P_0(t)$.

Эту вероятность нужно умножить на вероятность того, что, находившись в момент t в состоянии S_0, система за время Δt не перейдет из него в другое состояние.

Суммарный поток событий, выводящий систему из состояния S_0, будет простейший, с интенсивностью

$(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Значит, вероятность того, что за время Δt система выйдет из состояния S_0, равна $(\lambda_1 + \lambda_2) * \Delta t$; вероятность того, что не выйдет: $(1-(\lambda_1+\lambda_2) * \Delta t)$.

Отсюда вероятность первого варианта равна $P_0(t) * (1- (\lambda_1 + \lambda_2) * \Delta t)$.

Вероятность второго варианта равна (λ_1*Δt*P_1(t)); третьего (λ_2*Δt* P_2(t)).

Складывая вероятности всех вариантов, получим:

$$P_0(t+\Delta t)= P_0(t)^* [1-(\lambda_1 + \lambda_2)^* \Delta t]+ \lambda_1{}^*\Delta t^* P_1(t)+ \lambda_2{}^*\Delta t^* P_2(t) \quad (5)$$

Раскроем квадратные скобки, перенесем P_0(t) в левую часть и разделим обе части на Δt:

$$\frac{\left(P_0\left(t+dt\right)-P_0\left(t\right)\right)}{\Delta t}=P_1(t)\cdot\mu_1-P_0(t)\cdot(\lambda_1+\lambda_2)+P_2(t)\cdot\mu_2 \quad (6)$$

Устремив *Δt* к нулю, получим:

$$\frac{dP_0}{dt}=P_1\cdot\mu_1+P_2\cdot\mu_2-P_0\cdot(\lambda_1+\lambda_2) \quad (7)$$

Это первое уравнение Колмогорова. Аналогично составляются и следующие уравнения.

Сформулируем теперь общее правило составления уравнений Колмогорова.

В левой части каждого из них стоит производная вероятности данного состояния.

В правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводяших систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного состояния.

Пользуясь этим правилом, получим уравнения Колмогорова для рассмотренной системы S:

$$\frac{dP_0}{dt} = P_1 \cdot \mu_1 + P_2 \cdot \mu_2 - P_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)$$
$$\frac{dP_1}{dt} = P_0 \cdot \lambda_1 + P_3 \cdot \mu_2 - P_1 \cdot (\mu_1 + \lambda_2)$$
$$\frac{dP_2}{dt} = P_0 \cdot \lambda_2 + P_3 \cdot \mu_1 - P_2 \cdot (\lambda_1 + \mu_2) \qquad (8)$$
$$\frac{dP_3}{dt} = P_1 \cdot \lambda_2 + P_2 \cdot \lambda_1 - P_3 \cdot (\mu_1 + \mu_2).$$

Чтобы решить эти уравнения и найти вероятности состояний, необходимо задать начальные условия.

Колмогорова положить равными нулю и решить полученную систему уже не дифференциальных, а линейных алгебраических уравнений. Для нашей системы они будут выглядеть следующим образом:

$$P_1 * \mu_1 + P_2 * \mu_2 = P_0 * (\lambda_1 + \lambda_2)$$
$$P_0 * \lambda_1 + P_3 * \mu_2 = P_1 * (\mu_1 + \lambda_2) \qquad (9)$$
$$P_0 * \lambda_2 + P_3 * \mu_1 = P_2 * (\lambda_1 + \mu_2)$$
$$P_1 * \lambda_2 + P_2 * \lambda_1 = P_3 * (\mu_1 + \mu \lambda_2)$$

Для решения этой системы необходимо воспользоваться нормировочным условием $P_0+P_1+P_2+P_3 = 1$.

Лекция 3.

Базовые соотношения систем массового обслуживания: схема гибели и размножения, формула Литтла. Задача Эрланга.

Учебные вопросы.

1. **Схема гибели и размножения.**
2. **Формула Литтла.**
3. **Задача Эрланга.**

Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет вид, показан на рис. 5.

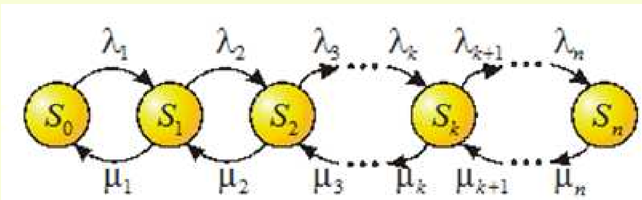

Рис.5 - Схема гибели и размножения

Особенность этого графа в том, что все состояния системы можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний (S_1, S_2, ...,S_{n-1}) связано прямой и обратной стрелкой с каждым из соседних состояний – правым и левым, а крайние состояния (S_0 ,S_n) – только с одним соседним состоянием.

Термин «схема гибели и размножения» ведет начало от биологических задач, где подобной схемой описывается изменение численности популяции.

Пользуясь графом рис.5, составим и решим алгебраические уравнения Кирхгофа для финальных вероятностей состояний.

Для состояния S_0:

$$P_0 \lambda_1 = P_1 \mu_1 \qquad (10)$$

Для состояния S_1:

$$P_1 (\mu_1 + \lambda_2) = P_0 \lambda_1 + P_2 \mu_2$$

Или, с учетом уравнения (10), для состояния S_1 окончательно:

$$P_1 \lambda_2 = P_2 \mu_2$$

Очевидно, для состояния S_2 получим:

$$P_2 \lambda_3 = P_3 \mu_2$$

Из уравнения для состояния S_0 выразим P_1 через P_0:

$$P_1 = P_0 \cdot \frac{\lambda_1}{\mu_1} \qquad (11)$$

С учетом (11), получим для вероятности P_2:

$$P_2 = P_1 \cdot \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\mu_1 \cdot \mu_2} \cdot P_0 \qquad (12)$$

С учетом (12), для P_3:

$$P_3 = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3}{\mu_1 \cdot \mu_2 \mu_3} \cdot P_0 \qquad (13)$$

И вообще, для любого k (от 1 до n)

$$P_K = \frac{\lambda_k \cdot \lambda_{k-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_1}{\mu_k \cdot \mu_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mu_1} \cdot P_0 \qquad (14)$$

Таким образом, все вероятности состояний выражаются через P_0.

Подставив эти выражения в нормировочное условие (4) и вынеся P_0 за скобку, получим:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\mu_1 \cdot \mu_2} + \ldots + \frac{\lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_1}{\mu_n \cdot \mu_{n-1} \cdot \ldots \cdot \mu_1}\right)^{-1} \qquad (15)$$

Полученные формулы очень полезны при решении простейших задач теории массового обслуживания.

2.**Формула Литтла.**

Выведем формулу, связывающую среднее число заявок $L_{сист}$, находящихся в системе массового обслуживания, и среднее время пребывания заявки в системе $W_{сист}$.

Рассмотрим любую СМО и связанные с нею два потока событий:

X(t) – число заявок, прибывших в СМО до момента t;

Y(t) – число заявок, покинувших СМО до момента t.

Обе функции являются случайными и меняются скачком (увеличиваются на единицу в моменты приходов и уходов заявок). Вид функции X(t) и Y(t) показан на рис.6

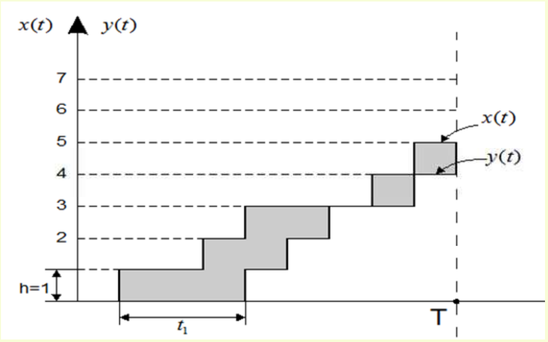

Рис.6 К выводу формулы Литтла

Обе линии - ступенчатые, верхняя – X(t), нижняя – Y(t).

Для любого момента t их разность Z(t)=X(t)-Y(t) есть не что иное, как число заявок, находящихся в СМО. Когда линии X(t) и Y(t) сливаются, в системе нет заявок.

Рассмотрим очень большой промежуток времени T и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО. Оно будет равно интегралу от функции Z(t) на этом промежутке, деленному на длину интервала T:

$$L_{сист} = \frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt \qquad (16)$$

Интеграл представляет собой не что иное, как площадь фигуры, заштрихованной на рис. 6, состоящей из прямоугольников высотой, равной единице и основанием t_i.

Поэтому, можно считать, что

$$\int_o^T Z(t)dt = 1\sum_i t_i, \qquad (17)$$

где сумма распространяется на все заявки, пришедшие за время T.

Рассмотрим очень большой промежуток времени T и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО. Оно будет равно интегралу от функции Z(t) на этом промежутке, деленному на длину интервала T:

$$L_{сист} = \frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt \qquad (16)$$

Интеграл представляет собой не что иное, как площадь фигуры, заштрихованной на рис. 6, состоящей из прямоугольников высотой, равной единице и основанием t_i.

Поэтому, можно считать, что

$$\int_o^T Z(t)dt = 1\sum_i t_i, \qquad (17)$$

где сумма распространяется на все заявки, пришедшие за время T.

Рассмотрим очень большой промежуток времени T и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО. Оно будет равно интегралу от функции Z(t) на этом промежутке, деленному на длину интервала T:

$$L_{сист} = \frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt \qquad (16)$$

Интеграл представляет собой не что иное, как площадь фигуры, заштрихованной на рис. 6, состоящей из прямоугольников высотой, равной единице и основанием t_i.

Поэтому, можно считать, что

$$\int_o^T Z(t)dt = 1\sum_i t_i, \qquad (17)$$

где сумма распространяется на все заявки, пришедшие за время T.

Разделим правую и левую часть (17) на длину интервала T, получим с учетом (16):

$$L_{сист} = \frac{1}{T}\sum_i t_i \qquad (18)$$

Разделим и умножим правую часть (3.18) на интенсивность :

$$L_{сист} = \frac{1}{T\lambda}\sum_i t_i \cdot \lambda \qquad (19)$$

Но величина Tλ есть не что иное, как среднее число заявок, пришедших за время T. Если мы разделим сумму всех времен t_i на среднее число заявок, то получим среднее время пребывания заявки в системе $W_{сист}$.

$$L_{сист} = \lambda \cdot W_{сист} \quad ,$$

Откуда получаем формулу Литтла

$$W_{сист} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{сист} \qquad (20)$$

Формула показывает, что для любой СМО, при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявки в системе равно среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок.

Точно таким же образом выводим вторую формулу Литтла, связывающую среднее время пребывания заявки в очереди $W_{оч}$ и среднее число заявок в очереди $L_{оч}$:

$$W_{оч} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{оч} \qquad (21)$$

3.Задача Эрланга.

Пусть имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживания одним каналом имеет интенсивность μ (величина, обратная среднему времени обслуживания t_{ob}). Найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:

А – абсолютную пропускную способность, то есть среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

Q – относительную пропускную способность, то есть среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой;

$P_{отк}$ - вероятность отказа, то есть того, что заявка покинет СМО необслуженной;

– среднее число занятых каналов.

Состояние системы массового обслуживания S будем нумеровать по числу заявок, находящихся в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов):

S_0 – в СМО нет ни одной заявки;

S_1 - в СМО находится одна заявка (один канал занят, остальные свободны);

. . . . .

S_k - в СМО находится k заявок (k каналов заняты, остальные свободны)

S_n - в СМО находятся n заявок (все n каналов заняты).

Граф состояний СМО выглядит следующим образом (рис.7):

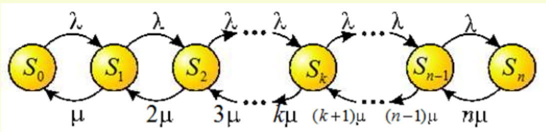

Рис.7 – Граф состояний многоканальной СМО
с отказами

Разметим этот граф – проставим у стрелок интенсивности потоков событий. Интенсивности потоков λ все одинаковы, что естественно, так как на СМО действует один и тот же внешний поток заявок на обслуживание.

Интенсивности же потоков обслуживания увеличиваются с каждым занятым каналом. А теперь, зная все интенсивности, воспользуемся уже готовыми формулами для финальных вероятностей в системе гибели-размножения. Получим:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} + \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1} \qquad (22)$$

Члены разложения $\frac{\lambda}{\mu}$, ..., $\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}$ будут представлять

собой коэффициенты при P_0 в выражениях для P_1, P_2 ,...P_n:

(3.23)

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \cdot P_0$$

$$\ldots\ldots$$

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} \cdot P_0 \qquad (23)$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} \cdot P_0$$

Заметим, что в формулы (22), (23) интенсивности λ и μ входят не по отдельности, а только в виде отношения λ/μ. Обозначим

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho \qquad (3.24)$$

и будем называть величину ρ приведенной интенсивностью потока заявок. Ее смысл - среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки. Пользуясь этим обозначением, перепишем формулы (22), (23) в виде:

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \Lambda\ + \frac{\rho^k}{k!} + \Lambda\ + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} \\
&P_1 = \rho \cdot P_0 \\
&P_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot P_0 \\
&\Lambda \\
&P_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0 \\
&\mathrm{K} \\
&P_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0
\end{aligned}
\qquad (25)
$$

Формулы (25) для финальных вероятностей состояний называются формулами Эрланга - в честь основателя теории массового обслуживания.

Лекция 4.

Одноканальная СМО с неограниченной очередью.

Учебные вопросы.

1. Одноканальные СМО.

2. Среднее число заявок в СМО.

1.Одноканальные СМО.

На практике довольно часто встречаются одноканальные СМО с очередью (врач, обслуживающий пациентов; телефон-автомат с одной будкой; ЭВМ, выполняющая заказы пользователей).

Пусть имеется одноканальная СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания).

На эту СМО поступает поток заявок с интенсивностью λ ; поток обслуживаний имеет интенсивность μ, обратную среднему времени обслуживания заявки $t_{об}$.

Требуется найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:

- $L_{сист}$- среднее число заявок в системе;
- $W_{сист}$- среднее время пребывания заявки в системе;
- $L_{оч}$- среднее число заявок в очереди;
- $W_{оч}$- среднее время пребывания заявки в очереди;
- $P_{зан}$- вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала).

Абсолютную пропускной способности А и относительную Q, вычислять нет надобности: в силу того, что очередь не ограничена, каждая заявка рано или поздно будет обслужена, поэтому А = λ, по той же причине Q=1.

Решение. Состояния системы будем нумеровать по числу заявок, находящихся в СМО:

S_0- канал свободен;

S_1- канал занят, очереди нет;

S_2- канал занят, одна заявка стоит в очереди; и т.д.

Теоретически число состояний ничем не ограничено. Граф состояний имеет вид (рис.8).

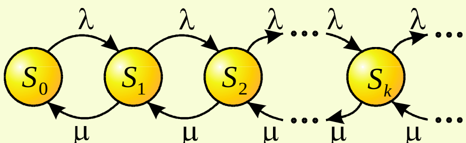

Рис.8 Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью

Это - схема гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний.

По всем стрелкам поток заявок с интенсивностью λ переводит систему слева направо, а справа налево - поток обслуживаний с интенсивностью μ.

Если $\lambda > \mu$, то канал с заявками не справляется, очередь растет до бесконечности. Если $\lambda \le \mu$, то задача вполне разрешима.

Воспользуемся формулами для финальных вероятностей из схемы гибели и размножения и для бесконечного числа состояний. Подсчитаем финальные вероятности :

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^k + \ldots)^{-1} \quad (30)$$

Ряд в формуле (30) представляет собой геометрическую прогрессию.

Известно, что при $\rho < 1$ ряд сходится; при $\rho \ge 1$ ряд расходится. Теперь предположим, что это условие выполнено, и $\rho < 1$. Суммируя прогрессию в (30), получаем

$$1 + \rho + \rho^2 + \ldots = \frac{1}{1-\rho}$$

откуда

$$p_0 = 1 - \rho \quad (31)$$

.

Вероятности p_1, p_2,...,p_k,... найдутся по формулам:

$$p_1 = \rho \cdot p_0 \quad , \quad p_2 = \rho^2 \cdot p_0 \; , \; \ldots , \quad p_k = \rho^k \cdot p_0 \quad \ldots ,$$

откуда с учетом (31) найдем окончательно:

$$p_1 = \rho \cdot (1-\rho) \; , \quad p_2 = \rho^2 \cdot (1-\rho) \quad , \; \ldots \; , \; p_k = \rho^k \cdot (1-\rho) \quad . \qquad (32)$$

Как видно, вероятности p_0, p_1... образуют геометрическую прогрессию со знаменателем . Как ни странно, максимальная из них p_0 - вероятность того, что канал будет вообще свободен.

Как бы ни была загружена система с очередью, если только она вообще справляется с потоком заявок, самое вероятное число заявок в системе будет равно нулю.

2.Среднее число заявок в СМО.

Найдем среднее число заявок в СМО $L_{сист}$. Случайная величина Z – число заявок в системе- имеет возможные значения 0,1,2,...,k,... с вероятностями p_0, p_1,..., p_k,... Ее математическое ожидание равно

$$L_{сист} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \ldots + k \cdot p_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k \qquad (33)$$

Подставим в (33) выражение для p_k из (32):

$$L_{сист} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^k \cdot (1-\rho) = \rho \cdot (1-\rho) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^{k-1}$$

Произведение $k \cdot \rho^{k-1}$ есть ни что иное, как производная по ρ от выражения ρ ^{k}; значит,

$$L_{сист} = \rho \cdot (1-\rho) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \cdot \rho^k = \rho \cdot (1-\rho) \cdot \frac{d}{d\rho} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \qquad (3.34)$$

Но сумма в (34) есть не что иное, как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом ρ и знаменателем ρ; эта сумма равна $\frac{\rho}{1-\rho}$, а ее производная $\frac{1}{(1-\rho)^2}$. Подставляя это выражение в (34), получим:

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (35)$$

Теперь применим формулу Литтла и найдем среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_{сист} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1-\rho)} \qquad (3.36)$$

Найдем среднее число заявок в очереди $L_{оч}$. Будем рассуждать так: число заявок в очереди равно числу заявок в системе минус число заявок, находящихся под обслуживанием. Значит (по правилу сложения математических ожиданий), среднее число заявок в очереди $L_{оч}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{сист}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.

Но сумма в (34) есть не что иное, как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом ρ и знаменателем ρ; эта сумма равна $\frac{\rho}{1-\rho}$, а ее производная $\frac{1}{(1-\rho)^2}$. Подставляя это выражение в (34), получим:

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (35)$$

Теперь применим формулу Литтла и найдем среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_{сист} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1-\rho)} \qquad (3.36)$$

Найдем среднее число заявок в очереди $L_{оч}$. Будем рассуждать так: число заявок в очереди равно числу заявок в системе минус число заявок, находящихся под обслуживанием. Значит (по правилу сложения математических ожиданий), среднее число заявок в очереди $L_{оч}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{сист}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.

9

Лекция 5.

Многоканальная СМО с неограниченной очередью.

Учебные вопросы.

1. Многоканальная СМО.

2. Среднее число заявок в СМО.

1.Одноканальные СМО.

Аналогично одноканальной СМО решается задача о многоканальной СМО с неограниченной очередью. Нумерация каналов- опять по числу заявок, находящихся в очереди:

S_0- все каналы свободны;

S_1- один канал занят, очереди нет;

S_2- занято два канала;

....

S_n- занято n каналов;

S_{n+1}- заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди;

....

S_{n+r}- заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди;

На эту СМО поступает поток заявок с интенсивностью λ ; поток обслуживаний имеет интенсивность μ, обратную среднему времени обслуживания заявки $t_{об}$.

Требуется найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:

- $L_{сист}$- среднее число заявок в системе;
- $W_{сист}$- среднее время пребывания заявки в системе;
- $L_{оч}$- среднее число заявок в очереди;
- $W_{оч}$- среднее время пребывания заявки в очереди;
- $P_{зан}$- вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала).

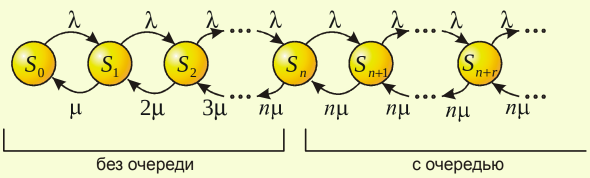

Рис.9 Граф состояний многоканальной СМО с неограниченной очередью

Граф состояний показан на рис.9. Граф есть схема гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний.

Естественное условие существования финальных вероятностей- $\frac{\rho}{n}<1$. Если $\frac{\rho}{n}\geq 1$, очередь растет до бесконечности. Предположим, что условие $\frac{\rho}{n}<1$ выполнено, и финальные вероятности существуют.

Применяя формулы для схемы гибели и размножения, найдем эти финальные вероятности. В выражении для P_0 будет стоять ряд членов, содержащих факториалы, плюс сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{\rho}{n}$. Суммируя ее, найдем

$$\begin{cases} p_0 = (1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n! \cdot (n-\rho)})^{-1} \\ p_1 = \frac{\rho}{1!} \cdot p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0, \\ p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0, \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0, \ldots \end{cases} \quad (41)$$

Теперь найдем характеристики эффективности СМО. Из них легче всего находится среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

(это вообще справедливо для любой СМО с неограниченной очередью).

Найдем среднее число заявок в системе $L_{сист}$ и среднее число заявок в очереди $L_{оч}$.

Из них легче вычислить второе по формуле $L_{оч} = \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot p_{n+r}$; выполняя соответствующие преобразования по образцу одноканальной СМО с неограниченной очередью, получим:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} \cdot p_0}{n \cdot n! \cdot (1 - \rho / n)^2} \quad (42)$$

Прибавляя к нему среднее число заявок под обслуживанием (оно же- среднее число занятых каналов) $\bar{k} = \rho$, получаем:

$$L_{сист} = L_{оч} + \rho \qquad (43)$$

Деля выражение для $L_{сист}$ и $L_{оч}$ на λ , по формуле Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{оч} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{оч} \quad , \quad W_{сист} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{сист}$$

2.Среднее число заявок в СМО.

Найдем среднее число заявок в СМО $L_{сист}$. Случайная величина Z – число заявок в системе- имеет возможные значения 0,1,2,...,k,... с вероятностями p_0, p_1,..., p_k,... Ее математическое ожидание равно

$$L_{сист} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \ldots + k \cdot p_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k \qquad (33)$$

Подставим в (33) выражение для p_k из (32):

$$L_{сист} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^k \cdot (1-\rho) = \rho \cdot (1-\rho) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^{k-1}$$

Произведение $k \cdot \rho^{k-1}$ есть ни что иное, как производная по ρ от выражения ρ^k; значит,

$$L_{сист} = \rho \cdot (1-\rho) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \cdot \rho^k = \rho \cdot (1-\rho) \cdot \frac{d}{d\rho} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \qquad (3.34)$$

Но сумма в (34) есть не что иное, как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом ρ и знаменателем ρ; эта сумма равна $\frac{\rho}{1-\rho}$, а ее производная $\frac{1}{(1-\rho)^2}$. Подставляя это выражение в (34), получим:

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (35)$$

Теперь применим формулу Литтла и найдем среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_{сист} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1-\rho)} \qquad (3.36)$$

Найдем среднее число заявок в очереди $L_{оч}$. Будем рассуждать так: число заявок в очереди равно числу заявок в системе минус число заявок, находящихся под обслуживанием. Значит (по правилу сложения математических ожиданий), среднее число заявок в очереди $L_{оч}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{сист}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.

Число заявок под обслуживанием может быть либо нулем (канал свободен), либо единицей (канал занят). Математическое ожидание такой случайной величины равно вероятности того, что канал занят ($P_{зан}$). Очевидно, $P_{зан}$ равно 1 минус вероятность p_0 того, что канал свободен:

$$P_{зан} = 1 - p_0 = \rho \qquad (37)$$

Следовательно, среднее число заявок под обслуживанием равно

$$L_{оч} = \rho \qquad (38)$$

Отсюда $L_{оч} = L_{сист} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$

и окончательно

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (39).$$

По формуле Литтла найдем среднее время пребывания заявки в очереди:

$$W_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)} \qquad (40)$$

Лекция 6.

Анализ методов случайного доступа к каналу в ЛВС. Методы Алоха.

Учебные вопросы.

1. **Способы доступа к общей среде передачи.**

2. **Методы Алоха.**

1.Способы доступа к общей среде передачи

Двумя основными способами доступа к общей среде передачи являются управляемый доступ с применением опроса и случайный доступ. В свою очередь существуют различные типы стратегий случайного доступа.

Методы случайного доступа полностью децентрализованы. Пользователь может передавать когда угодно, лишь с незначительными ограничениями, зависящими от метода доступа.

Из-за случайности моментов времени, в которые пользователи могут решить начать передачу, независимо от метода не исключена возможность того, что два или несколько пользователей могут выйти на связь в пересекающиеся промежутки времени.

Это приводит к столкновениям (***коллизиям***), которые сначала должны быть распознаны, а затем разрешены.

При увеличении нагрузки увеличивается и вероятность коллизий, что приводит к возможной неустойчивости работы рассматриваемых механизмов.

В результате производительность ограничивается некоторым максимальным значением, меньшим пропускной способности канала, и это значение в каждом случае зависит от первоначального механизма доступа и алгоритма разрешения коллизий.

1.Методы Алоха.

Рассмотрим два простейших типа стратегии случайного доступа: ***чистую Алоху*** и ***синхронную Алоху*** .

Чистая Алоха

Эта схема сначала была применена для доступа к общему каналу сотрудниками Гавайского университета в начале 1970-х годов.

По этой схеме пользователь, желающий передать сообщение, делает это когда угодно.

В результате могут наложиться во времени два или несколько сообщений, вызвав столкновение (коллизию).

Распознавание коллизий и сообщение о них пострадавшим пользователям в первоначальной системе Алоха направлялись по радио на центральный пункт.

Также это могло осуществляться применением положительных подтверждений в сочетании с перерывом.

При обнаружении столкновения пострадавшие станции предпринимают попытки повторной передачи потерянного сообщения, но они должны распределять время попыток случайным образом, следуя некоторому алгоритму, уменьшающему возможность возникновения нового конфликта.

Стратегия доступа типа Чистая Алоха позволяет добиться производительности самое большее 1/2e ≈ 0,18 пропускной способности канала.

Введем сначала некоторые определения. За доступ к каналу состязаются N станций. Станция передает, в среднем, λ пакетов в секунду (интенсивность обращений к сети).

Величина 1/m представляет собой пропускную способность канала (μ) в передаваемых пакетах в секунду.

Рассмотрим частный случай, при котором все передаваемые сообщения (пакеты) имеют среднюю длину, соответствующую *m* единицам времени передачи.

Будем считать, что интенсивность нагрузки S (эквивалентно ρ - нормированной по μ нагрузке) характеризует использование канала вновь поступающими пакетами $S \equiv \rho = N\lambda m$

Стратегия доступа типа Чистая Алоха позволяет добиться производительности самое большее $1/2e \approx 0{,}18$ пропускной способности канала.

Величина $1/m$, которая обозначается μ, представляет собой пропускную способность канала в передаваемых пакетах в секунду. Таким образом, $N\lambda/\mu = N\lambda m$ - относительное использование канала, или производительность, нормированная относительно μ. Общая интенсивность пакетов, передаваемых в канал, включая вновь генерируемые и передаваемые повторно, имеет некоторое значение $\lambda' > \lambda$ (из-за коллизий от каждого компьютера будет передаваться больше сообщений из-за необходимости возобновлять поток). Тогда фактическая интенсивность нагрузки, или использование канала, является параметром G, который равен $\boldsymbol{G = N\lambda' m}$.

Рассмотрим типичное сообщение длительностью m, показанное на рисунке 22.

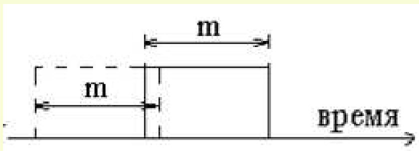

Рис .22 Столкновение двух сообщений

Оно подвергается столкновению с другим сообщением, если эти два сообщения будут наложены одно на другое в любой точке.

Легко заметить, передвигая пунктирное сообщение во времени, что столкновение может произойти в промежутке времени продолжительностью $2m$ с. Вероятность того, что в промежутке $2m$ с не произойдет столкновения, равна $e^{-2N\lambda' m} = e^{-2G}$.

Отношение **S/G** представляет долю сообщений из числа передаваемых в канал, которые проходят успешно. Это число должно быть равно вероятности отсутствия столкновений. Таким образом уравнение производительности для чистой Алохи:

$$\mathbf{S = Ge^{-2G}.} \qquad (4.11).$$

Здесь S - нормированная производительность (средняя скорость поступления пакетов, деленная на максимальную производительность 1/m), а G - нормированная пропущенная нагрузка. Таким образом, S – независимая переменная, а G - ее функция. График зависимости G от S имеет вид двузначной кривой (рис .23).

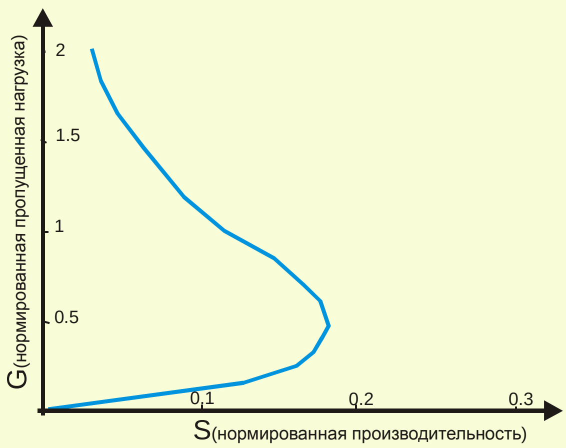

Рис.23 Характеристика производительности;
Чистая Алоха

Отметим, что S имеет максимум $S = 0{,}5e^{-1} \approx 0{,}18$ при $G = 0{,}5$. Судя по формуле (4.11) или кривой при малой поступающей нагрузке S столкновения происходят редко и $G \approx S$.

Когда S начинает расти, приближаясь к максимальному значению 0.18, число столкновений быстро увеличивается, что ведет в свою очередь к росту вероятности столкновения. Система теряет устойчивость, S падает, а G увеличивается до больших значений.

Синхронная Алоха

Максимально возможная производительность схемы чистой Алохи может быть удвоена с помощью простого приема пазметки шкалы времени и разрешения пользователям начинать попытки передачи сообщений только в начале каждого временного интервала m (равного длительности сообщения).

Эта схема требует, чтобы работа всех пользователей системы была синхронизирована во времени. Пример работы такой системы показан на рисунке 4.24, на котором одно сообщение передано успешно, а с другим произошло столкновение.

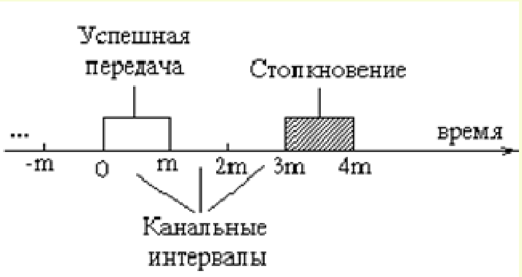

Рисунок 4.24-Передача при синхронной Алохе

Поскольку сообщения могут быть переданы только в размеченные промежутки времени, столкновения происходят лишь когда одна или несколько попыток передачи совершаются в том же промежутке.

Вероятность успешной передачи задается в виде $\mathbf{e^{-G}}$, а производительность для синхронной Алохи имеет вид

$S = Ge^{-G}$.

Нормированная производительность S достигает максимального значения 1/e ≈ 0,368 при G = 1.

Зависимость пропущенной нагрузки от производительности для синхронной Алохи показана на рисунке 4.25, где она сравнивается с соответствующей зависимостью для чистой Алохи.

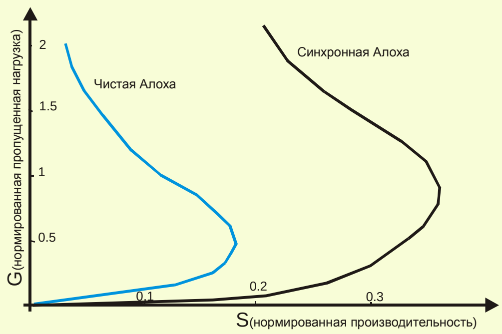

Рис 4.25-Характеристика производительности; Синхронная Алоха